СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

Н.А. ВАРЕНЮК, Є.Ф. ГАЛБА, І.В. СЕРГІЄНКО

УДК 517.95:519.63

ВАРІАЦІЙНІ ПОСТАНОВКИ ТА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ІЗ ЗАДАНИМИ НА ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ НАПРУГАМИ

Анотація. Розглянуто рівняння пружної рівноваги тіл у переміщеннях із заданими на поверхні тіла напругами. Зазначена задача не має єдиного розв'язку на всьому просторі вектор-функцій, де він існує. В роботі запропоновано і досліджено дві варіаційні задачі для розглядуваної статичної задачі теорії пружності з єдиним розв'язком на всьому просторі. Математичним апаратом дослідження слугує один із варіантів нерівності Корна, доведеної у статті. Розглянуто питання дискретизації цих варіаційних задач методом скінченних елементів і збіжності дискретних розв'язків.

Ключові слова: задача теорії пружності, варіаційні постановки, існування єдиного розв'язку у функціональних просторах, дискретні задачі, методи розв'язування дискретних задач.

ВСТУП

Математичне моделювання багатьох усталених процесів різної фізичної природи часто призводить до крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу, які мають єдиний розв'язок на підпросторі функцій із функціонального простору, де він існує. Це стаціонарні задачі теплопровідності, фільтрації, дифузії, електростатики, магнітостатики, задачі пружно-деформованого стану різних об'єктів і конструкцій. Зазвичай ці задачі розв'язують з використанням методу скінченних різниць (МСР) і методу скінченних елементів (МСЕ), які розглянуто у численних статтях і монографіях.

Цю роботу присвячено побудові і дослідженню нових варіаційних і дискретних задач для статичної задачі теорії пружності із заданими на границі області напругами. У результаті дискретизації цієї задачі за допомогою МСР чи МСЕ без урахування умов, що визначають єдиний її розв'язок, отримують системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із симетричними, додатно-напіввизначеними матрицями і правими частинами, які можуть задовольняти або не задовольняти умови розв'язності. У першому випадку постає питання про знаходження одного із розв'язків СЛАР, а в другому — про обчислення нормального псевдорозв'язку. Звичайно, знаходити один із розв'язків або псевдорозв'язків цих СЛАР можна за допомогою прямих або ітераційних методів, розроблених для систем з довільними матрицями (див., наприклад, [1–3] та зазначені у цих роботах посилання). Проте з урахуванням властивостей матриць для розв'язання таких систем будують більш економічні методи. Поява цих задач стала поштовхом до розроблення ітераційних процесів, які збігаються на підпросторі. Ітераційним методам на підпросторі присвячено значну кількість робіт (див., наприклад, [4–11]). У них здебільшого розв'язувалося питання адаптації ітераційних процесів, розроблених для СЛАР з додатно-означеними симетричними матрицями, для розв'язання СЛАР з симетричними додатно-напіввизначеними матрицями. Так, для дискретної задачі Неймана досліджено відомі ітераційні методи: метод змінних напрямків [12], метод верхньої релаксації [13, 14], метод спряжених градієнтів [15], двоступеневий ітераційний процес [16]. Ці методи для розв'язання дискретного аналога статичної задачі теорії пружності для заданих на границі області напруг розглянуто в [17, 18].

Ітераційні методи на підпросторі накладають більш жорсткі умови на оператори у двошарових ітераційних схемах [19] до того ж під час їхньої реалізації потрібно розв'язувати питання стійкості ітераційних процесів [20]. Відмітимо, що в [21, 22] досліджено різницеві схеми задачі Неймана для рівняння Пуасона, отримані шляхом фіксації розв'язку в одному із вузлів сітки. Деякі результати, отримані в цій роботі для другої крайової задачі теорії пружності в анізотропному випадку, без доведень наведено в повідомленнях [23, 24].

У монографіях [25, 26], присвячених МСЕ, розглянуто питання дискретизації і збіжності задачі Ляме у двовимірній області для заданих на границі області напруг. У [25] з використанням методу скінченних елементів отримано дискретну задачу, єдиний розв'язок якої фіксується відповідними умовами єдиності, виписаними для кусково-лінійних поповнень сіткових функцій. Розв'язання отриманої дискретної задачі не розглядалося. У [26] до отриманої на основі кусково-лінійного поповнення СЛАР з симетричною додатно-означеною матрицею добавлено матриці, які апроксимують умови, що забезпечують єдиний розв'язок диференціальної задачі, встановлено властивості отриманої матриці, а також запропоновано ітераційний метод для розв'язання отриманої СЛАР. У [27] на основі кусково-лінійного поповнення для двовимірної задачі теорії пружності із заданими на межі області напругами отримано СЛАР із симетричною додатно-напіввизначеною матрицею. Для розв'язання такої системи (знаходження нормального псевдорозв'язку) запропоновано застосувати метод спрощеної регуляризації [28]. Відмітимо, що в [29] для обчислення нормальних псевдорозв'язків з наперед заданою точністю СЛАР з симетричними розрідженими напіввизначеними матрицями запропоновано метод трьохетапної регуляризації. Дослідження проблеми показало, що спрощена регуляризація дискретних задач, отриманих за МСЕ, не надає змоги повною мірою застосувати теорію МСЕ для отримання тієї самої швидкості збіжності (за умови узгодження параметра регуляризації з порядком точності), що і для дискретних задач, які апроксимують крайові задачі з єдиним розв'язком на всьому просторі.

Мета цієї статті — запропонувати і дослідити нові варіаційні постановки статичної задачі теорії пружності із заданими на границі області напругами з єдиним розв'язком на всьому просторі, а також дослідити відповідні дискретні задачі для визначення методів їх розв'язання.

Робота містить п'ять розділів. У розд. 1 наведено постановку крайової задачі і позначення, що використовуються у статті. В розд. 2 сформульовано і доведено один із варіантів нерівності Корна, які використовуються під час дослідження варіаційних задач. У розд. 3 сформульовано і досліджено дві варіаційні задачі, однозначно розв'язні у просторі Соболєва. Одна із варіаційних задач ґрунтується на методі штрафу — у вихідний функціонал варіаційної задачі, яка розв'язується в єдиний спосіб на підпросторі, вводиться штрафна функція з малим параметром, а інша є еквівалентною класичній задачі, яка має єдиний на підпросторі розв'язок, але розв'язна в єдиний спосіб на всьому просторі функцій, де її розв'язок існує. В розд. 4 досліджено відповідні дискретні задачі МСЕ, що ґрунтуються на процесі Рітца. В розд. 5 досліджено СЛАР МСЕ і дано рекомендації щодо їхнього розв'язування.

1. ПОСТАНОВКА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^3$ — скінченна область з достатньо гладкою границею Г. В області $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ розглянемо крайову задачу теорії пружності [30]

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} x_i^{(0)} = f(x),\ x \in \Omega\,, \tag{1}$$

$$lu = \sum_{i,k=1}^{3} \sigma_{ik} \cos(n, x_k) x_i^{(0)} = g(x),\ x \in \Gamma, \tag{2}$$

де $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ — вектор пружних переміщень, $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ — вектор масових сил, $g = (g_1, g_2, g_3)^T$ — вектор напруг на Г, $x_i^{(0)}$ — орт осі Ox_i, $i = \overline{1,3}$, n — внутрішня нормаль до Г, $\sigma_{ik}(u) = \sigma_{ki}(u) = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}(x) \varepsilon_{lm}(u)$ — складові тензора напруг, $\varepsilon_{lm}(u) = \varepsilon_{ml}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)$ — складові тензора деформацій.

Нехай виконуються умови існування розв'язку задачі (1), (2)

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g d\gamma = 0\,,\ \int_{\Omega} r \times f dx + \int_{\Gamma} r \times g d\gamma = 0\,, \tag{3}$$

де r — радіус-вектор точки області Ω, а символ «×» означає векторний добуток векторів.

Єдиний розв'язок виділимо умовами

$$\int_{\Omega} u dx = 0\,,\ \int_{\Omega} r \times u\, dx = 0\,. \tag{4}$$

Припустимо, що $f \in (L_2(\Omega))^3$, $g \in (L_2(\Gamma))^3$, коефіцієнти пружності $c_{iklm}(x)$ задовольняють умови симетрії $c_{iklm}(x) = c_{lmik}(x) = c_{kilm}(x)$ і, до того ж, задовольняють умову [1]

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} \ge \mu_0 \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2,\ \mu_0 = \text{const} > 0\,. \tag{5}$$

Норми в $(L_2(\Omega))^3$ і $(L_2(\Gamma))^3$ вводимо за формулами

$$\|u\|_{(L_2(\Omega))^3} \equiv \|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{m=1}^{3} u_m^2 dx\right)^{1/2},\ \|u\|_{(L_2(\Gamma))^3} \equiv \|u\|_{0,\Gamma} = \left(\int_{\Gamma} \sum_{m=1}^{3} u_m^2 d\gamma\right)^{1/2}.$$

Позначимо $(W_2^k(\Omega))^3$ простір Соболєва з нормою

$$\|u\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{m=1}^{3} \|u_m\|_{k,\Omega}^2\right)^{1/2},$$

де $\|u_m\|^2_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (D^\alpha u_m)^2\, dx, \quad m=\overline{1,3}, \qquad D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \partial^{\alpha_3} x_3}$,

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_i \ge 0$ — цілі числа, $i=\overline{1,3}$.

Визначимо білінійні форми

$$a_0(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, dx\,, \quad a_1(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,k,l,m=1}^3 c_{iklm}(x) \varepsilon_{ik}(u) \varepsilon_{lm}(v) dx,$$

$$a_2(u,v) = a_1(u,v) + \varsigma \int_\Omega u \cdot v\, dx,$$

$$a_3(u,v) = a_1(u,v) + \int_\Omega u dx \cdot \int_\Omega v dx + \int_\Omega r \times u\, dx \cdot \int_\Omega r \times v\, dx,$$

$$E(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik}(u) \varepsilon_{ik}(v) dx$$

і лінійну форму

$$b(v) = 2\int_\Omega f \cdot v\, dx + 2\int_\Gamma g \cdot v\, d\gamma,$$

де $u \cdot v$ — евклідів скалярний добуток тривимірних векторів u і v, $\varsigma > 0$ — фіксований числовий параметр.

Визначимо лінійну множину вектор-функцій $(V_2^k(\Omega))^3 \subset (W_2^k(\Omega))^3$

$$(V_2^k(\Omega))^3 = \left\{ v \mid v \in (W_2^k(\Omega))^3,\ \int_\Omega v dx = 0,\ \int_\Omega r \times v\ dx = 0 \right\}.$$

2. ОДИН ІЗ ВАРІАНТІВ НЕРІВНОСТІ КОРНА. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА НА ПІДПРОСТОРІ

У роботах [30, 31] показано додатну визначеність квадратичної форми $a_1(v,v)$ на лінеалі вектор-функцій, що задовольняють умови (4) у розумінні норми простору $(L_2(\Omega))^3$, тобто справджується нерівність

$$a_1(v,v) \ge M \|v\|_{0,\Omega} \quad \forall v \in (L_2(\Omega))^3$$

із сталою M, що не залежить від v.

У роботі [30] сформульовано варіаційну задачу, яка відповідає крайовій задачі (1)–(4), про мінімум функціонала

$$J_1(v) = a_1(v,v) - b(v) \tag{6}$$

і показано існування єдиного розв’язку цієї задачі в $(L_2(\Omega))^3$ у випадку виконання умов (4). Для подальших викладок необхідно показати додатну визначеність квадратичної форми $a_1(v,v)$ в $(V_2^1(\Omega))^3$, тобто отримати оцінку

$$a_1(v,v) \ge M_1 \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in (V_2^1(\Omega))^3,$$

після чого можна показати, що варіаційна задача (6) має єдиний розв’язок у $(V_2^1(\Omega))^3$. Для цього доведемо наведену нижче нерівність, а саме одну із нерівностей Корна. Зазначимо, що класичну нерівність Корна доведено у роботі [31], а у [32, 33] доведено другу нерівність Корна.

Лема 1. Для довільної вектор-функції $v \in (W_2^1(\Omega))^3$ справджується нерівність

$$E(v, v)+\left(\int_\Omega v dx\right)^2+\left(\int_\Omega r\times v\, dx\right)^2 \geq C\|v\|_{1,\Omega}^2, \tag{7}$$

де $C = \mathrm{const} > 0$ і не залежить від v.

Доведення. Для доведення леми скористаємося вектор-функцією u, яку введемо в такий спосіб:

$$u = v + \sum_{\alpha=1}^{3} m_\alpha \rho^{(\alpha)}, \tag{8}$$

де $\rho^{(\alpha)} = (\rho_1^{(\alpha)}, \rho_2^{(\alpha)}, \rho_3^{(\alpha)})^T$ — вектор-функції вигляду

$$\rho^{(1)} = (0,\ x_{3C} - x_3, x_2 - x_{2C})^T,\ \rho^{(2)} = (x_3 - x_{3C},\ 0,\ x_{1C} - x_1)^T,$$

$$\rho^{(3)} = (x_{2C} - x_2, x_1 - x_{1C}, 0)^T, \tag{9}$$

а x_{1C}, x_{2C}, x_{3C} — координати центру ваги об'єму Ω.

Сталі m_α виберемо у такий спосіб, щоб виконувалася рівність

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\, u dx = \int_\Omega r\times v\, dx. \tag{10}$$

Для виконання (10) потрібно покласти

$$m = \frac{\int_\Omega \mathrm{rot}\, v dx - \int_\Omega r\times v\ \ dx}{2\,\mathrm{mes}\,\Omega} \tag{11}$$

Неважко переконатися в тому, що

$$E(u, u) = E(v, v),\ \int_\Omega u dx = \int_\Omega v\, dx. \tag{12}$$

З урахуванням (8), (10), (12), нерівності Пуанкаре і нерівності

$$C_1 a_0(\varphi, \varphi) \leq E(\varphi, \varphi) + \left(\int_\Omega \mathrm{rot}\, \varphi dx\right)^2 \quad \forall \varphi \in (W_2^1(\Omega))^3,$$

доведеної в [31], отримуємо

$$E(v, v)+\left(\int_\Omega v dx\right)^2+\left(\int_\Omega r\times v\, dx\right)^2 \geq C_1 a_0(u, u) + \left(\int_\Omega u dx\right)^2 \geq C_2\|u\|_{0,\Omega}^2 =$$

$$= C_2\left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\sum_{\alpha=1}^{3} m_\alpha \rho^{(\alpha)}\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\int_\Omega v\cdot \sum_{\alpha=1}^{3} m_\alpha \rho^{(\alpha)} dx\right). \tag{13}$$

Беручи до уваги вигляд векторів $\rho^{(\alpha)}$ і m, визначених відповідно в (9) і (11), за допомогою ε-нерівності оцінимо останній доданок в (13)

$$2\int_{\Omega} v \cdot \sum_{\alpha=1}^{3} m_{\alpha}\rho^{(\alpha)} dx \le C_3 \left[\varepsilon_1 \left(\int_{\Omega} \mathrm{rot} v\, dx \right)^2 + \left(\frac{1}{4\varepsilon_1} + 1 \right) \left(\int_{\Omega} r \times v\ dx \right)^2 + \varepsilon_2 \left(\int_{\Omega} \mathrm{rot}\, v\, dx \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\varepsilon_2} \left(\int_{\Omega} v\, dx \right)^2 + \varepsilon_3 \left(\int_{\Omega} r \times v\, dx \right)^2 + \frac{1}{4\varepsilon_3} \left(\int_{\Omega} v\, dx \right)^2 \right] = C_3 T_{\varepsilon}(v, v).$$

Додамо до лівої і правої частини нерівності (13) $C_2 E(v, v)$, використаємо другу нерівність Корна [32, 33]

$$E(\varphi, \varphi) + \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 \ge C_4 \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \varphi \in (W_2^1(\Omega))^3 \tag{14}$$

і останню нерівність. Отримаємо

$$\begin{gathered} (1 + C_2) E(v, v) + \left(\int_{\Omega} v\, dx \right)^2 + \left(\int_{\Omega} r \times v\, dx \right)^2 \ge \\ \ge C_2 \left[\|v\|_{0,\,\Omega}^2 + E(v, v) - T_{\varepsilon}(v, v) \right] \ge C_2 \left[C_4 \|v\|_{1,\,\Omega}^2 - T_{\varepsilon}(v, v) \right]. \end{gathered} \tag{15}$$

У $T_{\varepsilon}(v, v)$ виберемо ε_1 і ε_2 так, щоб виконувалась нерівність

$$C_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\int_{\Omega} \mathrm{rot}\, v\, dx \right)^2 < C_2 C_4 \|v\|_{1,\Omega}^2,$$

тоді на основі (15) отримуємо (7), тобто твердження леми.

Лему 1 доведено.

Теорема 1. Розв’язок задачі про мінімум функціонала (6) у підпросторі $(V_2^1(\Omega))^3$ існує та є єдиним.

Доведення. Симетрична білінійна форма $a_1(u, v)$ за умови обмеженості коефіцієнтів $c_{iklm}(x)$ є неперервною у $(V_2^1(\Omega))^3$, оскільки

$$|a_1(v, v)| \le C_5 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in (V_2^1(\Omega))^3.$$

Використовуючи співвідношення (5), (7), отримаємо

$$a_1(v, v) \ge C_6 \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in (V_2^1(\Omega))^3,$$

тобто квадратична форма є додатно-означеною у $(V_2^1(\Omega))^3$. З урахуванням нерівності Коші–Буняковського і Фрідріхса для лінійної форми маємо

$$|b(v)| \le C_7 (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Gamma}) \|v\|_{1,\Omega}.$$

Оскільки квадратична форма є додатно-означеною у $(V_2^1(\Omega))^3$, а симетрична білінійна і лінійна форми є неперервними, то (див., наприклад, [34]) існує єдина вектор-функція із $(V_2^1(\Omega))^3$, що мінімізує функціонал (14).

Теорему 1 доведено.

3. ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ З ЄДИНИМ РОЗВ'ЯЗКОМ У $(W_2^1(\Omega))^3$

Тепер сформулюємо і дослідимо дві варіаційні задачі, які однозначно розв'язуються в $(W_2^1(\Omega))^3$. Спочатку розглянемо варіаційну задачу про мінімум функціоналу

$$J_2(w) = a_2(w, w) - b(w) \tag{16}$$

у просторі вектор-функцій $(W_2^1(\Omega))^3$.

Оскільки квадратична форма $a_2(w, w)$, зважаючи на (5), (14), є додатно-означеною в $(W_2^1(\Omega))^3$, а лінійна і симетрична білінійна форми є неперервними, то існує єдина вектор-функція із $(W_2^1(\Omega))^3$, яка мінімізує функціонал (16).

Теорема 2. Нехай вектор-функція v_0 надає мінімум функціоналу (6) у підпросторі $(V_2^1(\Omega))^3$, а вектор-функція w_0 мінімізує функціонал (16) у просторі $(W_2^1(\Omega))^3$. Тоді є справедливою оцінка

$$\| v_0 - w_0 \|_{1,\Omega} \le C\varsigma(\| f \|_{0,\Omega} + \| g \|_{0,\Gamma}), \tag{17}$$

де $C > 0$ — константа.

Доведення. Спочатку покажемо, що $w_0 \in (V_2^1(\Omega))^3$. Оскільки w_0 надає мінімум функціоналу (16), то для довільного числа t і $\psi \in (W_2^1(\Omega))^3$ маємо

$$J_2(w_0) \le J_2(w_0 + t\psi) = J_2(w_0) + J_2(t\psi) + 2a_2(w_0, t\psi),$$

тобто

$$0 \le t^2 a_2(\psi, \psi) + 2t \left[a_1(w_0, \psi) + \varsigma \int_\Omega w_0 \cdot \psi \, dx - \frac{1}{2} b(\psi) \right].$$

Через те, що t — довільне число, для задоволення останньої нерівності необхідно, щоб виконувалися співвідношення

$$\int_\Omega w_0 \cdot \psi \, dx = \left[-a_1(w_0, \psi) + \frac{1}{2} b(\psi) \right] / \varsigma. \tag{18}$$

Позначимо

$$\mu^{(1)} = (1, 0, 0)^T, \ \mu^{(2)} = (0, 1, 0)^T, \ \mu^{(3)} = (0, 0, 1)^T, \ \mu^{(4)} = (0, -x_3, x_2)^T,$$
$$\mu^{(5)} = (x_3, 0, -x_1)^T, \ \mu^{(6)} = (-x_2, x_1, 0)^T. \tag{19}$$

Покладемо послідовно $\psi = \mu^{(\alpha)} \ (\alpha = 1, \ldots, 6)$, врахуємо (3). Тоді на основі рівності (18) переконуємося, що w_0 задовольняє умови (4), тобто належить $(V_2^1(\Omega))^3$.

Нехай $z = w_0 - v_0$, тоді $z \in (V_2^1(\Omega))^3 \subset (W_2^1(\Omega))^3$. Оскільки w_0 мінімізує функціонал (16) і $z, v_0 \in (W_2^1(\Omega))^3$, то

$$J_2(w_0) = J_2(v_0) + J_2(z) + 2a_2(v_0, z) \le J_2(v_0 + \frac{1}{2} z) =$$
$$= J_2(v_0) + \frac{1}{4} J_2(z) - \frac{1}{4} b(z) + a_2(v_0, z),$$

звідки
$$\frac{3}{4}J_2(z)+a_2(v_0, z)+\frac{1}{4}b(z)\le 0. \qquad (20)$$

Оскільки $z, w_0 \in (V_2^1(\Omega))^3$, то і $\varphi = w_0 - \frac{1}{2}z \in (V_2^1(\Omega))^3$, завдяки чому можемо записати
$$J_1(v_0) = J_1(w_0)+a_1(z, z)+b(z)-2a_1(v_0, z)-2a_1(z, z)\le$$
$$\le J_1\left(w_0-\frac{1}{2}z\right)=J_1(w_0)-\frac{3}{4}a_1(z, z)+\frac{1}{2}b(z)-a_1(v_0, z),$$

звідки
$$-\frac{1}{4}a_1(z, z)+\frac{1}{2}b(z)-a_1(v_0, z)\le 0. \qquad (21)$$

Додамо (20), (21) і отримаємо
$$\frac{1}{2}a_2(z, z)\le -\varsigma\int_\Omega v_0\cdot z\,dx.$$

Використаємо ε-нерівність, врахуємо (5), (7), ту обставину, що $z\in(V_2^1(\Omega))^3$, виберемо відповідним чином ε. Тоді із останньої нерівності знайдемо
$$\|z\|_{1,\Omega}\le C_1\varsigma\|v_0\|_{0,\Omega}. \qquad (22)$$

Оцінимо $\|v_0\|_{0,\Omega}$. Оскільки v_0 мінімізує функціонал (6), то
$$a_1(v_0, v_0)=\frac{1}{2}b(v_0),$$

звідки, використовуючи ε-нерівність, співвідношення (4), (5), (7), нерівність Коші–Буняковського, нерівність Фрідріхса, отримаємо
$$\|v_0\|_{1,\Omega}\le C_2(\|f\|_{0,\Omega}+\|g\|_{0,\Gamma}). \qquad (23)$$

Із (22), (23) випливає (17), тобто твердження теореми 2.

Теорему 2 доведено.

Розглянемо задачу про мінімум функціоналу
$$J_3(w)=a_3(w, w)-b(w) \qquad (24)$$
у просторі вектор-функцій $(W_2^1(\Omega))^3$.

Оскільки квадратична форма $a_3(w, w)$, зважаючи на (5), (7), є додатно-означеною в $(W_2^1(\Omega))^3$, а лінійна форма і симетрична білінійна форма є неперервними в $(W_2^1(\Omega))^3$, то існує єдина вектор-функція із $(W_2^1(\Omega))^3$, що доставляє мінімум функціоналу (24).

Теорема 3. Задача про мінімум функціонала (6) у підпросторі $(V_2^1(\Omega))^3$ і задача про мінімум функціонала (24) у просторі $(W_2^1(\Omega))^3$ є еквівалентними.

Доведення. Нехай $v_0\in(V_2^1(\Omega))^3$, $w_0\in(W_2^1(\Omega))^3$ — вектор-функції, що мінімізують відповідно функціонал (6) у випадку виконання умов (4) і (24). Спочатку покажемо, що $w_0\in(V_2^1(\Omega))^3$.

Через те, що w_0 мінімізує функціонал (24) для довільного числа t і $\psi \in (W_2^1(\Omega))^3$, за аналогією доведення теореми 2 маємо

$$0 \le t^2 a_3(\psi, \psi) + 2t\left[a_3(w_0, \psi) - \frac{1}{2} b(\psi)\right].$$

Оскільки t — довільне число, то для задоволення цієї нерівності необхідно покласти

$$\int_\Omega w_0 dx \cdot \int_\Omega \psi dx + \int_\Omega r \times w_0 dx \cdot \int_\Omega r \times \psi dx = -a_1(w_0, \psi) + \frac{1}{2} b(\psi). \tag{25}$$

Помістимо початок координат у центр ваги об'єму Ω. Покладемо послідовно $\psi = \mu^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1, 6}$, де $\mu^{(\alpha)}$ — вектор-функції, визначені в (19). Тоді $a_1(w_0, \mu^{(\alpha)}) + \frac{1}{2} b(\mu^{(\alpha)}) = 0$ з огляду на визначення білінійної форми $a_1(u, v)$ і умови (3), а для визначення невідомих

$$\int_\Omega w_{0,1} dx,\ \int_\Omega w_{0,2} dx,\ \int_\Omega w_{0,3} dx,\ \int_\Omega (x_2 w_{0,3} - x_3 w_{0,2}) dx,$$

$$\int_\Omega (x_3 w_{0,1} - x_1 w_{0,3}) dx,\ \int_\Omega (x_1 w_{0,2} - x_2 w_{0,1}) dx$$

із (25) отримаємо однорідну СЛАР з додатно-означеною матрицею. Отже, ця система має тільки нульовий розв'язок, звідки випливає, що $w_0 \in (V_2^1(\Omega))^3$.

Тепер покажемо, що $w_0 = v_0$. Позначимо $z = w_0 - v_0$. Враховуючи, що вектор-функції $w_0, v_0 + Cz$ $(C = \text{const})$ належать $(W_2^1(\Omega))^3$, можемо записати

$$J_3(w_0) = J_3(z) + J_3(v_0) + 2a_3(v_0, z) \le J_3\left(v_0 + \frac{1}{2} z\right) =$$

$$= J_3(v_0) + \frac{1}{4} J_3(z) - \frac{1}{4} b(z) + a_3(v_0, z).$$

Оскільки $v_0, z \in (V_2^1(\Omega))^3$, то $a_3(v_0, z) = a_1(v_0, z)$ і з останньої нерівності отримуємо

$$\frac{3}{4} J_3(z) + \frac{1}{4} b(z) + a_1(v_0, z) \le 0. \tag{26}$$

Завдяки тому, що $v_0, w_0, z, w_0 + Cz \in (V_2^1(\Omega))^3$, маємо

$$J_1(v_0) = J_1(w_0) + J_1(-z) - 2a_1(w_0, z) = J_1(w_0) - a_1(z, z) + b(z) - 2a_1(v_0, z) \le$$

$$\le J_1(w_0 - \frac{1}{2} z) = J_1(w_0) - \frac{3}{4} a_1(z, z) + \frac{1}{2} b(z) - a_1(v_0, z),$$

звідки

$$-\frac{1}{4} a_1(z, z) + \frac{1}{2} b(z) - a_1(v_0, z) \le 0. \tag{27}$$

Додамо нерівності (26), (27), врахуємо те, що $z \in (V_2^1(\Omega))^3$. Тоді з урахуванням (7) отримаємо

$$C_1 \| z \|^2_{1,\Omega} \le \frac{1}{2} a_3(z, z) \le 0 ,$$

звідки випливає, що $z = w_0 - \upsilon_0 = 0$, тобто твердження теореми 3.

Теорему 3 доведено.

4. ДИСКРЕТНІ ЗАДАЧІ

У розд. 3 для задачі (1)–(4) запропоновано дві варіаційні задачі про мінімум функціоналів (16) і (24), які однозначно можуть бути розв'язані на всьому просторі $(W_2^1(\Omega))^3$. Для розв'язання варіаційних задач розглянемо можливість отримання дискретних задач за допомогою МСЕ, що ґрунтується на процесі Рітца. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — многокутник. Покриємо його скінченною кількістю невироджених трикутників. Нехай h — найбільша сторона всіх трикутників цієї тріангуляції. Як пробні візьмемо кусково-поліноміальні вектор-функції, які на кожному елементарному трикутнику визначаються поліномом степеня p ($p = 1, 2, 3$). Вузлові точки і вузлові параметри будемо вибирати згідно з [34, 35]. Позначимо $(S_p^h)^2 \subset (W_2^1(\Omega))^2$ і $(F_p^h)^2 \subset (V_2^1(\Omega))^2$ скінченно-вимірні підпростори кусково-поліноміальних вектор-функцій степеня p.

Теорема 4. Нехай w_0^h доставляє мінімум функціоналу (16) на множині вектор-функцій із $(S_p^h)^2$, і $w_0 \subset (W_2^{p+1}(\Omega))^2$ а υ_0, що мінімізує функціонал (6) в підпросторі $(V_2^1(\Omega))^2$, належить також $(V_2^{p+1}(\Omega))^2$. Нехай $f \in (L_2(\Omega))^2$, $g \in (L_2(\Gamma))^2$. Тоді справджується оцінка

$$\| \upsilon_0 - w_0^h \|_{1,\Omega} \le C(\varsigma + h^p) , \tag{28}$$

де $C = \text{const}$ і C не залежить від ς та h.

Доведення. У випадку виконання умов цієї теореми з огляду на (17) отримаємо оцінку

$$\| \upsilon_0^h - w_0^h \|_{1,\Omega} \le C_1 \varsigma . \tag{29}$$

Нехай υ_0 і υ_0^h мінімізують функціонал (6) на класі вектор-функцій $(V_2^1(\Omega))^2$ і $(F_p^h)^2$ відповідно, причому згідно з умовою теореми $\upsilon \in (V_2^{p+1}(\Omega))^2$. Оскільки квадратична форма $a_1(\upsilon, \upsilon)$ є додатно-означеною в $(V_2^1(\Omega))^2$, то на основі теорії методу скінченних елементів (див., наприклад, [34, 35]) маємо

$$\| \upsilon_0 - \upsilon_0^h \|_{1,\Omega} \le C_2 h^p . \tag{30}$$

Тепер, використовуючи нерівність трикутника і оцінки (29), (30), отримаємо (28), тобто твердження теореми 4.

Теорему 4 доведено.

Наслідок 1. Нехай $\varsigma = O(h^p)$, тоді $\| w_0^h - \upsilon_0 \|_{1,\Omega} \le C_3 h^p$.

Нехай w_0, яка мінімізує функціонал (24) у просторі $(W_2^1(\Omega))^2$, належить також $(W_2^{p+1}(\Omega))^2$, а w_0^h доставляє мінімум цьому функціоналу на множині вектор-функцій із $(S_p^h)^2$. Тоді завдяки (30) і твердженням теореми 3 маємо оцінку

$$\| w_0 - w_0^h \|_{1,\Omega} \le C_4 h^p,$$

де $C_4 = \text{const}$ і не залежить від h.

Нехай праві частини рівнянь (1) і крайових умов (2) задано з похибкою, так що умови (3) можуть не виконуватися. Наближені значення для f і g позначимо $\tilde{f} = f + \Delta f$, $\tilde{g} = g + \Delta g$.

Нехай відомо

$$\| \Delta\tilde{f} \|_{0,\Omega} \le \delta_1, \ \| \Delta\tilde{g} \|_{0,\Gamma} \le \delta_2, \ \delta = \max_{\alpha} \delta_\alpha .$$

Розглянемо задачу про мінімум функціонала

$$J_2^*(w^h) = a_2(w^h, w^h) - 2\int_{\Omega} \tilde{f} \cdot w\,dx - 2\int_{\Gamma} \tilde{g} \cdot w\,d\gamma \tag{31}$$

на множині вектор-функцій із $(S_p^h)^2$.

Нехай $\varsigma = \mathrm{O}(h^p)$, w_0^h доставляє мінімум функціоналу (31) на множині вектор-функцій із $(S_p^h)^2$, а υ_0, що мінімізує функціонал (6) у підпросторі $(V_2^1(\Omega))^2$, належить також $(V_2^{p+1}(\Omega))^2$, тоді за аналогією до досліджень, проведених у [36] для дискретизації задачі Неймана, можна показати, що для дискретної задачі теорії пружності виконується оцінка

$$\| \upsilon_0 - w_0^h \|_{1,\Omega} \le C_5 (h^p + \delta), \tag{32}$$

де $C_5 = \text{const}$, що не залежить від h і δ.

Оцінка (32) показує, що вибір h потрібно узгодити з точністю задання f і g. Відмітимо, що оцінку(32), як і інші оцінки цього розділу, отримано за припущення, що відповідні інтеграли обчислено з достатньою точністю. Питання впливу на збіжність методу скінченних елементів наближеного обчислення інтегралів детально досліджено в роботі [36] для дискретної задачі Неймана.

5. ВЛАСТИВОСТІ СИСТЕМ МСЕ

Вище розглянуто два способи отримання дискретних задач з єдиним розв'язком за допомогою методу скінченних елементів для задач теорії пружності із заданими на межі області напругами. Визначимо, в яких умовах доцільно їх застосовувати. Нехай для задач про мінімум функціоналів (16), (24) на множині вектор-функцій із $(S_p^h)^2$ отримані відповідні системи МСЕ є такими:

$$A_1 x^{(1)} = b^{(1)}, \ A_2 x^{(2)} = b^{(2)}.$$

Дослідження цих систем з погляду використання для їхнього розв'язку прямих чи ітераційних методів здійснюється за тією самою схемою, що і для дискретних задач Неймана, розглянутих в [36].

Згідно з принципом Релея мінімальні власні значення матриць A_α оцінюють у такий спосіб [35]:

$$\lambda_1^{(\alpha)}(A_\alpha) \ge \lambda_1^{(\alpha)}(M^{-1} A_\alpha) \lambda_1(M), \tag{33}$$

де M — матриця маси.

Задачі на власні значення $A_\alpha z^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} M z^{(\alpha)}$ є дискретними аналогами неперервних задач $L_\alpha \varphi^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} \varphi^{(\alpha)}$, де $L_1 u = Lu + \varsigma u$, $L_2 u = Lu$, причому оператор L_2

задано в підпросторі $(V_2^1(\Omega))^2$. У [35] показано, що $\lambda_1(M^{-1}A)$ дискретної задачі завжди не менший за $\lambda_1(L)$ неперервної задачі. Оскільки $\lambda_1^{(1)}(L_1)=\varsigma$, а $\lambda_1^{(2)}(L_2)$ в $(V_2^1(\Omega))^2$ завдяки нерівності (5), (7) є обмежено сталою, то, враховуючи (33), отримаємо

$$\lambda_1^{(1)}(A_1)\geq\varsigma\lambda_1(M),\ \lambda_1^{(2)}(A_2)\geq C_6\lambda_1(M). \tag{34}$$

Якщо $\varsigma=\mathrm{O}(h^p)$, то із (34) для мінімального власного значення матриці A_1 маємо оцінку $\lambda_1^{(1)}\geq C_7h^p\lambda_1(M)$ і тому для достатньо малого ς буде зменшуватися $\lambda_1^{(1)}$ у випадку зменшення h і збільшення степеня полінома. Оцінки для максимальних власних значень матриць A_α за порядком є порівнюваними з h. Отже, обумовленість матриці A_1 для достатньо малого ς буде гіршою, ніж матриці A_2. Через те, що під час розв'язання СЛАР за допомогою ітераційних методів кількість ітерацій для досягнення певної точності значною мірою залежить від обумовленності матриці, розв'язання системи$A_1x^{(1)}=b^{(1)}$з використанням ітераційних методів не є доцільним. Для її розв'язання можна скористатися прямими методами, які є пристосованими для систем з розрідженими матрицями [37], якщо довжина машинного слова є достатньою для отримання необхідної точності.

Обумовленість матриці A_2 за порядком h можна порівняти з обумовленістю матриці скінченних елементів для крайової задачі із заданими на межі області переміщеннями. Тому задачу $A_2x^{(2)}=b^{(2)}$ можна розв'язувати за допомогою ітераційних методів, наприклад, розглянутих у [25, 26] для систем МСЕ із симетричними додатно-означеними матрицями. Однак матриця A_2 буде матрицею повного наповнення, що зумовлено наявністю у квадратичній формі $a_3(w^h,w^h)$ функціонала (24) складових $(\int\limits_\Omega w^h dx)^2+(\int\limits_\Omega r\times w^h\,dx)^2$. Проте ця обставина не буде суттєво впливати на кількість арифметичних операцій, потрібних для обчислення вектора $A_2x^{(k)}$.

Дійсно, подамо матрицю A_2 у вигляді суми двох матриць $A_2=B+C$, де розріджена матриця B відповідає квадратичній формі $a_1(w^h,w^h)$, а матриця повного заповнення C — квадратичній формі $(\int\limits_\Omega w^h dx)^2+(\int\limits_\Omega r\times w^h\,dx)^2$. Легко помітити, що матриця C буде складатися із рядків вигляду c_ic^T, $i=\overline{1,n}$, де $c^T=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ — вектор-рядок, $C=\begin{bmatrix}c_1 & c^T\\ c_2 & c^T\\ \cdots & \cdots\\ c_n & c^T\end{bmatrix}$. Враховуючи структуру матриці C, відмітимо, що компонента вектора $Cx^{(k)}$, де k — номер ітерації, дорівнює $c_ic^Tx^{(k)}$. Добуток $c^Tx^{(k)}$ можна обчислити один раз для всіх компонент вектора $Cx^{(k)}$. Отже, обчислення цього вектора потребує $3n$ арифметичних операцій, де n — порядок матриці A_2. Це становить незначну частину від загальної кількості арифметичних операцій, потрібних для реалізації однієї ітерації.

ВИСНОВКИ

Розглянуто варіаційні постановки і дискретизацію МСЕ другої крайової задачі теорії пружності. Ця задача має єдиний розв'язок на підпросторі. Дискретизація цієї задачі за допомогою МСЕ призводить до СЛАР із симетричною додатно-напіввизначеною матрицею, права частина якої може задовольняти або не задовольняти умови існування розв'язку. Дослідження показали, що для розв'язування зазначеної задачі доцільно використовувати постановки варіаційних задач, відмінні від класичних. Тому для другої крайової задачі теорії пружності сформульовано і досліджено дві варіаційні задачі, що мають єдиний розв'язок без додаткових умов на клас функцій. Математичним апаратом побудови цих варіаційних задач є один із варіантів нерівності Корна, яку доведено у статті. Досліджено питання близькості розв'язків запропонованих варіаційних постановок крайових задач і класичних варіаційних постановок цих задач. Розгянуто питання узгодження швидкості збіжності дискретних задач з параметром штрафної фукції, параметром триангуляції області, похибкою вхідних даних. На основі запропонованих варіаційних постановок задач отримано СЛАР із симетричними додатно-означеними матрицями. Проведено дослідження властивостей матриць цих систем, на основі чого дано рекомендації стосовно методів їх розв'язання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Галба Е.Ф., Сергиенко И.В. Методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 3. С. 65–93.
2. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. 1. Положительно-определенные веса. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Т. 44, № 1. С. 47–73.
3. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задач наименьших квадратов. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. Т. 32, № 3. С. 142–145.
4. Молчанов И.Н., Яковлев М.Ф. Итерационные процессы решения одного класса несовместных систем линейных алгебраических уравнений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*. 1975. Т. 15, № 3. С. 547–558.
5. Neumann M., Plemmons R.J. Convergent nonnegative matrices and iterative methods for consistent linear systems. *Numer. Math*. 1978. Vol. 31, N 3. P. 265–279.
6. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск: Наука, 1972. 205 с.
7. Кузнецов Ю.А. Вычислительные методы в подпространствах. В сб.: *Вычислительные процессы и системы.* Вып. 2. Г.И. Марчук (ред.). Москва: Наука, 1985. С. 265–350.
8. Молчанов И.Н., Яковлев М.Ф. Об одном классе итерационных процессов решения несовместных систем линейных алгебраических уравнений. *Докл. АН СССР*. 1973. Т. 209, № 4. С. 782–784.
9. Молчанов И.Н., Яковлев М.Ф. О двушаговых итерационных методах решения одного класса несовместных систем линейных алгебраических уравнений. *Докл. АН СССР*. 1974. Т. 214, № 6. С. 1265–1268.
10. Keller H.B. On the solution of singular and semidefinite linear systems by iterations. *SIAM J. Numer. Anal*. 1965. N 2. P. 281290.
11. Meyer C.D., Plemmons R.J. Convergent powers of a matrix with applications to iterative methods for singular linear systems. *SIAM J. Numer. Anal*. 1977. Vol. 14, N 4. P. 699–705.
12. Douglas J., Pearcy C. On convergence of alternating direction procedures in the presence of singular operators. *Numer. Math*. 1963. N 5. P. 175–184.
13. O'Carrol M.J. Inconsistencies and S.O.R. convergence for the discrete Neumann problem for a rectangle. *J. Inst. Math. Appl*. 1973. N 11. P. 343–350.

14. Barret J.W., Elliott C.M. A practical finite element approximation of a semi-definite Neumann problem on a curved domain. *Numer. Math*. 1987. Vol. 51, N 1. P. 23–36.
15. Shieh A.S.L. On convergence of the conjugate gradient methods for singular capacitance matrix equations from the Neumann problem of the Poisson equation. *Numer. Math*. 1977/78. Vol. 29, N 3. P. 307–327.
16. Бахвалов Н.С., Богачев К.Ю., Мэтр Ж.Ф. Эффективный алгоритм решения жестких эллиптических задач с приложениями к методу фиктивных областей. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 1999. Т. 39, № 6. С. 919–931.
17. Молчанов И.Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 316 с.
18. Дьяконов Е.Г. О решении систем уравнений проекционно-разностного метода для неотрицательных операторов. В сб.: *Вычислительные методы линейной алгебры. Труды Всесоюзного совещания*. Г.И. Марчук (ред.). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1977. С. 51–60.
19. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978. 588 с.
20. Кузнецов Ю.А. Матричные итерационные методы в подпространствах: дис. … д-ра физ.-матем. Наук: ВЦ АН СССР. Москва, 1982. 197 с.
21. Giese J.H. On the truncation error in a numerical solution of the Neumann problem for a rectangle. *J. Math. Phys*. 1958. Vol. 37, N 2. P. 169–177.
22. Волков Е.А. О методе сеток для краевой задачи с косой и нормальной производной. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 1961. Т. 1, № 4. С. 607–621.
23. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. О сходимости разностных схем для второй краевой задачи теории упругости. *Докл. АН УССР*. 1982. Сер. А, № 11. С. 11–14.
24. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. Вариационные постановки второй краевой задачи теории упругости *Докл. АН УССР*. 1986. Сер. А, № 8. С. 17–20.
25. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 207 с.
26. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979. 335 с.
27. Алиев Б. Разностная схема для решения второй краевой статической задачи теории упругости. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*. 1970. Т. 10, № 6. С. 1481–1490.
28. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. Москва: Изд-во Московского ун-та, 1987. 217 с.
29. Химич А.Н., Попов А.В., Полянко В.В. Алгоритмы параллельных вычислений для задач линейной алгебры с матрицами нерегулярной структуры. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. Т. 47, № 6. С. 159–174.
30. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Москва; Ленинград: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. 216 с.
31. Friedrich K.O. On the boundary-value problems of the theory of elastisity and Korn’s inequality. *Ann. Math*. 1947. Vol. 48, N 2. P. 441–471.
32. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. Москва: Наука, 1980. 384 с.
33. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. Москва: Мир, 1974. 160 с.
34. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Москва: Мир, 1980. 512 с.
35. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Москва: Мир, 1977. 352 с.
36. Molchanov I.N., Galba E.F. On finite element methods for the Neumann problem. *Numer. Math*. 1985. Vol. 46, N 4. P. 587–598.
37. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. Москва: Мир, 1984. 333 с.

Надійшла до редакції 09.06.2020

Н.А. Варенюк, Е.Ф. Галба, И.В. Сергиенко

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ НАПРЯЖЕНИЯХ

Аннотация. Рассмотрены уравнения упругого равновесия тел в перемещениях с заданными на поверхности тела напряжениями. Такая задача не имеет единственного решения на всем пространстве вектор-функций, где оно существует. В работе предложены и исследованы две вариационные задачи для рассматриваемой статичной задачи теории упругости с единственным решением на всем пространстве. Математическим аппаратом исследования служит один из вариантов неравенства Корна, доказанного в статье. Рассмотрен вопрос дискретизации этих вариационных задач методом конечных элементов и сходимости дискретных решений.

Ключевые слова: задача теории упругости, вариационные постановки, существование единственного решения в функциональных пространствах, дискретные задачи, методы решения дискретных задач.

N.A. Vareniuk, E.F. Galba, I.V. Sergienko

VARIATIONAL STATEMENTS AND DISCRETIZATION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY WHEN TENSION ON THE BOUNDARY OF THE DOMAIN IS KNOWN

Abstract. The equations of elastic equilibrium of bodies in displacements with the stresses set on the surface of the body are considered. Under the conditions that ensure the solution of this boundary-value problem, its solution will be unique in the whole space of vector functions where it exists. Two variational problems for the considered static problem of the theory of elasticity with a unique solution in the whole space are proposed and investigated. The mathematical apparatus of the study is one of the variants of the Korn inequality that is proved in the article. Discretization of these variational problems by the finite-element method and convergence of discrete solutions is considered.

Keywords: elasticity theory problem, variational statements, existence of a unique solution in function spaces, discrete problems, methods for solving discrete problems.

Варенюк Наталія Анатоліївна,
кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: nvareniuk@ukr.net.

Галба Євген Федорович,
доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: e.f.galba@ukr.net.

Сергієнко Іван Васильович,
академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, директор Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: incyb@incyb.kiev.ua.