

РАЗРЕЗЫ В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ. II¹

Аннотация. Предложены два алгоритма преобразования текущей базы полиматроида в новую для улучшения значения целевой функции. Установлена эквивалентность задачи максимального разреза на заданном графе и задачи нахождения минимального разреза, отделяющего источник и сток в сети, построенной относительно некоторой базы расширенного полиматроида. Сформулированы необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи максимального разреза на неориентированных графах в терминах теории потоков.

Ключевые слова: графы, разрезы, выпуклая функция, специальные многогранники, полиматроид.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой модель задачи максимального разреза содержит переменные для каждой вершины рассматриваемого графа. Специфика ее ограничений заслуживает внимания, поскольку определение исходного допустимого решения можно выполнить с помощью гриди алгоритма за время $O(m)$. При этом определенное решение является крайней точкой [2] многогранника ее ограничений, т.е. базой [3] полиматроида $x \in B(\varphi)$ (см. [1]). Учитывая специфику целевой функции, можно определить допустимое решение, в котором целевая функция почти достигает своего максимума. Для этого нужно найти оптимальное линейное упорядочение вершин (с учетом топологии данного графа), в соответствии с установленным в нем порядком многим переменным присвоить их максимальное допустимое значение. Такое допустимое решение задачи можно найти алгоритмом [4] за время $O(nm)$. При этом каждому допустимому решению соответствует остовной двудольный подграф (для краткости иногда будем писать двудольный подграф) заданного графа, и обратное тоже верно.

Поскольку задача максимального разреза относится к классу NP-трудных задач, определение линейного упорядочения вершин, с использованием которого оптимальное решение задачи можно найти гриди алгоритмом, сопряжено с большими трудностями. Предложено два алгоритма преобразования упомянутого исходного допустимого решения в другое с целью улучшить значение функции. В первом алгоритме вначале определенным образом определяются подмножества вершин каждой доли этого двудольного подграфа. В результате исключения и включения этих подмножеств в разные доли получается новое допустимое решение. При этом, если значение целевой функции улучшается, процесс продолжается относительно текущего решения, иначе алгоритм завершает работу. Во втором алгоритме для поиска нового допустимого решения используется алгоритм преобразования одной из двух произвольных баз в другую, предложенный в [5].

В настоящей статье показана эквивалентность задачи максимального разреза на заданном графе задаче нахождения минимального разреза, отделяющего ис-

¹Продолжение. Начало в № 4, 2020.

точник и сток в сети, построенной относительно рассмотренной базы расширенного полиматроида. Сформулированы необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи максимального разреза на неориентированных графах в терминах теории потоков.

1. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАКСИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА

Для работы приведенных далее алгоритмов необходимо определить начальные значения переменных задачи, модель которой представлена в [1], в следующем виде:

$$MaxCut_* = \max \left\{ f(x) = \sum_{v \in V} |2x_v - d_v| \right\}, \quad (1)$$

$$x \in B(\varphi). \quad (2)$$

Поскольку выпуклая целевая функция (1) достигает максимального значения по крайней мере в одной из крайних точек (баз) $B(\varphi)$ [6], которые можно найти гриди алгоритмом за время $O(m)$, предпочтительным методом решения задачи (1), (2) являются приведенные далее два алгоритма преобразования одной крайней точки в другую как способ продвижения к глобальному максимуму. Входом этих алгоритмов преобразования является крайняя точка x многогранника $B(\varphi)$, определяемая алгоритмом [4] за время $O(nm)$.

При этом точки x и $y = d - x$ удовлетворяют условиям

$$x_v \geq \frac{d_v}{2} + a_v \text{ при } v \in V_+, \quad y_w \geq \frac{d_w}{2} + b_w \text{ при } w \in V_-, \quad (3)$$

где a_v и b_w — неотрицательные числа. Из этих условий следует, что значение (1) в точке x не может существенно отличаться от глобального максимума целевой функции. Для определения другой крайней точки многогранника $B(\varphi)$ с лучшим значением целевой функции (1) рассмотрим дополнительные свойства для точки x .

Поскольку $x(V_+) - y(V_+) = y(V_-) - x(V_-)$, из неравенства (3) для вершины $w \in V_-$ получаем

$$x(V_+) - y(V_+) = y(V_-) - x(V_-) \geq \frac{d(V_-)}{2} + b(V_-) - x(V_-).$$

Из этого неравенства следует, что $y(V_+) \leq |E| - \frac{d(V_-)}{2} - b(V_-)$. Аналогично можно показать, что $x(V_-) \leq |E| - \frac{d(V_+)}{2} - a(V_+)$. Суммируя эти два неравенства, получаем

$$x(V_-) + y(V_+) \leq |E| - \lambda|V|, \quad (4)$$

где число $\lambda = \frac{a(V_+) + b(V_-)}{|V|}$ называется плотностью графа $G = (V, E)$ относительно базы x .

Отметим, что $\lambda \leq \frac{|E|}{|V|}$ и в (4) имеем равенство, если G — двудольный граф. Чтобы определить максимальный разрез по двойственному равенству, необходимо найти базу x из $B(\varphi)$, для которой плотность максимальна.

Рассмотрим остовной двудольный подграф H с множествами вершин $V_+(x)$ и $V_-(x)$ каждой доли и множеством ребер $\delta(V_+(x))$. Ясно, что значение λ будет

максимальным, если в подграфе H степени всех вершин существенно отличны от $\frac{d_v}{2}$. Поэтому алгоритмы исключения и включения вначале выделяют подмно-

жество V^0 вершин, степени которых в подграфе H отличны от $\frac{d_v}{2}$ на минимальную величину. Не нарушая общности, можно предположить, что в начале работы этих алгоритмов $V^0 \subset V_-$. Согласно лемме 1 (см. [1]) в крайней точке x значение функции (1) не изменится, если в подграфе H не происходит перемещения некоторых вершин из одной доли в другую.

Теперь рассмотрим работу первого алгоритма исключения и включения. Пусть $N(v) = \{w \in V : (v, w) \in \delta(V_+)\}$ и $W = \bigcap_{i=1, \dots, k} N(v_i)$, где $W_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ — минимальное по включению подмножество множества V^0 такое, что $\Delta f = |E_-^+| - |E_0| > 0$. Здесь E_-^+ — множество ребер (v, w) с конечными вершинами $v \in W_0$, $w \in V_+(x) \setminus W_0$ или $v \in W$, $w \in V_-(x) \setminus W$ в графе $G = (V, E)$ и E_0 — множество ребер с одной конечной вершиной в W_0 или W в двудольном подграфе H . Пусть H_1 — остоновый двудольный граф с множеством ребер $\delta(V_+^1)$ и множествами вершин V_+^1 и V_-^1 каждой доли, полученный после перемещения подмножеств вершин W и W_0 из одной доли в другую в подграфе H . Легко показать, что $f_+(x^1) = f_+(x) + \Delta f$ для базы $x^1 \in B(\varphi)$, порожденной по линейному упорядочению $L = (V_+^1, V_-^1)$. Разрез $\delta(V_+^1)$ получается после исключения множества E_0 и включения E_-^+ в H_1 . Если $\Delta f > 0$ для некоторого подмножества $V^0 \subset V_+^1$ или $V^0 \subset V_-^1$, то данный процесс снова повторяется для остонового двудольного подграфа H_1 . В противном случае алгоритм исключения и включения завершает работу.

Эффективность указанного алгоритма исключения и включения касательно сходимости к оптимальному решению зависит от правил выбора вершин для исключения из одной доли и включения в другую долю текущего остонового двудольного подграфа. Очевидно, что если компоненты базы $x \in B(\varphi)$ удовлетворяют условию $x_v = 0 \vee d_v$ для большого количества вершин v из V , то плотность λ графа $G = (V, E)$ максимальна. Иными словами, выражение в правой части равенства (4) принимает минимальное значение, если неравенство $0 < x_v < d_v$ выполняется, по меньшей мере, для минимального числа вершин v .

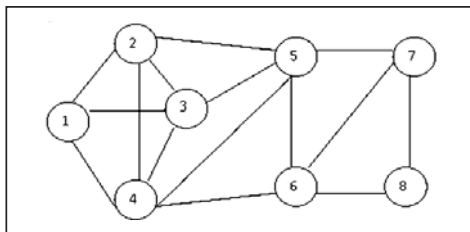


Рис. 1. Граф $G = (V, E)$

Далее показано, что в оптимальном решении задачи максимального разреза количество переменных, удовлетворяющих этим неравенствам, действительно минимальное.

В качестве примера рассмотрим задачу (1), (2) на графе, представленном на рис. 1, для решения которой применяется алгоритм исключения и включения.

На этапе просмотра вершин для выбора вершины 4 алгоритм $O(nm)$ [4] определяет линейное упорядочение $L = \{4 \prec_L 7 \prec_L 2 \prec_L 3 \prec_L 1 \prec_L 6 \prec_L 5 \prec_L 8\}$ вершины графа G и базу

$$x = (x_4 = 5, x_7 = 3, x_2 = 3, x_3 = 2, x_1 = 0, x_6 = 2, x_5 = 0, x_8 = 0). \quad (5)$$

Несложно убедиться, что базы x и $y = d - x$ удовлетворяют условиям (3), при этом $V_+ = \{4, 7, 2\}$ и $V_- = \{1, 3, 5, 6, 8\}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} x(V_+) &= 11, \quad y(V_+) = 1, \quad f_+(x) = 10, \\ y(V_-) &= 14, \quad x(V_-) = 4, \quad f_-(x) = 10, \\ f(x) &= (x(V_+) - y(V_+)) + (y(V_-) - x(V_-)) = 20. \end{aligned}$$

На рис. 2 показан остовой двудольный подграф H с множествами вершин V_+, V_- и ребер $\delta(V_+)$. Поскольку вершины $v = \{3, 6, 8\} \in V_-^1$ имеют степени $\frac{d_v}{2}$ и при этом $\Delta f > 0$ для минимального по включению подмножества $\{3, 6\}$, вершины 3, 6 перемещаются в другую долю, следовательно, вершина 4 тоже должна перемещаться.

В результате определяется база

$$x^* = (x_7^* = 2, x_2^* = 3, x_3^* = 4, x_6^* = 4, x_1^* = 0, x_5^* = 0, x_8^* = 0, x_4^* = 2), \quad (6)$$

относительно которой определен разрез содержит ребра, пересекающиеся со штриховыми линиями на рис. 3. Легко проверить, что $f_+(x^*) = 11$, $f_-(x^*) = 11$ и $f(x^*) = 22$. Разрез, определенный базой x^* , максимальный.

Второй алгоритм преобразования основан на следующем важном результате. В [5] предложен эффективный алгоритм элементарного преобразования одной из двух произвольных баз (например, x и x^1) из $B(\varphi)$ в другую базу. Определение базы $x^1 = x + \alpha(\chi_u - \chi_w) \in B(\varphi)$ преобразованием $x \in B(\varphi)$ относительно вершины $w \in \text{dep}(x, u)$ называется элементарным преобразованием баз x, x^1 (elementary transformations of bases), где χ_v — характеристический вектор, соответствующий вершине $v \in V$, и

$$\text{dep}(x, u) = \{v; v \in V, \exists \alpha > 0, x + \alpha(\chi_u - \chi_v) \in B(\varphi)\}.$$

Теорема 1 [5]. Преобразование одной (например, x) из двух произвольных баз $x, x^1 \in B(\varphi)$ в другую (x^1) можно выполнить не более чем за $n^2 / 4$ элементарных преобразований таким образом, что на каждой итерации каждая компонента x_v монотонно увеличится, если $x_v < x_v^1$, и монотонно уменьшится, если $x_v > x_v^1$.

Входом для второго алгоритма является также база $x \in B(\varphi)$ и подмножество вершин $\{v_1, \dots, v_k\}$ множества $V^0 \subseteq V_-(x)$. Для ускорения работы алгоритма вершины v_1, \dots, v_k необходимо упорядочить в порядке неубывания значения x_{v_i} . Далее для текущей базы x и каждой вершины v_i в установленном порядке выполняется элементарное преобразование [5] не более k раз. Поэтому при перемещении некото-

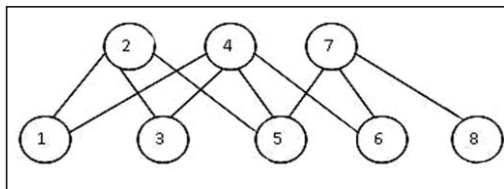


Рис. 2. Подграф $H = (V_+, V_-, \delta(V_+))$

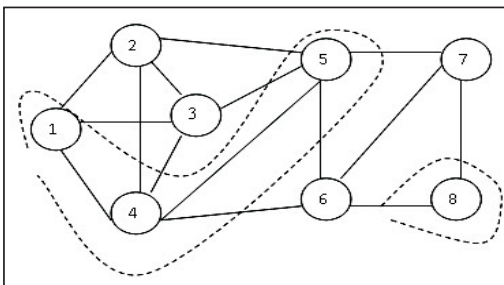


Рис. 3. Максимальный разрез в графе $G = (V, E)$

рых вершин w из $V_+(x)$ к $V_-(x)$ и v из $V_-(x)$ к $V_+(x)$ компоненты базы x с индексами v текущей базы монотонно возрастут, а компоненты с индексами w монотонно уменьшатся. Таким образом, после выполнения не более $n^2/4$ элементарных преобразований определится база x^1 и подмножества $V_+(x^1)$ и $V_-(x^1)$. Если $f_+(x^1) > f_+(x)$, то этот процесс снова повторяется относительно базы $x = x^1$.

Во введении [1] упомянутые алгоритмы определяют решение задачи максимального разреза с различными погрешностями приближения к глобальному максимуму, которые обычно обусловлены использованием некоторого априорного значения для плотности графа $G = (V, E)$ в качестве критерия остановки. В алгоритме исключения и включения погрешность приближения для решения задачи (1), (2) можно оценить с использованием часто применяемых на практике свойств выпуклых множеств в конечномерном пространстве в терминах евклидовой нормы. Для этого вначале определим верхнюю границу по функционалу (1) в этой норме. Далее с учетом того, что целевая функция (1) является нормой в l_1 , определим коэффициент при норме $|\cdot|$ так, что известное отношение эквивалентности между этой и евклидовой нормами в функциональном анализе выполнится как равенство. Таким образом, можно оценить погрешность приближения к глобальному максимуму целевой функции.

Рассмотрим ограниченное выпуклое множество T в n -мерном евклидовом пространстве. Важными геометрическими характеристиками множества T являются его диаметр и радиус описанного шара. Если евклидово расстояние $\|x - z\| = \langle x - z, x - z \rangle^{1/2}$ между точками x и z , величины $a_T = \sup_{x, z \in T} \|x - z\|$ и

$r_T = \min_{x_0} \sup_{x \in T} \|x - x_0\|$ называются соответственно диаметром множества T и ради-

усом описанного шара с центром в некоторой точке x_0 пространства. Очевидно, что r_T есть радиус наименьшего шара, содержащего множество T . Существование такого шара следует из непрерывности евклидова расстояния. (Доказательство этого утверждения можно найти во многих учебниках по теории выпуклого анализа.) Следующий результат является основной частью известной теоремы Юнга.

Теорема 2. Для любого ограниченного множества T в n -мерном евклидовом пространстве радиус описанного шара r_T и диаметр a_T множества T удовлетворяют неравенству

$$r_T \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} a_T. \quad (7)$$

Можно показать, что если компактное выпуклое множество T центрально-симметрично, то a_T — максимальное расстояние между параллельными опорными гиперплоскостями множества T . Отметим, что множество T называется центрально-симметричным, если T содержит начало координат n -мерного евклидова пространства и из $x \in T$ следует, что $-x \in T$.

Известно, что многогранники $z \in EP(\varphi - \omega)$ и $B(\varphi)$ можно представить как выпуклую оболочку конечного числа крайних точек (баз). Это означает их ограниченность, если даже множество, выпуклая оболочка которого представляет эти многогранники, не всегда будет минимальным по количеству включений с этим свойством. Из теории выпуклого анализа известно, что среди этих точек существуют такие, в которых целевая функция (1), (2) достигает своего максимума. Согласно утверждениям 1–3 (см. [1]) любую точку $z \in EP(\varphi - \omega)$ (базу z) можно представить в виде $z = x - y$, где $x \in B(\varphi)$ и $y = d - x$. Также из

$y = d - x \in B(\varphi)$ и $x = d - y$ следует, что если $z \in EP(\varphi - \omega)$, то $-z \in EP(\varphi - \omega)$. Поэтому начало координат евклидова n -мерного пространства лежит на середине отрезка, соединяющего произвольные точки z и $-z$ из $EP(\varphi - \omega)$. Значит, начало координат является центром описанного шара для $EP(\varphi - \omega)$. Следовательно, $\|z^*\|$ является радиусом описанного шара для $EP(\varphi - \omega)$ при $z^* = 2x^* - d$, где x^* — оптимальное решение задачи (1), (2). Для определения верхнего значения диаметра $EP(\varphi - \omega)$ отметим, что $0 \leq z_v \leq d_v$ или $-d_v \leq z_v \leq 0$ для всех $z \in EP(\varphi - \omega)$, так как произвольная база из $EP(\varphi - \omega)$ представима в виде $z = x - y$, где $y = d - x$.

Рассмотрим вектор $h = (h_v : v \in V)$ с компонентами $h_v = d_v$ или $h_v = -d_v$ для всех $v \in V$. Из центрально-симметричности многогранника $EP(\varphi - \omega)$ вытекает, что существуют параллельные гиперплоскости с нормальными векторами h и $-h$ такие, что $EP(\varphi - \omega)$ лежит между этими гиперплоскостями. Следовательно,

$$\sup\{\|z - t\|; z, t \in EP(\varphi - \omega)\} \leq \|h - (-h)\| = \|d - (-d)\| = 2\|d\|,$$

т.е. величина $2\|d\|$ является верхней границей для диаметра многогранника $EP(\varphi - \omega)$. Поскольку $z(V) = 0$ для всех z из $EP(\varphi - \omega)$, выпуклая оболочка этих точек из $EP(\varphi - \omega)$ лежит в $(n-1)$ -мерном подпространстве евклидова пространства. Поэтому из (7) следует, что оптимальное решение x^* (z^*) задачи (1), (2) удовлетворяет неравенству

$$\|2x^* - d\| = \|z^*\| \leq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}} \|d\|. \quad (8)$$

Используя это неравенство, можно определить погрешность приближения к максимальному значению целевой функции (1) следующим образом. Из теории функционального анализа известно, что нормы $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ эквивалентны в конечномерном линейном пространстве. Поэтому для каждого $z \in EP(\varphi - \omega)$ существует конечное число α такое, что

$$\alpha|z| = \|z\|. \quad (9)$$

Таким образом, определив α для каждого вектора $z = 2x - d$, сгенерированного алгоритмом исключения и включения, можно оценить погрешности приближения к максимальному значению целевой функции согласно неравенству (8). В случае, когда неравенство (8) характеризует несколько векторов как наилучшее приближение к оптимальному решению задачи (1), (2), среди них следует выбрать вектор, для которого значение α минимальное в (9). Например, рассмотрим в (5) и (6) указанные базы x и x^* , для которых выполняется равенство $\|2x^* - d\| = \|2x - d\|$, т.е. $\|z^*\| = \|z\|$. С учетом этого равенства неравенство (8) будет характеризовать базы x и x^* как наилучшее приближение к оптимальному решению задачи (1), (2). Однако по норме $|\cdot|$ решением этой задачи на указанном на рис. 1 графе является только база x^* с наилучшей погрешностью приближения, так как $|z^*| = 22 > 20 = |z|$.

Отметим, что верхняя оценка для $\|z^*\|$ не может быть улучшена в (8). Например, равенства в (8) имеют место для $z^* = 2x^* - d$, где x^* — решение задачи (1), (2) на простом графе с двумя вершинами и одним ребром.

Итак, поскольку согласно теореме 1 (см. [1]) каждому разрезу можно сопоставить базу из $B(\varphi)$, возникает вопрос, допустима ли в задаче (1), (2) замена максимизации $f(x)$ минимизацией функции $f(x)$ для определения минимального

разреза $\delta(S_*)$ решением полученной задачи. Если игнорировать требования о том, что в задаче минимального разреза $\delta(S_*)$ подмножество S_* не может быть пустым множеством и должно отличаться от множества вершин графа, то база $x = d/2$, соответствующая разрезам $\delta(\emptyset)$ или $\delta(V)$, является решением полученной задачи минимизации, так как $f_+(d/2) = 0$. Поэтому определение $\delta(S_*)$ (при $S_* = V_+(x)$) сводится к нахождению базы x с минимальным положительным значением функции $f_+(x)$, что эквивалентно задаче минимизации симметричной функции $\varphi(S) - \omega(S)$ (см. [7]), решением которой определяется несобственное подмножество $\emptyset \neq S_* \subset V$.

2. СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ МАКСИМАЛЬНОГО РАЗРЕЗА

Согласно леммам 1 и 2 (см. [1]) один и тот же разрез можно определить поиском некоторых различных баз из $B(\varphi)$, однако согласно теореме 1 (см. [1]) количество баз, соответствующих различным разрезам в графе $G = (V, E)$, можно представить величиной $(n-1)!$. Поэтому выбор подходящего способа линейного упорядочения вершин заданного графа является сложной задачей. Использование для этих целей решений, близких к решению задачи (1), (2), а именно определение максимального независимого множества вершин, нахождение минимального количества красок для раскраски вершин и т.д., неэффективно, так как в этом случае определение требуемого линейного упорядочения вершин и нахождение решения задачи максимального разреза эквивалентны по трудоемкости.

Для ряда алгоритмов (см. [8]) предлагалось использовать приближенное решение подзадач, встречающихся при решении задачи максимального разреза, для уменьшения времени нахождения ее решения. Во многих случаях приближенные решения определялись с помощью решения задачи, полученной после линейной релаксации исходной. Однако из [6] следует, что даже некоторые полиномиально разрешимые задачи оптимизации невозможно сформулировать как задачи линейного программирования с приемлемым (полиномиальным) количеством ограничений, задающих многогранник с целочисленными вершинами (компактная задача линейного программирования). Хотя представление задачи максимального разреза в графе $G = (V, E)$ как компактной задачи линейного программирования в настоящей статье не рассматривается, можно утверждать, что из $P \neq NP$ следует, что аналогично невозможно сформулировать задачу (1), (2), которая является задачей максимизации негладкой функции на специальном многограннике. Несмотря на то, что методы нахождения экстремумов негладкой функции интенсивно изучались многими специалистами, предложенные методы непригодны или малоэффективны для решения задачи (1), (2).

Известно, что при исследовании операций, связанных с комбинаторными задачами, полезен теоретико-графовый подход к сетевым представлениям этих задач. В рамках подобных исследований разработаны алгоритмы, позволяющие решить практические задачи с большими данными. Рассмотрим сетевое представление задачи максимального разреза.

Пусть база x порождена по некоторому линейному упорядочению L и $y = d - x$. Поскольку $z = 2x - d = x - y \in EP(\varphi - \omega)$ и $z(V) = 0$, можно определить подмножества вершин $V_+ = \{v : z_v > 0, v \in V\}$ и $V_- = \{v : z_v < 0, v \in V\}$. Пусть дуги ациклически ориентированного графа $G = (V, E)$, полученного после замены всех ребер дугами согласно линейному упорядочению L , имеют единичные пропускные способности. Далее к графу $G = (V, E)$ добавляются дуги sv и rw с пропускными способностями z_v и $|z_w|$ для каждой вершины $v \in V_+$ и $w \in V_-$ соответственно. В полученной сети $G_z = (V_z, E_z)$ множества выходящих из вер-

шин и входящих в вершины дуг подмножества $S \subset V_0$ обозначаются $\delta_+(S)$ и $\delta_-(S)$. Отметим, что пропускная способность разреза, отделяющего подмножество вершин S от остальных вершин, определяется как сумма потоков на дугах, выходящих из вершины $v \in S$, минус сумма потоков на дугах, входящих в вершину $v \in S$. Разрез с минимальной пропускной способностью называется минимальным разрезом.

Теорема 3. В сети $G_z = (V_z, E_z)$ значением максимального потока от источника s к стоку r являются единичные потоки на всех дугах ациклического ориентированного графа $G = (V, E)$ и потоки со значениями z_v и $|z_w|$ на дугах sv и rw соответственно.

Доказательство. Согласно построению сети G_z равенство $x_v - y_v = z_v$ выполняется для каждой вершины $v \in V$. Это означает, что суммы пропускных способностей дуг из множеств $\delta_+(v)$ и $\delta_-(v)$ одинаковые для каждой вершины $v \in V$. Поэтому для сохранения баланса между входящими и выходящими потоками для каждой вершины $v \in V$ значение максимального потока на дугах ациклически ориентированного графа $G = (V, E)$ должно равняться единице. Кроме того, из $z(\delta_+(s)) = x(V_+) - y(V_+) = y(V_-) - x(V_-) = |z(\delta_-(r))|$ следует, что z_v и $|z_w|$ являются величинами максимального потока на дугах sv и rw соответственно. ■

Согласно этой теореме величина потока на всех дугах равна пропускной способности дуг, значит, произвольный разрез, отделяющий источник s и сток r , является минимальным разрезом в сети $G_z = (V_z, E_z)$. Таким образом, получаем, что $f_+(x)$ есть значение максимального потока из источника s в сток r в построенной сети $G_z = (V_z, E_z)$ относительно базы $z = 2x - d \in EP(\varphi - \omega)$.

В качестве примера рассмотрим задачу максимального разреза на графе, показанном на рис. 4.

Пусть $L = (6, 1, 2, 3, 4, 5)$ — линейное упорядочение вершин этого графа. Рассмотрим базу $x = (x_6 = 5, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0) \in B(\varphi)$, порожденную по L . Тогда $V_+ = \{1, 6\}$, $V_- = \{2, 3, 4, 5\}$ и разрез, отделяющий эти подмножества, содержит ребра, которые пересекаются со штриховой линией на рис. 4. Простой проверкой можно убедиться, что этот разрез является максимальным с мощностью, равной шести. На рис. 5 показана сеть $G_z = (V_z, E_z)$, построенная относительно базы

$$x - y = z = (z_6 = 5, z_1 = 1, z_2 = -2, z_3 = -1, z_4 = -1, z_5 = -2) \in EP(\varphi - \omega),$$

где $y = d - x$. Легко проверить, что в сети G_z пропускная способность произвольного минимального разреза, отделяющего источник и сток, равна мощности максимального разреза в показанном на рис. 4 графе.

Определение 1. В сети $G_z = (V_z, E_z)$, построенной для базы $z = 2x - d \in EP(\varphi - \omega)$, потоки на дугах vw называются транзитными, если вершины $v, w \in V_+(x)$ или $v, w \in V_-(x)$.

Теорема 4. База $x \in B(\varphi)$ является решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда суммарное количество транзитных потоков является минимальным в построенной сети $G_z = (V_z, E_z)$ для $z = 2x - d$.

Доказательство. Пусть база x порождена по линейному упорядочению L и сеть G_z , построенная для $z = 2x - d$, содержит минимальное количество транзитных потоков на дугах vw . Из определения разреза в графе G относи-

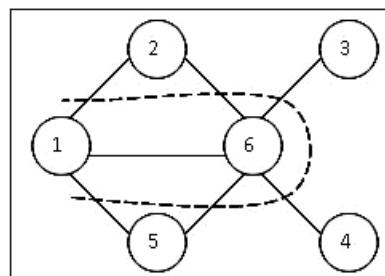


Рис. 4. Максимальный разрез для базы x

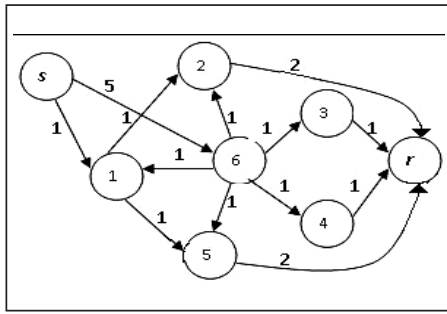


Рис. 5. Сеть для базы $z = x - y$

$z = 2x - d$ и $x \in B(\varphi)$, то обратное утверждение также следует из двойственного равенства (6) из [1]. ■

Иными словами, эта теорема утверждает, что если в решении задачи (1), (2) минимальное количество переменных удовлетворяет неравенствам $0 < x_v < d_v$, то определенный относительно x_v разрез в графе G максимальный. Например, база $x = (x_1 = 3, x_4 = 3, x_5 = 5, x_8 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0)$ является оптимальным решением задачи (1), (2) на графе, приведенном на рис. 1, а $MaxCut_* / 2 = = f(x) / 2 = 11$. Нетрудно убедиться, что в сети G_z , построенной для базы $z = 2x - d$, суммарное количество транзитных потоков на дугах vw с вершинами из $v, w \in V_+(x)$ и $v, w \in V_-(x)$ равно $y(V_+(x)) = 2$ и $x(V_-(x)) = 2$ соответственно, где $y = (y_1 = 0, y_4 = 2, y_5 = 0, y_8 = 0, y_2 = 3, y_3 = 4, y_6 = 3, y_7 = 3)$.

Легко проверить, что в сети G_z пропускные способности всех минимальных разрезов, отделяющих источники и стоки, тоже равны 11.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье изложены ранее неизвестные свойства максимального разреза в неориентированных графах в терминах теории выпуклого анализа, потоков и полиматроидов, которые показывают, что модель (1), (2) выгодно отличается от представленных в последнее время моделей. Доказанные свойства в терминах различных теорий также способствуют применению известных алгоритмов для решения задачи максимального разреза. Тем не менее, по мнению авторов, применение алгоритмов [4] и алгоритма исключения и включения является более эффективным для нахождения максимального разреза в практических задачах. Также заслуживает внимания то, что на основе доказанных свойств можно создать различные способы для осуществления более эффективного перемещения подмножества вершин между долями текущего двудольного подграфа в алгоритме исключения и включения.

Кроме этого, согласно теореме 3 задача максимизации количества передаваемого потока в трубопроводных сетях назначением вершин в качестве источника или стока также сводится к задаче максимального разреза. На практике такая задача возникает в трубопроводных сетях при необходимости использования пропускной способности сети для передачи потоков в прямом или обратном направлениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарифов Ф.А., Гуляницкий Л.Ф. Разрезы в неориентированных графах. I. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 4. С. 46–55.
2. Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty M.C. *Nonlinear programming: Theory and algorithms*. New York: J. Wiley and Sons, 1979. 583 p.
3. Satoru Iwata. Submodular function minimization. *Math. Program. Ser. B*. 2008. Vol. 112. P. 45–64.

тельно баз x и $y = d - x$ следует, что если $v, w \in V_+(x)$, то $y(V_+(x))$, а если $v, w \in V_-(x)$, то $x(V_-(x))$ являются суммарным количеством транзитных потоков на дугах vw . Поэтому из двойственного равенства (6) из [1] получаем, что $\delta(V_+(x))$ является максимальным разрезом в графе G .

Если учесть, что $y(V_+(x)) + x(V_-(x))$ — сумма транзитных потоков в сети G_z , построенной для произвольных баз

4. Шарифов Ф.А. Нахождения максимального разреза графа алгоритмом. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 5. С. 61–67.
5. Fujishige S. Submodular function and optimization. *Annals of Discrete Mathematics*. 2005. P. 395.
6. Rothvoss T. The matching polytope has exponential extension complexity. *ACM Symposium on the Theory of Computing*. 2014. P. 263–272.
7. Queyranne M. A combinatorial algorithm for minimizing symmetric submodular function. *Math. Prog. Ser. A*. 1998. Vol. 82. P. 3–12.
8. Rendl F., Giovanni R., Wiegele A. Solving max-cut to optimality by intersecting semidefinite and polyhedral relaxations. *Mathematical Programming*. 2010. Vol. 121, Iss. 2. P. 307.

Надійшла до редакції 10.07.2019

Ф.А. Шаріфов, Л.Ф. Гуляницький
РОЗРІЗИ В НЕОРІЄНТОВАНИХ ГРАФАХ. II

Анотація. Запропоновано два алгоритми перетворення поточної бази поліматроїда до нової з метою поліпшення значення цільової функції. Встановлено еквівалентність задачі максимального розрізу на заданому графі і задачі знаходження мінімального розрізу, що відокремлює джерело і стік в мережі, побудованої відносно деякої бази розширеного поліматроїда. Сформульовано необхідні та достатні умови оптимальності розв'язування задачі максимального розрізу на неорієнтованих графах в термінах теорії потоків.

Ключові слова: графи, розрізи, опукла функція, спеціальні багатогранники, поліматроїд.

F. Sharifov, L. Hulianytskyi
CUTS IN UNDIRECTED GRAPHS. II

Abstract. To improve the value of the objective function, two algorithms are proposed for transforming the current base into a new one. It is shown that the maximum cut problem on an undirected graph can be reduced to finding the base of the extended polynomial, for which the value of the minimum cut that separates the source and the sink is maximum. The necessary and sufficient conditions for optimality of the solution of the maximum cut problem on non-oriented graphs in terms of flow theory are formulated.

Keywords: graphs, cuts, convex function, special polyhedral, polymatroid.

Шарифов Фирдовси Ахун-оглы,
 доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: fasharifov@gmail.com.

Гуляницький Леонид Федорович,
 доктор техн. наук, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: lh_dar@hotmail.com.