СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

В.Ф. ГУБАРЕВ

УДК 519.7

ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ. II. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Аннотация. Рассмотрена проблема математической интерпретации экспериментальных данных в системах с распределенными параметрами с использованием модели, которая предполагается адекватной исследуемым объектам. Для линейных систем на основе функций Грина разработаны теоретические основы, позволяющие осуществлять постановку разнообразных обратных задач, к которым сводится проблема интерпретации. Рекомендованы и описаны процедуры регуляризации, позволяющие находить приближенные решения, согласованные по точности с погрешностями данных. Важная роль отводится представлению класса моделей в виде разложений, асимптотически приближающихся к точному описанию. Приведены конструктивные алгоритмы решения задач интерпретации.

Ключевые слова: задачи интерпретации, ассимиляция данных, обратные задачи, распределенные системы, регуляризация, идентификация, асимптотические модели.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи математической интерпретации данных для систем с сосредоточенными параметрами рассмотрены в [1]. Однако наиболее важны и востребованы задачи математической интерпретации данных при исследованиях систем с распределенными параметрами. Провести доскональные измерения на таких объектах принципиально невозможно. Количество измеряемых параметров в них всегда будет конечным, и по ним трудно судить о всех особенностях пространственно-временной структуры протекающих процессов. Априорное знание или предположение об адекватности их некоторому математическому описанию, устанавливающему жесткие связи между переменными состояния системы, позволяет во многих случаях объяснять поведение и практически важные свойства таких систем через решения задач интерпретации. При этом следует выбрать такую форму представления модели, которая бы допускала конструктивное решение. Здесь важное значение имеет представление ее в виде разложений, асимптотически приближающихся к точному описанию, что позволяет формировать аппроксимирующие модели любой точности. Тогда подбором подходящего аппроксимирующего описания можно согласовывать модель с имеющимися данными так, чтобы получать математическое решение рассматриваемой задачи. Другими словами, в задачах интерпретации данные имманентно заданы,

[1] Продолжение. Начало в № 2, т. 55, 2019.

а модель в аппроксимирующей форме адаптируется к ним, обеспечивая ее разрешимость. Именно поэтому такие неклассические математические задачи трактуются как задачи интерпретации. По сути они в большинстве случаев относятся к классу так называемых обратных задач.

В настоящей статье рассмотрено адаптирование различных систем с распределенными параметрами к имеющимся данным.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ДАННЫМИ

Функционально-аналитическое описание систем. Наиболее типичным в реальных ситуациях являются конечномерное внешнее воздействие и локальные измерения, осуществляемые в определенных пространственных точках. Кроме локальных допускаются интегральные измерения как на некоторых подобластях объекта, так и на многообразиях меньшей размерности, например на линиях, поверхностях и т.д. Для линейных систем с такими исходными данными можно использовать стандартизированное описание на основе функций Грина, которые также называют функциями влияния или функциями источника. Общую линейную систему, рассматриваемую в математической физике, представим моделью в операторной форме

$$L(D)w(z, t) = f(z, t) \tag{1}$$

с начальным

$$l_0(D)w(z, t_0) = w_0(z), \; z \in G, \tag{2}$$

и краевым

$$l_\Gamma(D)w(z, t) = f_\Gamma(z, t), \; z \in \Gamma_G, \; t \in [t_0, T] \tag{3}$$

условиями, где $[t_0, T]$ — временной интервал наблюдения; $w(z, t)$ — распределенное в пространстве состояние системы в каждый момент наблюдения; D — оператор дифференцирования; Γ_G — граница области G. Для упрощения изложения рассматриваемой проблемы ограничимся одномерным случаем, когда $w(z, t)$ является скалярным полем, т.е. скалярной функцией. Согласно [2] модель в форме (1)–(3) эквивалентна однородному описанию в виде

$$\begin{gathered} L(D)w(z, t) = \tilde{f}(z, t), \\ l_0(D)w(z, t_0) = 0, \\ l_\Gamma(D)w(z, t) = 0, \; z \in \Gamma_G, \; t \in [t_0, T], \end{gathered} \tag{4}$$

где $\tilde{f}(z, t)$ — стандартизирующая функция, которая фактически является обобщенной и формируется из функций f, w_0, f_Γ, при этом представление $\tilde{f}$ через эти функции не является единственным. В общем случае $\tilde{f}$ представляется в виде аддитивной суммы f, w_0 и f_Γ с коэффициентами в виде обычной δ-функции или ее аналогом в виде обобщенной функции простого или двойного слоя. Например, для краевой задачи Коши с одномерным по пространству параболическим уравнением она имеет вид

$$\tilde{f}(z, t) = f(z, t) + w_0(z)\delta(t) + a^2\delta(z) f_{\Gamma_1}(t) + a^2\delta'(l - z) f_{\Gamma_2}(t),$$

где $z \in [0, l]$; $f_{\Gamma_1}(t)$ и $f_{\Gamma_2}(t)$ — известные значения w соответственно на левом и на правом концах интервала. Здесь нет необходимости использовать функции простого или двойного слоя.

Если в (4) положить

$$\widetilde{f}(z,t)=\delta(z-\zeta)\cdot\delta(t-\tau),\ \ z,\zeta\in G,\ \ t\in[t_0,T],$$

то ее решением будет функция четырех независимых переменных $h(z,\zeta,t,\tau)$, которая и является функцией Грина. Преимущество состоит в том, что с ее помощью при использовании стандартизирующей функции решение задачи (4) запишется как

$$w(z,t)=\int_{t_0}^{t}\int_{G}h(z,\zeta,t,\tau)\cdot\widetilde{f}(z,\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

что полностью эквивалентно решению задачи (1)–(3).

Если исходная система является стационарной, то h представляется функцией трех переменных:

$$h=h(z,\zeta,t-\tau).$$

Для независимых от времени процессов функция Грина представляется как

$$h=h(z,\zeta),$$

т.е. является функцией двух пространственных переменных.

Заметим также, что (5) как частный случай содержит системы с сосредоточенными параметрами, т.е. в h отсутствует зависимость от пространственных переменных и остается зависимость только от временных переменных (t,τ). Для стационарных систем $h=h(t-\tau)$ является функцией одной переменной и (5) принимает вид формулы Коши [3], в которой h есть переходная функция или переходная матрица в случае многосвязных систем. Именно в этом состоит универсальность описания (5).

Измерительная система. В системах с распределенными параметрами возможны различные способы получения данных. Наиболее распространенными являются прямые точечные измерения $y_1(t),\ y_2(t),\ldots,\ y_M(t)$, которые осуществляются локально расположенными в области G датчиками, т.е. $y_m(t)=w(z_m t),\ m=\overline{1,M}$, где $z_m\in\overline{G}$. Кроме локальных могут осуществляться интегральные измерения, при которых

$$y_m=\int_{\overline{G}_m}\Psi_m(z)\cdot w(z,t)\,dz,$$

где Ψ_m — весовая функция, определенная в области $G_m\subseteq\overline{G}$. Интегральные измерения могут проводиться на многообразиях, имеющих меньшую размерность, чем в области $\overline{G}$. Тогда с помощью стандартизирующей весовой функции $\widetilde{\Psi}_m$ все названные измерения, в том числе локальные, сводятся к соотношению

$$y_m(t)=\int_{\overline{G}}\widetilde{\Psi}_m(z)\cdot w(z,t)\,dz,\ \ m=\overline{1,M}, \tag{6}$$

где единообразно представлены все измерения, осуществляемые различными способами. Например, для локального измерения в точке z_m имеем $\widetilde{\Psi}_m(z)=\delta(z-z_m)$.

Входные воздействия. Аналогичный подход можно использовать и для внешних воздействий на систему, которые могут быть объемными, граничными или локальными как на границе, так и внутри области, в том числе на локальных многообразиях. С помощью стандартизирующей функции $\widetilde{f}_r(z,t)$ все они могут быть приведены к единому представлению, включая начальные и краевые условия, а также другие входные воздействия. Если число таких независимых входов R, то с использованием стандартизирующих функций $\widetilde{f}(z,t)$ в (4) будет иметь вид

$$\widetilde{f}(z,t)=\sum_{r=1}^{R}u_r(t)\cdot\widetilde{f}_r(z), \tag{7}$$

где $u_r(t)$ — внешнее сосредоточенное воздействие на каждом отдельном входе.

В результате для распределенных систем с конечным числом входов и выходов, определяемых с помощью (6) и (7), можно перейти к соотношениям вход–выход, которые следует рассматривать как класс моделей наблюдаемых систем общего вида:

$$y_m(t)=\sum_{r=1}^{R}\int_{t_0}^{t}h_{mr}(t,\tau)u_r(\tau)\,d\tau,\ \ m=\overline{1,M}, \tag{8}$$

где $h_{mr}(t,\tau)=\int\limits_{\overline{G}}\widetilde{\Psi}_m(z)\,dz\int\limits_{\overline{G}}h(z,\zeta,t,\tau)\cdot\widetilde{f}_r(\zeta)\,d\zeta$.

Если в (8) использовать векторно-матричную форму, то получим

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}H(t,\tau)u(\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

где $y(t)$ — вектор выхода размерности M; $u(\tau)$ — вектор входа размерности R; $H(t,\tau)$ — матрица, элементами которой являются функции $h_{mr}(t,\tau)$. В общем случае они являются трансцендентными или иррациональными функциями.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ СООТНОШЕНИЙ ВХОД–ВЫХОД

Полученное представление (8) позволяет по данным измерений, осуществляемых согласно (6), и входных воздействий, определяемых (7), находить неизвестные объемное воздействие f, начальное условие w_0, граничное условие f_Γ. Более того, не исключается возможность находить по данным измерений и сосредоточенных воздействий их любые комбинации.

Рассмотрим вначале задачу восстановления распределения воздействия по объему или границе (граничное управление) при известных измерениях и внешних сосредоточенных возбуждениях системы, т.е. определение функции $\widetilde{f}_r(z)$ в (7) по $u_r(t)$, $r=\overline{1,R}$, $y_m(t)$, $m=\overline{1,M}$. Для этого рассмотрим множество всех интегрируемых ограниченных функций положения с областью определения $\overline{G}$. Пусть $\{\varphi_1(z),\varphi_2(z),\dots\}$ — некоторая полная (ортонормированная) система линейно независимых функций на этом множестве. Тогда каждую неизвестную функцию $\widetilde{f}_r$, входящую в (7), представим разложением

$$\widetilde{f}_r=\sum_{j=1}^{\infty}b_{rj}\varphi_j(z),\ \ j=\overline{1,R_1},\ \ R_1\le R. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), получаем

$$\sum_{r=1}^{R_1}\sum_{j=1}^{N_r}h_{mrj}(t)\cdot b_{rj}=y_m^*(t),\ \ m=\overline{1,M}, \tag{11}$$

где

$$h_{mrj}(t) = \int_{t_0}^{t} u_r(\tau)d\tau \int_{\overline{G}}\int_{\overline{G}} h(z, \zeta, t, \tau)\widetilde{\Psi}_m(z)\varphi_j(\zeta)\,dzd\zeta,$$

$$y_m^*(t) = y_m(t) - \sum_{r=R_1+1}^{R} \int_{t_0}^{t} h_{mr}(t, \tau)\cdot u_r(\tau)d\tau.$$

Правая часть уравнения (11) кроме измеренного выхода содержит все известные распределения входного воздействия как граничного, так и объемного. Из уравнения (11) можно найти коэффициенты разложения b_{rj} соответствующей задачи интерпретации. Для этого введем в рассмотрение функционал

$$J_0(b) = \sum_{m=1}^{M} \int_{t_0}^{T} \langle h_m(t)b - y_m(t), h_m(t)b - y_m(t)\rangle\,dt, \tag{12}$$

где b — вектор размерности $\sum_{r=1}^{R_1} N_r$, компонентами которого являются b_{rj}, а h_m, $m = \overline{1, M}$, — семейство векторов той же размерности с соответствующими компонентами h_{mrj}. Выражение (12) запишем в векторно-матричной форме:

$$J_0(b) = \int_{t_0}^{T} \langle H_f(t)b - y(t), H_f(t)b - y(t)\rangle\,dt, \tag{13}$$

где H_f — матрица, в которой векторы $h_m(t)$ являются строками. Тогда необходимое и достаточное условие существования минимума этого функционала сводится к известному уравнению Эйлера в виде следующего квадратного уравнения:

$$\overline{H}b = \overline{y}, \tag{14}$$

где $\overline{H} = \int_{t_0}^{T} H_f^{\mathrm{T}}(t)H_f(t)\,dt$, $\overline{y} = \int_{t_0}^{T} H_f^{\mathrm{T}}(t)y(t)dt$, Т — операция транспонирования матрицы, а интегрирование осуществляется поэлементно как для матрицы, так и вектора.

В такой постановке задача (14) разрешима, если $N_\Sigma = \sum_{r=1}^{R_1} N_r \le M$. При этом невязка выполнения (11) во всех точках t интервала $[0, T]$ может оказаться неприемлемой в силу плохой аппроксимации $\widetilde{f}_r$ усеченным рядом, т.е. при малых N_r. Чтобы задача была разрешимой при больших значениях N_r ($r = \overline{1, R_1}$), изменим ее постановку. Для этого на интервале $[0, T]$ выберем N_T точек и функционал (12) заменим функционалом

$$J_1 = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{N_T} \int_{t_0}^{t_j} \langle h_m(t)b - y_m(t), h_m(t)b - y_m(t)\rangle\,dt. \tag{15}$$

Здесь целесообразно принять $t_{N_T} = T$. Уравнения Эйлера для (15) в итоге примут вид (14). При $N_\Sigma < N_T \cdot M$ имеем переопределенную систему, для решения которой можно применить обычный или обобщенный метод наименьших квадратов (МНК). Увеличивая N_T, можно задать большее число членов разложения (10). Однако с увеличением N_Σ возрастает обусловленность матрицы $\overline{H}$. Поэтому следует находить регуляризированное решение (14), соответствующее такому значению N_Σ, при котором невязка выполнения (11) для наихудшего значения t становится близкой или равной ограничению на погрешность измерения. В этом случае N_Σ представляется параметром регуляризации [4].

Решать задачи интерпретации на основе (15) можно также в случае, когда вместо непрерывных имеем дискретные измерения, т.е. последовательность $\{y_j\} = \{y(t_j)\}$, $j = \overline{1, N_T}$. При необходимости следует находить регуляризированное решение, чтобы не допускать большой чувствительности этого решения к погрешностям исходных данных.

Описанный подход распространяется на случай, когда стандартизирующая функция $\widetilde{f}(z, t)$ кроме объемного и граничного воздействия на систему имеет неизвестное начальное состояние $w_0(z)$. Пусть $\widetilde{f}_0(z, t)$ — аддитивное слагаемое, которое соответствует сигналу от начального состояния:

$$\widetilde{f}_0(z, t) = \delta(t - t_0) \cdot w_0(z) = \delta(t - t_0) \sum_{j=1}^{\infty} b_{0j} \varphi_j(z), \tag{16}$$

где b_{0j} — коэффициенты разложения $w_0(z)$ по базисным функциям.

Подставив (16) в (8), получим

$$y_m^*(t) = \sum_{j=1}^{N_0} h_{mj}(t, t_0) \cdot b_{0j}, \tag{17}$$

где N_0 определяет конечномерную аппроксимацию w_0;

$$y_m^{**}(t) = y_m(t) - \sum_{j=1}^{R} \int_{t_0}^{t} h_{mr}(t, \tau) \cdot u_r(\tau) d\tau;$$

$$h_{mj}(t, t_0) = \int_{\overline{G}} \int_{\overline{G}} h(z, \zeta, t, t_0) \widetilde{\Psi}_m(z) \varphi_j(\zeta)\, dz d\zeta.$$

Система линейных уравнений (17) аналогична системе (11) и может быть использована для нахождения b_{0j}. Для этого в зависимости от N_0 формируется функционал (12) или (15) и устанавливаются необходимое и достаточное условия оптимальности, которые как и в предыдущих случаях примут вид (14). При решении (14) следует использовать указанную итеративную схему, чтобы получить согласованную с погрешностью данных аппроксимацию начального распределения $w_0(z)$.

Рассмотрим теперь общий случай, когда неизвестными являются $\widetilde{f}(z, t)$, $\Psi_m(z)$ и начальное состояние $w_0(z)$. Для этого воспользуемся разложениями (10) для $\widetilde{f}_r$ и (16) для w_0 и по аналогии с ними зададим

$$\widetilde{\Psi}_m(z) = \sum_{j=1}^{N_m} c_{mj} \varphi_j(z). \tag{18}$$

При этом функцию Грина, которая является локальной математической моделью исследуемой системы, считаем известной. Кроме того, предполагаем стационарность линейной системы, т.е. все параметры модели не зависят от времени. В этом случае функцию Грина запишем как $h(t - \tau, z, \zeta)$. Подставляя (10), (17), (18) в (8), получаем следующие уравнения:

$$y_m(t) = \sum h_{mj}(t - t_0) b_{0j} + \sum_{r=1}^{R} \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_m} f_{mrij} h_{ji}(t - \tau) u_r(\tau) d\tau, \ m = \overline{1, M}, \tag{19}$$

где параметр $h_{mj}(t-t_0)$ приведен в (17), $f_{mrij}=c_{mj}b_{ri}$,

$$h_{ji}(t-\tau)=\int\limits_{\overline{G}}\varphi_j(z)\,dz\int\limits_{\overline{G}}h(t-\tau,\,z,\,\zeta)\varphi_i(\zeta)d\zeta.$$

По известной локальной модели и определенном числе измерений с использованием уравнения (19) можно найти коэффициенты b_{0j} и f_{mrij}. Следует заметить, что параметры f_{mrij} являются инвариантами системы. Это означает, что существует множество реализаций коэффициентов c_{mj} и b_{ri}, удовлетворяющих (19). Некоторые из этих коэффициентов могут задаваться произвольно, например c_{mj}; тогда другие определяются однозначно, в данном случае это b_{ri}. Однако при известных распределениях $\widetilde{\Psi}_m(z)$ или $\widetilde{f}(z)$ такая неединственность исчезает.

Из (19) как частные можно получить все рассмотренные ранее случаи. Более того, с использованием (19) можно решить и другие задачи интерпретации. В частности, при известных $h(t-\tau,\,z,\,\zeta)$, $w_0(z)$, $\widetilde{f}(z)$, $\widetilde{\Psi}_m(z)$ или разложений этих величин при определенных условиях можно найти априори неизвестные входные воздействия $u_r(\tau)$. Уравнения (8) или (19) в этом случае преобразуются в уравнения Фредгольма 1-го рода относительно $u_r(\tau)$, которые в векторно-матричной форме имеют вид (9) с $H=H(t-\tau)$ и $y^*(t)$. Функция $y^*(t)$ кроме измеряемых компонент содержит зависимость от начальных условий. В преобразованном по Лапласу виде получаем соответствующую соотношению (8) систему алгебраических уравнений

$$y^*(p)=H(p)\cdot u(p). \tag{20}$$

Можно утверждать, что (20) имеет единственное решение при $M>>R$. В переопределенном случае для его нахождения следует использовать обычный или обобщенный МНК [5]. Такая задача, как правило, является некорректно поставленной. Поэтому в общем случае следует находить обобщенное приближенное решение с использованием известных методов регуляризации [4]. При любом способе дискретизации соотношения (8) задача интерпретации входного воздействия на систему сводится к системе линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей.

Уравнения (19) можно рассматривать как исходные для решения более сложной задачи интерпретации. В них не конкретизируется вид функций Грина, и поэтому (19) представляется как класс динамических моделей, описывающих сложные процессы разнообразных по своей физической природе систем. Их пространственная распределенность прежде всего проявляется в особенностях самой функции Грина $h(\cdot,\cdot,\cdot)$ и ее интегральных представлений h_{mj}, h_{ji}. Описание (19) как частный случай включает в том числе системы с сосредоточенными параметрами. Для них в большинстве случаев h_{mj} и h_{ji} являются импульсными переходными функциями, которые в преобразованном по Лапласу виде являются дробно-рациональными функциями. В распределенных системах преобразованные по Лапласу функции h_{mj} и h_{ji}, как правило, являются иррациональными или трансцендентными. Если начальное состояние системы в момент t_0 было нулевым, то в (19) отсутствует первое слагаемое и эту систему можно записать в матричном виде, где элементами импульсной матрицы отклика H на произвольное входное воздействие являются функции h_{ji}. Тогда оператор Ганкеля запишем в виде

$$(\Gamma u)(t)=\int\limits_0^\infty H(t+\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $u(\tau)$ — вектор входных воздействий. Для большинства реальных систем оператор Γ является компактным, осуществляющим отображение из одних векторных пространств в другие. При этом оператор $\Gamma^* \Gamma$, где Γ^* сопряженный к Γ оператор, также является компактным и самосопряженным положительным в L_2, т.е. имеет счетное множество положительных собственных значений $\delta_1^2 \geq \delta_2^2 \geq \ldots \geq \delta_j^2 \geq \ldots \geq 0$, $\sigma_i \geq 0$, которые называются сингулярными числами оператора [6–8].

Определение 1. Бесконечномерная линейная система относится к классу ядерного типа, если она определяется ограниченным ганкелевым оператором Γ, сингулярные числа которого удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j < \infty$.

Для удовлетворения этому условию сингулярные числа не должны иметь никаких точек сгущения, кроме нуля, т.е. последовательность сингулярных чисел сходится к нулю. Это условие не является достаточно жестким и многие реальные системы ему удовлетворяют. Для систем ядерного типа класс моделей (19) хорошо аппроксимируется конечномерными моделями вида

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + B_n u, \quad y = C_n x, \tag{21}$$

где x — вектор размерности n, который соответствует внутренним переменным. Для операторов ядерного типа для различных норм в [8] доказаны теоремы сходимости к точному описанию при соответствующем выборе матриц A_n, B_n, C_n. Таким образом, системы ядерного типа, представляемые классом моделей (19), можно аппроксимировать конечномерным классом моделей (21), которые будут сходиться к точному описанию при $n \to \infty$. При неточных исходных данных существуют приближенные модели в классе (21), которые согласуются по точности с погрешностью исходных данных. Это означает, что размерность n усеченной модели по отношению к бесконечномерному точному описанию можно выбрать такой, что на любое допустимое входное воздействие отличие откликов модели от реальной системы будет оставаться в пределах допустимой погрешности. Тогда при стремлении к нулю погрешности и $n \to \infty$ описание (21) эквивалентно (19). В результате динамические характеристики модели (21) в силу этой эквивалентности хорошо аппроксимируют соответствующие свойства исходной системы, определяемые импульсными переходными функциями h_{ji}.

Установить динамические характеристики системы можно по экспериментальным данным $y(t)$ и $u(t)$ на основании решения задачи структурно-параметрической идентификации в классе моделей (21). Наиболее подходящим для идентификации системы в этом классе моделей является метод выделяемого подпространства, известный в литературе как Subspace method или 4SID-метод [9, 10]. С его помощью можно найти матрицы A_n, B_n и C_n, а собственные значения усеченной матрицы A_n определяют динамические характеристики системы. При неточных данных (и особенно при дискретных измерениях) вместо (21) можно использовать их дискретный аналог

$$x_{k+1} = \overline{A}_n x_k + \overline{B}_n u_k, \quad y_k = \overline{C}_n x_k. \tag{22}$$

Задача идентификации в классе моделей (22) решается стандартными 4SID-методами, описанными, например, в работе [11], а также в ссылках к ней. Кроме того, имеются Toolboxes в среде Mathlab, которыми можно воспользоваться при решении конкретных задач. Особым вопросом является выбор размерности аппроксимирующей модели. Разные методы ее определения описаны в [12], где предложены регуляризирующие процедуры, в которых параметром регуляризации является размерность модели.

Относительно аппроксимирующих моделей (21), (22) важно отметить, что определение матриц A_n, B_n и C_n или $\overline{A}_n$, $\overline{B}_n$ и $\overline{C}_n$ через идентификацию обеспечивает сходимость к точному описанию при $n \to \infty$, и в отличие от определения их по формулам, приведенным в [8], алгоритмы идентификации дают наилучшую аппроксимацию выходных переменных с помощью усеченных моделей. Поэтому из сходимости, определяемой свойствами оператора Ганкеля, следует, что наилучшая аппроксимация для каждого конечного n гарантировано будет сходиться к точному описанию при $n \to \infty$ по крайней мере по тем нормам, для которых сходимость доказана в работе [8].

В рассматриваемой задаче интерпретации одним из важных является вопрос соотнесения конечномерного спектра усеченной модели, полученной методами идентификации, и реальной системы, генерирующей исходные данные. Как показали результаты моделирования, каждому собственному значению усеченной модели ставился в соответствие целый кластер близлежащих собственных значений системы. При этом возможно пересечение кластеров. С увеличением n число кластеров возрастает, а их размеры уменьшаются настолько, что в пределе они обращаются в точки спектра исходной системы. Именно в этом состоит интерпретация динамических свойств исследуемой системы с помощью приближенных моделей, идентифицируемых в классе (21) или (22).

Интерпретация пространственного распределения полей при априори неизвестных функциях Грина существенно усложняется, поскольку знания только динамической модели системы для этого недостаточно, однако в некоторых случаях на основе (5) и (7) можно найти такие оценки.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДАННЫХ НА УСЕЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ И ПО НЕЗАМКНУТЫМ МОДЕЛЯМ

Одним из препятствий для использования в задачах интерпретации модельного описания (8) являются проблемы, связанные с нахождением функций Грина. Наибольшие трудности возникают для сложных областей, особенно если они не имеют выраженных границ. Например, в околоземном пространстве исследуются разные по физическим свойствам процессы, протекающие в таких областях как атмосфера, ионосфера, магнитосфера или с более сложным разбиением на соответствующие сферы. Выраженных четких границ между этими областями не существует. Можно говорить только о некоторых переходных зонах, их разделяющих. В ряде случаев некоторой компенсацией данной проблемы может быть наличие большого числа измеряемых параметров изучаемой системы. Тогда искусственно можно так изменить постановку задачи, чтобы избежать указанных трудностей. Один из таких способов состоит в упрощении области исследуемых процессов, сведя ее к такой, где функция Грина известна или ее можно найти существующими методами. Пусть имеем область G, где протекают исследуемые процессы, которая достаточно сложна для нахождения в ней функции Грина. Рассмотрим подобласть G_0, которая полностью содержится в G, но имеет более простую геометрию. Простыми будем считать области, в которых можно выбрать такую ортогональную систему координат, в которой границы G_0 совпадают с координатными поверхностями. Наиболее распространенными являются прямоугольные, цилиндрические и сферические системы координат. Именно для них в [2] представлено около 500 функций Грина различных задач, включая типовые задачи математической физики. Если среди них не оказалось подходящих, то можно на основе специальных функций, подходящих для G_0, формировать линейно независимую ортогональную систему базисных функций $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ и находить функции Грина задачи (4) в виде разложений по этому базису. Наиболее простой будет первая краевая задача (задача Дирихле) с неизвестной функцией f_Γ. Наличие других неизвестных функций, входящих в стандартизирующую функцию $\overline{f}$, усложнит нахождение функции Грина. В любом случае после определения функции Грина задача интерпретации сводится к одной из рассмотренных в предыдущем разделе статьи.

Математическая интерпретация данных возможна также на основе незамкнутых уравнений модели. Это осуществимо, когда физические закономерности позволяют хорошо описать некоторые процессы, а уравнения связи их с остальными параметрами системы плохо формализуются в силу разных причин. Тогда недостающие знания об объекте можно попытаться компенсировать данными, получаемыми при измерении. Именно это является вторым способом, рассматриваемым в рамках настоящей работы. Продемонстрируем его на конкретном примере восстановления магнитного поля в околоземном пространстве по данным спутниковых измерений, полученных с помощью магнитных датчиков и реализуемых, например, в блочном виде трех зондов с ортогональными осями. В этой задаче будут использованы оба упомянутых здесь метода. Магнитное поле достаточно хорошо описывается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}, \ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{23}$$

где $\vec{B}$ — вектор индукции магнитного поля, $\vec{J}$ — вектор распределения тока в проводящих областях, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. Если распределение тока известно, то из (23) однозначно определяется магнитная индукция. Когда $\vec{J}$ априори неизвестно, то (23) является незамкнутой системой уравнений. Чтобы ее замкнуть, необходимо уравнение (23) дополнить уравнениями, описывающими электрическое поле и его связь с протекающим током в виде уравнения материальной токопроводящей среды. Применительно к литосфере, магнитосфере и ионосфере такой подход представляет трудноразрешимую задачу. Поэтому будем использовать незамкнутую модель с априори неизвестным распределением вектора $\vec{J}$. Согласно закону Био–Савара из (23) вытекает

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{G_1} \frac{1}{R^3} \vec{J}(\vec{r}_1) \times (r - \vec{r}_1) dg_1, \tag{24}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки магнитного поля; $\vec{r}_1$ задает точки с соответствующим значением в них тока $\vec{J}$; G_1 — токовая область с объемным элементом dg_1; $R = |\vec{r} - \vec{r}_1|$. Фактически (24) соответствует (5) с аналитическим представлением функции единичного источника тока.

Для околоземного пространства с магнитными измерениями наиболее подходящей является сферическая система координат (ρ, θ, φ). Тогда область G_0 считаем непроводящей областью с достаточным количеством измерений магнитного поля в ней. Нижней границей $\rho = \rho_1$ является координатная поверхность, наиболее близкая к литосфере, а верхняя граница $\rho = \rho_2$ будет наиболее близка к токопроводящей области ионосферы или магнитосферы. Ставим задачу: найти такие фиктивные поверхностные токи на $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$, которые в области G_0 создают магнитное поле, совпадающее с измеряемым в соответствующих точках [13].

В сферических координатах с поверхностными токами J_{θ_i}, J_{φ_i}, $i = 1, 2$, уравнение (24) примет вид

$$B_\rho = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s_i} (l_{\rho_i} J_{\theta_i} + m_{\rho_i} J_{\varphi_i}) ds_i, \ B_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s_i} (l_{\theta_i} J_{\theta_i} + m_{\theta_i} J_{\varphi_i}) ds_i, \tag{25}$$

$$B_{\varphi} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s_i} (l_{\varphi_i} J_{\theta_i} + m_{\varphi_i} J_{\varphi_i}) ds_i, \ \ i = 1, 2,$$

где

$$l_{\rho_i} = -\rho(\sin\theta \cdot \sin(\varphi - \varphi_i) - \cos\theta \cdot \sin\theta_i) / R_i^3,$$

$$m_{\rho_i} = \rho_i (\sin\theta \cdot \cos\theta_i \cdot \cos(\varphi - \varphi_i) - \cos\theta \cdot \sin\theta_i) / R_i^3,$$

$$l_{\theta_i} = (\rho\cos\theta_i - \rho_i \cos\theta) \sin(\varphi - \varphi_i) / R_i^3,$$

$$l_{\varphi_i} = (\rho(\sin\theta \cdot \sin\theta_i + \cos\theta \cdot \cos\theta_i \cdot \cos(\varphi - \varphi_i)) - \rho_i \cos(\varphi - \varphi_i)) / R_i^3,$$

$$m_{\varphi_i} = (\rho\cos\theta \cdot \sin(\varphi - \varphi_i) - \rho_i \cos\theta_i \cdot \sin(\varphi - \varphi_i)) / R_i^3,$$

$$R_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2}.$$

Связь сферической системы координат с декартовой, которая была использована при переходе от (24) к (25), приведена в [14], где также представлено выражение для элемента площади ds_i. Интегрирование в (25) проводится по координатным поверхностям $\rho = \rho_i$, $i = 1, 2$.

Поверхностные токи, входящие в (25), представим в виде усеченных разложений с использованием полиномов Лежандра и гармонических функций, которые запишем в виде

$$J_{\theta_i} = \sum_{m=0}^{m_{\max}^i} \sum_{k=0}^{m} P_m^k(\cos\theta_i)[A_m^k \cos(k\varphi_i) + B_m^k \sin(k\varphi_i)],$$

$$J_{\varphi_i} = \sum_{m=0}^{m_{\max}^i} \sum_{k=0}^{m} P_m^k(\cos\theta_i)[C_m^k \cos(k\varphi_i) + D_m^k \sin(k\varphi_i)], \qquad (26)$$

где $P_m^k(\cos\theta_i)$ — полиномы Лежандра.

Подставляя (26) в (25) и выполняя интегрирование для значений $(\rho_j, \theta_j, \varphi_j)$, т.е. для координат, в которых находились магнитные зонды в момент измерения, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения $A_m^k, B_m^k, C_m^k, D_m^k$. Она может быть представлена в виде (14), где вектор $\bar{y}$ состоит из измеренных значений B_{r_j}, B_{θ_j}, B_{φ_j}, $j = \overline{1, N}$, вектор b сформирован из $A_m^k, B_m^k, C_m^k, D_m^k$ согласно (25) для соответствующих измерений и с учетом (26), а элементы матрицы H получены интегрированием выражений при соответствующих коэффициентах $A_m^k, B_m^k, C_m^k, D_m^k$. При нахождении решения полученной таким образом системы уравнений необходимо выбирать размерность $m_{\max}^i$ так, чтобы обеспечивалась корректность поставленной задачи. Здесь следует использовать процедуры регуляризации, основанные, например, на SVD-разложении матрицы H [12].

После получения регуляризированного решения можно по формулам (25) при известных поверхностных токах восстановить магнитное поле во всей области G_0, а также в некоторых других частях за ее пределами.

Аналогичная задача магнитной диагностики плазмы в токамаках была рассмотрена в [15]. По данным магнитных измерений в вакуумной области восстанавливалась магнитная конфигурация, обеспечивающая равновесие плазмы в токамаке.

Подход, рассматриваемый в данном разделе и связанный с использованием приближенного модельного описания для интерпретации гравитационного потенциала небесных тел, широко применяется в задачах гравиметрии и, в частности, для восстановления гравитационного поля Земли [16].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментальные исследования сложных систем различной природы являются одним из наиболее эффективных методов приобретения новых знаний. Обычно при этом используются математические модели, которые предположительно соответствуют исследуемым объектам. Рассматриваемые возможные математические модели требуют верификации или адекватности их полученным в экспериментах данным. Существует множество подходов к усвоению или ассимиляции данных в математическую модель, позволяющих заключать об их адекватности исследуемым объектам.

В настоящей статье для определенного класса систем предложены универсальный подход и теоретические основы, позволяющие не только устанавливать адекватность моделей, но и адаптировать их к имеющимся данным, давая им приближенную интерпретацию в полном соответствии с их количеством и качеством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губарев В.Ф. Проблема математической интерпретации данных. I. Системы с сосредоточенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. Т. 55, № 2. С. 59–72.
2. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1979. 224 с.
3. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. Москва: Наука, 1976. 424 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 285 с.
5. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Москва: Мир, 1999. 548 с.
6. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Москва: Наука, 1965. 448 с.
7. Губарев В.Ф. Рациональная аппроксимация систем с распределенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 2. С. 99–116.
8. Glower K., Curtain R.F., Partington J.R. Realization and approximation of linear infinite-dimensional systems with error bounds. *SIAM J. Control and Optimization*. 1988. Vol. 26, N 4. P. 863–898.
9. Verhaegen M., Dewilde P. Subspace model identification. Part 1: The output-error state space model identification class of algorithms. *International Journal of Control.* 1992. Vol. 56, N 5. P. 1187–1210.
10. Van Overschee P., De Moor B. Subspace identification for linear systems. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. 254 p.
11. Viberg M. Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems. *Automatica*. 1995. Vol. 31, N 12. P. 1835–1851.
12. Губарев В.Ф., Романенко В.Д., Милявский Ю.Л. Методы нахождения регуляризированного решения при идентификации линейных многомерных многосвязных дискретных систем. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. Т. 55, № 6. С. 3–16.
13. Peddie N.W. Current loop models of the Earth’s magnetic field. *Journal Geophys. Res.* 1979. Vol. 84. P. 4517–4523.
14. Борисенко А.И., Таранов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Москва: Высш. шк., 1963. 263 с.
15. Губарев В.Ф. Оценивание токов замещения в окружении и плазме установок токамак. *Проблемы управления и информатики.* 1995. № 4. С. 74–80.
16. Непоклонов В.Б., Лидовская Е.А., Капранов Ю.С. Оценка качества моделей гравитационного поля Земли. *Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка*. 2014. № 2. С. 24–32.

Надійшла до редакції 27.05.2019

В.Ф. Губарев

ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ДАНИХ. II. СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Анотація. Розглянуто проблему математичної інтерпретації експериментальних даних у системах з розподіленими параметрами з використанням моделі, яку вважають адекватною досліджуваним об'єктам. Для лінійних систем на базі функцій Гріна розроблено теоретичні основи, що дають змогу здійснювати постановку різноманітних обернених задач, до яких зводиться проблема інтерпретації. Рекомендовано і описано процедури регуляризації, що уможливлюють пошук наближених розв'язків, узгоджених за точністю з похибками даних. Важливе значення має представлення класу моделей у вигляді розвинень, що асимптотично наближуються до точного опису. Наведено конструктивні алгоритми розв'язання задач інтерпретації.

Ключові слова: задачі інтерпретації, асиміляція даних, обернені задачі, розподілені системи, регуляризація, ідентифікація, асимптотичні моделі.

V.F. Gubarev

PROBLEM OF MATHEMATICAL DATA INTERPRETATION. II. DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

Abstract. The problem of mathematical interpretation of experimental data is considered for distributed parameter system with the use of models supposed to be adequate to the objects under study. For linear systems, on the basis of Green functions, theoretical foundations are developed, which allow setting different inverse problems associated with the interpretation problem. Many of them are treated as ill-posed. So, regularized procedures that make it possible to find approximate solutiond consistent with errors in available data are recommended and described. In this connection, representation of the model class in the form of expansions that asymptotically approach the exact description is important. Constructive algorithms to solve interpretation problem are given.

Keywords: interpretation problem, assimilation data, inverse problems, distributed systems, regularization, identification, asymptotic models.

Губарев Вячеслав Федорович,
чл.-кор. НАН Украины, доктор техн. наук, заведующий отделом Института космических исследований НАН Украины и ГКА Украины, Киев, e-mail: v.f.gubarev@gmail.com.