КІБЕРНЕТИКА

О.І. ПРОВОТАР, О.О. ПРОВОТАР

УДК 681.3

НЕЧІТКІ ЙМОВІРНОСТІ НЕЧІТКИХ ПОДІЙ

Анотація. Запропоновано підхід до знаходження ймовірнісних характеристик нечітких подій. Ймовірності описано нечіткими трикутними числами, які можуть задовольняти тим чи іншим умовам. Розглянуто приклади обчислення нечітких ймовірностей нечітких подій.

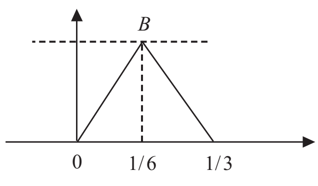
Ключові слова: нечіткі множини, нечіткі трикутні числа, ймовірність нечіткої події, нечітка ймовірність нечіткої події.

ВСТУП

Теоретико-ймовірнісні методи широко і успішно використовують в наукових дослідженнях для моделювання в термінах випадковості багатьох аспектів невизначеності. Разом з тим такі методи виявилися не досить ефективними для моделювання складних фізичних, соціальних і економічних систем, деякі елементи яких можна описати тільки за допомогою поняття невизначеності. Цим пояснено підвищений інтерес до проблематики, яка охоплює такі напрямки штучного інтелекту, як теорія ймовірностей нечітких подій, теорія нечітких ймовірностей та гібридна теорія нечітких ймовірностей нечітких подій. Викликано це насамперед тим, що значна частина сучасних інтелектуальних систем використовує нечіткі моделі подання знань (наприклад, нечіткі моделі логічного виведення), які потребують додаткових досліджень надійності, достовірності та ймовірнісних характеристик для розв'язання практичних задач [1, 2].

НЕЧІТКІ ЧИСЛА

У цій статті запропоновано та обґрунтовано підхід до знаходження ймовірнісних характеристик нечітких подій, які ототожнюються з нечіткими множинами [3, 4] у відповідних просторах. Уперше деякі класичні задачі теорії ймовірностей формулюють в нечітких постановках з подальшим їхнім розв'язанням. Ймовірності визначають нечіткими трикутними числами (які можуть задовольняти тим або іншим умовам). Наприклад, ймовірність випадіння числа 1 під час підкидання кубика може бути визначена нечітким числом B з діаграмою Заде у вигляді [3, 4]



У теорії нечітких множин [3–5] виділяють нечіткі множини, які визначаються на осі дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, є нормальними, опуклими та мають на множині дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ неперервні функції належності. Інакше кажучи, нечітким числом називають нечітку множину A, функція належності якої

$$\mu : \boldsymbol{R} \to [0,1]$$

задовольняє умови:

1) $\sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}} \mu_A(x) = 1$, тобто нечітка множина є нормалізованою;
2) $\mu[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}$, тобто множина A є опуклою;
3) $\mu(x)$ є неперервною функцією.

Основні арифметичні операції — додавання, віднімання, множення і ділення двох нечітких чисел A_1, $A_2 \subseteq \boldsymbol{R}$ задають за допомогою принципу розширення [3].

Суму двох нечітких чисел A_1 і A_2 позначають $A_1 \oplus A_2$, причому функцію належності суми задають виразом

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1 + x_2 = y} \min(\mu_{A_1}(x_1),\ \mu_{A_2}(x_2)).$$

Різницю двох нечітких чисел A_1 і A_2 позначають $A \ominus B$, при цьому функцію належності різниці задають виразом

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1 - x_2 = y} \min(\mu_{A_1}(x_1),\ \mu_{A_2}(x_2)).$$

Добуток двох нечітких чисел A_1 і A_2 позначають $A_1 \otimes A_2$, при цьому функцію належності добутку задають виразом

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1 x_2 = y} \min(\mu_{A_1}(x_1),\ \mu_{A_2}(x_2)).$$

Частку двох нечітких чисел A_1 і A_2 позначають $A_1 : A_2$, при цьому функцію належності частки задають виразом

$$\mu_B(y) = \sup_{x_1 / x_2 = y} \min(\mu_{A_1}(x_1),\ \mu_{A_2}(x_2)).$$

Арифметичні операції над нечіткими числами вимагають досить складних обчислень. Справедлива теорема.

Теорема 1. Множина нечітких чисел є замкненою відносно арифметичних операцій.

Дюбуа і Прейд запропонували деяку форму подання нечітких чисел за допомогою трьох параметрів [3], що значно спрощує нечітку арифметику.

Нехай L, P: $(\infty, \infty) \to [0, 1]$ — функції, що задовольняють умови: $L(-x) = L(x)$, $P(-x) = P(x)$; $L(0) = 1$, $P(0) = 1$; L і P — функції, які не зростають на інтервалі $[0, \infty)$.

Означення 1. Нечітке число $A \subseteq \boldsymbol{R}$ буде нечітким числом типу $L - P$ тоді і тільки тоді, коли його функція належності має вигляд

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & \text{якщо } x \leq m, \\ P\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & \text{якщо } x \geq m, \end{cases}$$

де m — дійсне число, яке називають середнім значенням нечіткого числа A $(\mu(m) = 1)$; α — додатне дійсне число, яке називають лівостороннім розподілом; β — додатне дійсне число, яке називають правостороннім розподілом.

НЕЧІТКІ ТРИКУТНІ ЧИСЛА

Розглянемо функції

$$L(x)=\begin{cases}x+1,\ x\le 0,\\1-x,\ x\ge 0,\end{cases}\quad P(x)=\begin{cases}x+1,\ x\le 0,\\1-x,\ x\ge 0,\end{cases}$$

які задовольняють наведені вище умови. Тому, наприклад, функцію належності нечіткого числа A

$$\mu_A(x)=\begin{cases}x+1,\ x\le 0,\\1-x,\ x\ge 0,\end{cases}$$

можна подати у вигляді

$$\mu_A(x)=\begin{cases}L(x),\ x\le 0\\P(x),\ x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}L(-x),\ x\le 0,\\P(x),\ x\ge 0.\end{cases}$$

Таке нечітке число є нечітким числом типу $L-P$ і скорочено можна записати у вигляді

$$A=(0,\ 1,\ 1)_{LP}.$$

У загальному випадку нечітке число A з функцією належності, яка визначається через наведені вище функції $L(x)$ та $P(x)$, можна записати у вигляді

$$A=(m,\ \alpha,\ \beta)_{LP}.$$

Деякі операції над нечіткими числами типу $L-P$ зводяться до операції над трьома параметрами. Зокрема, сума нечітких чисел

$$A=(m_A,\ \alpha_A,\ \beta_A)_{LP}\ \text{ і }\ B=(m_B,\ \alpha_B,\ \beta_B)_{LP}$$

має вигляд

$$A\oplus B=(m_A+m_B,\ \alpha_A+\alpha_B,\ \beta_A+\beta_B)_{LP}.$$

Число, протилежне до нечіткого числа

$$A=(m_A,\ \alpha_A,\ \beta_A)_{LP},$$

має вигляд

$$-A=(-m_A,\ \alpha_A,\ \beta_A)_{LP}.$$

Далі будемо використовувати дещо іншу форму подання нечітких трикутних чисел за допомогою трьох параметрів [6]. Нечітке число $A=(a_1,a_2,a_3)$ у цьому випадку визначають функцією належності

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0,\ x< a_1,\\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1},\ a_1\le x\le a_2,\\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2},\ a_2\le x\le a_3,\\ 0,\ x>a_3.\end{cases}$$

Операції додавання і віднімання нечітких чисел $A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ і $B=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ визначають як

$$A+B=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,a_3+b_3),$$

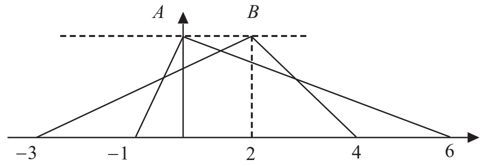
$$A-B=(a_1-b_3,a_2-b_2,a_3-b_1).$$

Число, протилежне до нечіткого числа $A=(a_1, a_2, a_3)$, визначають як $-A=(-a_3, -a_2, -a_1)$.

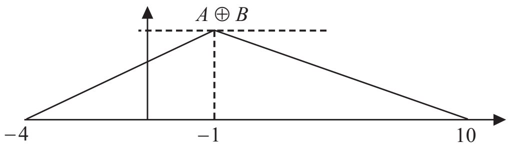
Наприклад, розглянемо нечіткі числа

$$A=(-3, 2, 4) \quad \text{і} \quad B=(-1, 0, 6)$$

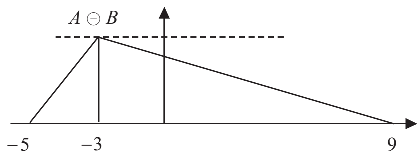
з діаграмами Заде [4]



відповідно. Тоді суму $A \oplus B$ задають діаграмою Заде у вигляді



Відповідно різниця, задана діаграмою Заде, має вигляд



Теорема 2. Нечітке трикутне число $(m, \alpha, \beta)_{LP}$ дорівнює нечіткому числу $(m-\alpha, m, m+\beta)$.

Доведення. Треба показати, що значення функцій належності цих чисел у довільній точці збігаються. Дійсно, значення функції належності $\mu_A(x)$ нечіткого числа $(m, \alpha, \beta)_{LP}$ у точці $x \le m$ дорівнює

$$\mu_A(x)=\frac{x-m}{\alpha}+1 .$$

Значення функції належності $\mu_A(x)$ нечіткого числа $(m, \alpha, \beta)_{LP}$ у точці $x \ge m$ дорівнює

$$\mu_A(x)=1-\frac{x-m}{\beta} .$$

Значення функції належності $\mu_B(x)$ нечіткого числа $(m-\alpha, m, m+\beta)$ у точці $x \le m$ знаходимо із співвідношення

$$\frac{m-m+\alpha}{1}=\frac{x-m}{\mu_B(x)-1} .$$

Після перетворень одержуємо

$$\mu_B(x)=\frac{x-m}{\alpha}+1 .$$

Аналогічно значення функції належності $\mu_B(x)$ нечіткого числа $(m-\alpha, m, m+\beta)$ у точці $x \ge m$ знаходимо із співвідношення

$$\frac{m-m-\beta}{1}=\frac{x-m}{\mu_B(x)-1} .$$

Після перетворень одержуємо

$$\mu_B(x) = 1 - \frac{x-m}{\beta}.$$

Таким чином, функції належності нечітких чисел набувають однакових значень. Отже, теорему доведено.

Наслідок 1. Протилежним до нечіткого числа $(m, \alpha, \beta)_{LP}$ типу LP є нечітке число $(-(m+\beta), -m, -(m-\alpha))$.

Наслідок 2. Для нечітких чисел

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP} \text{ і } B = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LP}$$

є справедлим співвідношенням

$$A \oplus B = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LP} =$$
$$= (m_A + m_B - \alpha_A - \alpha_B, m_A + m_B, m_A + m_B + \beta_A + \beta_B).$$

Наслідок 3. Для нечітких чисел

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP} \text{ і } B = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LP}$$

є справедлим співвідношенням

$$A \ominus B = (m_A - m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LP} =$$
$$= (m_A - \alpha_A - m_B - \beta_B, m_A - m_B, m_A + \beta_A - m_B + \alpha_B).$$

КЛАСИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ

Розглянемо основні відомі поняття та означення. Теорія ймовірностей [7] вивчає ймовірності подій — довільних підмножин простору елементарних подій.

Для того щоб визначати ймовірності подій у просторі елементарних подій $\boldsymbol{X}$, вводять поняття розподілу ймовірностей. Це числова функція $\boldsymbol{P}$, яка присвоює число $\boldsymbol{P}(A)$ елементарній події A простору $\boldsymbol{X}$. Область визначення функції $\boldsymbol{P}$ розширюється на множину $2^{\boldsymbol{X}}$, до того ж

$$0 \le \boldsymbol{P}(A) \le 1, \ \boldsymbol{P}(X) = 1.$$

Для взаємовиключних подій $A_1, A_2, \ldots$ (тобто таких, що для будь-яких $i \ne j$ виконується $A_i \cap A_j = \varnothing$)

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_i).$$

Таким чином, $\boldsymbol{P}(A)$ означає ймовірність події A, а простір елементарних подій $\boldsymbol{X}$ — це область визначення функції розподілу ймовірностей. До того ж функція розподілу ймовірностей має такі властивості:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B);$$
$$\boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(\bar{A}) = 1.$$

Ймовірність нечіткої події. Будь-яка нечітка подія представляє нечітку множину. Наприклад, подія «велике число» може бути представлена нечіткою множиною

$$B = \{(6, 0.9), (5, 0.7), (4, 0.5)\} = 0.9/6 + 0.7/5 + 0.5/4.$$

Обчислення ймовірностей таких і подібних подій запропоновано в [6]. Так, якщо A — нечітка подія в просторі $\boldsymbol{X}$ зі скінченною кількістю елементів, тобто $A=\{(x, \mu_A(x)), x \in \boldsymbol{X}\}$, то ймовірність цієї події можна обчислити за формулою

$$\boldsymbol{P}(A)=\sum_{x \in A} \mu_A(x) \boldsymbol{P}(x),$$

де $\boldsymbol{P}(x)$ — ймовірність події x.

Нечітка ймовірність нечіткої події. Коли під час підкидання кубика кажуть, що ймовірність випадіння, наприклад, числа 5 дорівнює 1/6, то це означає, що на кожні шість підкидань кубика число 5 випадає в середньому один раз. Інакше кажучи, не на кожне з шести підкидань один раз випадатиме число 5. Іноді число 5 випаде, наприклад, два або три рази, а іноді — жодного разу; але в середньому на кожні шість підкидань кубика один раз буде випадати число 5. Таким чином, якщо випадіння числа 5 назвати вдалою подією, то число вдалих подій на кожні шість підкидань кубика буде близьким до одиниці. Ймовірність вдалої події буде близькою до числа 1/6. Це означає, що ймовірність такої події можна описати нечіткою величиною [8, 9]

$$B=\{(1/6, 1), (1/3, 0.9), (1/2, 0.8), (2/3, 0.5), (5/6, 0.4)\}.$$

Загалом нехай ймовірність кожної елементарної події x простору $\boldsymbol{X}$ задається нечіткою величиною

$$B(x)=\{(y, \mu_{B(x)}(y)), y \in[0,1]\}.$$

Розглянемо нечітку подію (множину) у просторі $\boldsymbol{X}$:

$$A=\{(x, \mu_A(x)), x \in \boldsymbol{X}\}.$$

Тоді нечітку ймовірність цієї події можна обчислити за формулою

$$\boldsymbol{P}'(A)=\underset{x \in A}{\oplus}(\mu_A(x) \otimes B(x)),$$

де $\oplus$ і $\otimes$ — сума і добуток нечітких чисел (величин) відповідно.

Для прикладу додамо і перемножимо два нечітких числа, що мають вигляд

$$A_1=\{(2, 0.7), (3, 1), (4, 0.6)\}, \quad A_2=\{(3, 0.8), (4, 1), (6, 0.5)\}.$$

Відповідно до визначення одержимо

$$A_1 \oplus A_2=\{(5, \min(0.7, 0.8)), (6, \max(\min(0.7, 1), \min(1, 0.8))), (7, \max(\min(1.1),$$
$$\min(0.6, 0.8))), (8, \max(\min(0.7, 0.5), \min(0.6, 0.1))), (9, \min(1, 0.5)),$$
$$(10, \min(0.6, 0.5))\}=\{(5, 0.7), (6, 0.8), (7, 1), (8, 0.6), (9, 0.5), (10, 0.5)\};$$
$$A_1 \otimes A_2=\{(6, \min(0.7, 0.8)), (8, \min(0.7, 1)), (9, \min(1, 0.8)),$$
$$(12, \max(\min(0.7, 0.5), \min(1,1), \min(0.6, 0.8))), (16, \min(0.6,1)), (18, \min(1, 0.5)),$$
$$(24, \min(0.6, 0.5))\}=\{(6, 0.7), (8, 0.7), (9, 0.8), (12, 1), (16, 0.6), (18, 0.5), (24, 0.5)\}.$$

ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ У НЕЧІТКИХ ПОСТАНОВКАХ

1. Обчислимо нечітку ймовірність випадіння великого числа під час підкидання кубика, яке описано нечіткою величиною $A=1/6+0.8/5$ за умови, що ймовірність елементарної події описано нечіткою величиною

$$B=\left\{\left(\frac{1}{6}, 1\right), \left(\frac{1}{12}, 0.5\right), \left(\frac{1}{4}, 0.5\right)\right\}.$$

Для цього (відповідно до наведеної вище формули) обчислюємо добутки:

$$\mu_A(5)\otimes B(5)=$$

$$=\{(0.8,\ 1)\}\otimes\left\{\left(\frac{1}{6},1\right),\left(\frac{1}{12},0.5\right),\left(\frac{1}{4},0.5\right)\right\}=\left\{\left(\frac{2}{15},1\right),\left(\frac{1}{15},0.5\right),\left(\frac{1}{5},0.5\right)\right\};$$

$$\mu_A(6)\otimes B(6)=\{(1,\ 1)\}\otimes\left\{\left(\frac{1}{6},1\right),\left(\frac{1}{12},0.5\right),\left(\frac{1}{4},0.5\right)\right\}=\left\{\left(\frac{1}{6},1\right),\left(\frac{1}{12},0.5\right),\left(\frac{1}{4},0.5\right)\right\}.$$

Наступним кроком є обчислення суми:

$$\left\{\left(\frac{2}{15},1\right),\left(\frac{1}{15},0.5\right),\left(\frac{1}{5},0.5\right)\right\}\oplus\left\{\left(\frac{1}{6},1\right),\left(\frac{1}{12},0.5\right),\left(\frac{1}{4},0.5\right)\right\}=$$

$$=\left\{\left(\frac{3}{10},1\right),\left(\frac{13}{60},0.5\right),\left(\frac{23}{60},0.5\right),\left(\frac{7}{30},0.5\right),\left(\frac{3}{20},0.5\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{19}{60},0.5\right),\left(\frac{11}{30},0.5\right),\left(\frac{17}{60},0.5\right),\left(\frac{9}{20},0.5\right)\right\}.$$

Отже, нечітка ймовірність нечіткої події $A=1/6+0.8/5$ є

$$\boldsymbol{P}'(A)=\left\{\left(\frac{3}{10},1\right),\left(\frac{13}{60},0.5\right),\left(\frac{23}{60},0.5\right),\left(\frac{7}{30},0.5\right),\left(\frac{3}{20},0.5\right),\left(\frac{19}{60},0.5\right),\left(\frac{11}{30},0.5\right),\right.$$

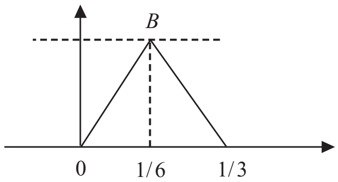
$$\left.\left(\frac{17}{60},0.5\right),\left(\frac{9}{20},0.5\right)\right\}.$$

Зазначимо, що ймовірність нечіткої події $A=1/6+0.8/5$ є

$$\boldsymbol{P}(A)=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{10}=\frac{3}{10}.$$

Таким чином, нечітку ймовірність нечіткої події A можна інтерпретувати як множину чисел, близьких до 3/10.

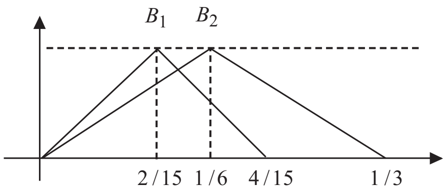
Нехай ймовірність елементарної події під час підкидання кубика задана нечітким трикутним числом B з діаграмою Заде у вигляді



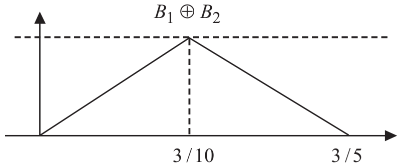
Обчислимо нечітку ймовірність випадіння великого числа під час підкидання кубика, описаного нечіткою величиною

$$A=1/6+0.8/5.$$

У результаті обчислення добутків $\mu_A(5)\otimes B(5)$ та $\mu_A(6)\otimes B(6)$ одержимо нечіткі числа B_1 та B_2 з діаграмами Заде у вигляді



Тоді сума цих чисел є нечітким числом з діаграмою Заде у вигляді



Отже, нечітку ймовірність нечіткої події A можна інтерпретувати як множину чисел, близьких до 3/10.

2. Розглянемо одну з головних схем теорії ймовірностей — схему Бернуллі. Згідно з цією схемою розглядають послідовність взаємно незалежних випробувань, в кожному з яких може настати (або не настати) деяка подія A з ймовірністю p, яка не залежить від номера випробування. Необхідно знайти ймовірність того, що в серії з n незалежних випробувань k разів настане та $n-k$ разів не настане подія A. Цю ймовірність обчислюють за формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

відомою як формула Бернуллі. Наприклад, щоб знайти ймовірність того, що в серії з чотирьох підкидань кубика у двох випадках випаде число 4, треба обчислити величину

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

Нехай під час підкидання кубика настає або не настає подія «випадіння великого числа», яке задається нечіткою множиною A = 1/6 + 0.8/5. У цьому випадку для обчислення ймовірності нечіткої події, тобто того, що в серії з чотирьох незалежних випробувань два рази настане і два рази не настане подія A, необхідно обчислити ймовірності $\boldsymbol{P}(A)$, $\boldsymbol{P}(\overline{A})$ та використати формулу Бернуллі, а саме

$$\boldsymbol{P}(A) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 0.8 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{10}.$$

Для обчислення ймовірності $\boldsymbol{P}(\overline{A})$ слід знайти подію $\overline{A}$. Така подія описується нечіткою множиною

$$\overline{A} = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 0.2/5.$$

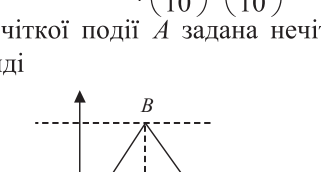
Тому ймовірність цієї події можна обчислити як ймовірність нечіткої події $\overline{A}$, а саме

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0.2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{10}.$$

За формулою Бернуллі одержуємо, що у випадку нечіткої події A

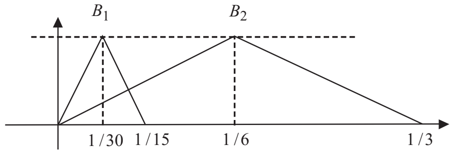
$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^2.$$

Якщо ймовірнисть нечіткої події A задана нечітким трикутним числом B з діаграмою Заде у вигляді

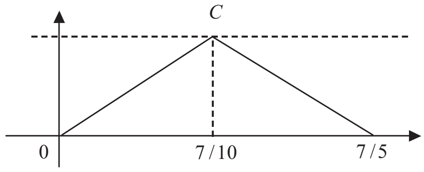


то обчислення нечіткої ймовірності нечіткої події, тобто того, що в серії з чотирьох підкидань кубика два рази настане і два рази не настане подія $A = 1/6 + 0.8/5$, можна виконати у такій спосіб.

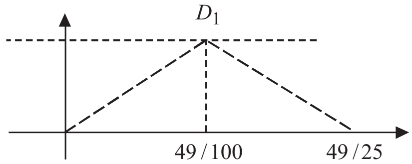
1. Обчислюємо добутки $B_2 = \mu_{\overline{A}}(1) \otimes B(1)$ та $B_1 = \mu_{\overline{A}}(5) \otimes B(5)$ для події $\overline{A}$:

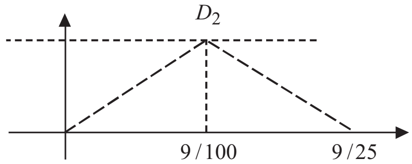


2. Обчислюємо суму $C = (4 \otimes B_2) \oplus B_1$:

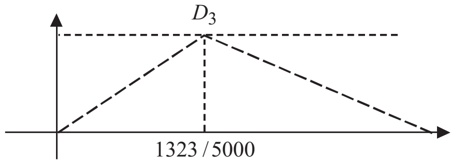


3. Знаходимо добутки $D_1 = \left(0, \dfrac{7}{10}, \dfrac{7}{5}\right)^2$ та $D_2 = \left(0, \dfrac{3}{10}, \dfrac{3}{5}\right)^2$:





4. Знаходимо добуток $D_3 = 6 \otimes D_1 \otimes D_2$:



Зазначимо, що добутки D_1, D_2 та D_3 не є нечіткими трикутними числами. Тому на рисунках в пп. 3 та 4 сторони трикутників позначено пунктирними лініями.

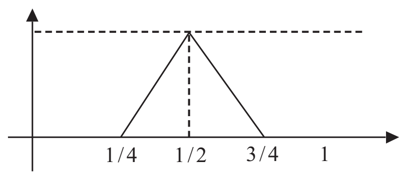
Таким чином, нечітка ймовірність того, що в серії з чотирьох підкидань кубика два рази настане і два рази не настане подія $A = 1/6 + 0.8/5$, є близькою до 1323/5000.

3. Розглянемо таку постановку задачі. Нехай маємо прямокутник, поділений на дві однакові частини: A та B. В прямокутнику випадково вибрано точку. Знайти ймовірність того, що ця точка буде належати, скоріше, частині A, ніж частині B. Відповідна належність точки описується нечіткою величиною $D = 1/A + 0.8/B$.

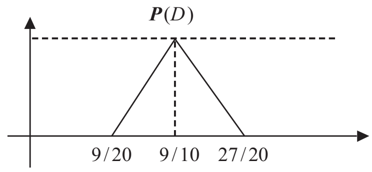
Враховуючи, що ймовірності належності точки частинам A та B дорівнюють 0.5, ймовірності нечіткої події D обчислюють як

$$\boldsymbol{P}(D) = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.8 = 0.9.$$

Якщо ймовірності належності точки частинам A та B описано нечітким трикутним числом



то, як і в прикладі з підкиданням кубика, нечітка ймовірність події D задається діаграмою Заде у вигляді

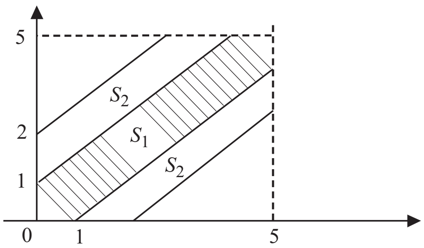


Отже, ймовірність нечіткої події D задана нечітким числом, близьким до 9/10.

До цієї задачі зводиться задача про відстань між точками на прямій. Нехай на прямій довжиною 5 випадково вибирають дві точки: x та y. Потрібно знайти ймовірність того, що відстань між ними буде малою. Малу відстань можна описати нечіткою величиною

$$D = 1/(|x-y| \le 1) + 0.8/(1 < |x-y| \le 2).$$

Для знаходження цієї ймовірності потрібно знайти ймовірності належності випадкової точки (x, y) частині прямокутника, яка задається співвідношенням $|x-y| \le 1$, та частині прямокутника, яка задається співвідношенням $1 < |x-y| \le 2$. Йдеться про прямокутник з довжиною сторони 5. Таким чином, треба обчислити площі таких фігур:



Маємо $S_1 = \dfrac{9}{25}$, $2S_2 = \dfrac{7}{25}$. Тому ймовірність події D дорівнює

$$\boldsymbol{P}(D) = \frac{9}{25} + \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{25} = \frac{73}{125}.$$

В аналогічний спосіб обчислюють нечіткі ймовірності нечіткої події D, якщо, наприклад, ймовірність належності випадкової точки (x, y) частині квадрата площею S_1 задана нечітким трикутним числом

$$\left(\frac{S_1}{S} - \frac{1}{4}, \frac{S_1}{S}, \frac{S_1}{S} + \frac{1}{4} \right).$$

ВИСНОВКИ

Запропонований підхід до обчислення ймовірностей нечітких подій можна узагальнити на випадок подій, ймовірності яких задано нечіткими трикутними числами. При цьому узагальнення потребує і формула для обчислення нечіткої ймовірності. До того ж в усіх наведених прикладах нечітка ймовірність нечіткої події є близькою до ймовірності цієї події. Це означає, що запропоноване узагальнення є доцільним і його можна застосовувати для розв'язування практичних задач у середовищах, які підтримують нечітку арифметику.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Провотар О.І., Провотар О.О. Достовірність в нечітких системах логічного виведення. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 54, № 6. С. 54–63.
2. Провотар О.І., Провотар О.О. До питання про інтерпретацію можливості. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 53, № 6. С. 3–11.
3. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. Москва: Телеком, 2006. 382 с.
4. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control.* 1965. Vol. 8, N 3. P. 338–353.
5. Rutkowski L. Metody i techniki sztucznej inteligencji [in Polish]. Warszawa: Wydawnictwo Naukove PWN, 2009. 452 s.
6. Провотар О.О. Арифметика нечітких чисел. *Комп'ютерна математика.* 2017. № 2. С. 72–77.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Москва: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.
8. Провотар А.И., Лапко А.В. О некоторых подходах к вычислению неопределенностей. *Проблеми програмування.* 2010. № 2–3. С. 22–27.
9. Buckley J.J. Fuzzy probabilities. Heidelberg: Physica-Verlag, 2003. 162 p.

Надійшла до редакції 01.04.2019

А.И. Провотар, А.А. Провотар

НЕЧЕТКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ НЕЧЕТКИХ СОБЫТИЙ

Аннотация. Предложен подход к нахождению вероятностных характеристик нечетких событий. Вероятности описываются нечеткими треугольными числами, которые могут удовлетворять тем или иным условиям. Рассмотрены примеры вычисления нечетких вероятностей нечетких событий.

Ключевые слова: нечеткие множества, нечеткие треугольные числа, вероятность нечеткого события, нечеткая вероятность нечеткого события.

O.I. Provotar, O.O. Provotar

FUZZY PROBABILITIES OF FUZZY EVENTS

Abstract. An approach to finding the probabilistic characteristics of fuzzy events is proposed. Herewith the probabilities are described by fuzzy triangular numbers that can satisfy one or another condition. Examples of calculating the fuzzy probabilities of fuzzy events are considered.

Keywords: fuzzy sets, triangular fuzzy numbers, probability of a fuzzy event, fuzzy probability of a fuzzy event.

Провотар Олександр Іванович,
доктор фіз.-мат. наук, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
e-mail: aprowata1@bigmir.net.

Провотар Олександр Олександрович,
аспірант Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
e-mail: aprovata@gmail.com.