

К ПОСТРОЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДВУХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ. II. СЛУЧАЙ НЕПРЕРЫВНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

Аннотация. Решены задачи псевдообращения нелинейных дифференциальных моделей пространственно распределенных динамических систем. Рассмотрены системы, нелинейность которых образована произведением линейных дифференциальных преобразований функции состояния системы или заменой ими коэффициентов линейного приближения модели. Построены аналитические зависимости функции состояния системы от непрерывно определенных значений внешнединамических возмущающих факторов.

Ключевые слова: псевдообращение, нелинейные динамические системы, системы с распределенными параметрами, распределенные пространственно-временные системы.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением [1], где идеи среднеквадратического псевдообращения линейных алгебраических, интегральных и функциональных уравнений [2], а также нелинейных алгебраических уравнений [3, 4] в продолжение математических результатов [5] по построению интегральных эквивалентов линейных дифференциальных уравнений распространялись на нелинейные пространственно распределенные системы, динамика которых описывалась нелинейными дифференциальными моделями. Были построены псевдообращения дифференциальных уравнений, нелинейность в которых определяется произведением линейных дифференциальных преобразований функции состояния системы или получается после замены такими преобразованиями линейных приближений математической модели системы. Однако в [1] построенные ядра интегральных математических моделей относились к распределенным динамическим процессам, функция распределенных внешнединамических возмущений которых задана дискретно. Там же исследовались вопросы точности и однозначности полученных псевдорешений.

Далее интегральные математические модели динамики рассмотренных в [1] классов нелинейных пространственно распределенных систем разрабатываются для более общего случая, когда распределенные внешнединамические воздействия определены функционально. Как и в [1], строятся аналитические выражения для функции состояния системы, которые по среднеквадратическому критерию (непрерывно или в точках) согласуются с дифференциальной математической моделью системы (процесса), где внешнединамические воздействия определены непрерывно. Это сложные математические задачи, которые могут не иметь точного решения, а могут иметь множество решений или наилучших среднеквадратических приближений к ним. Поэтому в настоящей работе, как и в [1], построены и исследованы на точность и однозначность допустимые множества решений. Полученные математические решения оказались несложными и допустимыми для

¹Начало см. в № 5, 2019

практической реализации, в частности и для аналитического решения задач математического моделирования динамики рассматриваемых процессов (систем) в ограниченных пространственно-временных областях при неполноте информации об их начально-краевом состоянии, как это было сделано для линейных динамически распределенных систем в работах [6, 7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Продолжим начатое в [1] рассмотрение вопроса перехода от дифференциальных математических моделей пространственно распределенных динамических систем вида

$$L_1(\partial_s)y(s)L_2(\partial_s)y(s)\dots L_n(\partial_s)y(s) = u(s) \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1)$$

$$[(L_0(\partial_s)y(s))\partial_s^n + (L_1(\partial_s)y(s))\partial_s^{n-1} + \dots + L_n(\partial_s)y(s)]y(s) = u(s), \quad (2)$$

в которых $s \in S = \{s = (x, t) : x \in S_0 \subset R^V, t \in [0, T]\}$ — пространственно-временная переменная, $L_i(\partial_s) = a_0\partial_s^n + a_1\partial_s^{n-1} + \dots + a_n$ ($i = \overline{1, N}$) — линейные дифференциальные операторы, а

$$a_{n-k}\partial_s^k = \sum_{k_0+k_1+\dots+k_v=k} a_{k_0k_1\dots k_v} \frac{\partial^k}{\partial_{x_1}^{k_1}\dots\partial_{x_v}^{k_v}\partial_t^{k_0}}$$

при заданных $a_{k_0k_1\dots k_v}$ и $k \in \{\overline{0, n}\}$, к их интегральному (или близкому к нему) представлению. В отличие от рассмотренного в [1], этот вопрос будем изучать для общего случая, когда распределенные внешнединамические возмущения $u(s)$ наблюдаются и измеряются непрерывно в области изменения аргумента s , а не дискретно.

С использованием полученных в [2] научных результатов по псевдообращению линейных алгебраических, интегральных и функциональных преобразований и с учетом возможности приведенного там аппарата псевдообращения сформулированную таким образом проблему будем изучать при дискретно определенной функции состояния $y(s)$.

Иначе говоря, ограничиваясь вектором $\bar{y} = (y(s_1), \dots, y(s_L))^T$ значений функции состояния $y(s)$ исследуемого процесса (системы), построим его так, чтобы при заданной функции $u(s)$

$$\int_S \left[\prod_{k=1}^N (L_k(\partial_s)y(s) - u(s)) \right]^2 ds \rightarrow \min_{\bar{y}} \quad (3)$$

для системы (1) или

$$\sum_{l=1}^L \left(\sum_{k=0}^n [L_k(\partial_s)y(s)|_{s=s_l} \partial_s^{n-k}] y(s)|_{s=s_l} - u(s)|_{s=s_l} \right)^2 \rightarrow \min_{\bar{y}} \quad (4)$$

для системы (2).

Построим аналитические выражения функции $y(s)$ состояния системы при заданном внешнединамическом возмущении $u(s)$.

**ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ
ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ**

Решим задачу (3) при непрерывно и дискретно (в точках s_l ($l = \overline{1, L}$) определенных функциях $u(s)$ и $y(s)$ ($s \in S$) для $N = 2$. При этом, считая $u(s)$ известной функцией, строим функцию $y(s)$ ($s \in S$) состояния рассматриваемой системы, вектор $\bar{y} = (y(s_1), y(s_2), \dots, y(s_L))^T$ значений которой удовлетворяет условию

$$\int_S [(L_1(\partial_s)y(s))(L_2(\partial_s)y(s)) - u(s)]^2 ds \rightarrow \min_{\bar{y}}. \quad (5)$$

Полагая

$$L_k(\partial_s)y(s) = u_k(s) \quad (k = \overline{1, 2}), \quad (6)$$

или, что эквивалентно,

$$y(s) = \int_S G_k(s-s')u_k(s')ds' \quad (k = \overline{1, 2}), \quad (7)$$

где $G_k(s-s')$ — функция Грина уравнения (6) в неограниченной пространственно-временной области, систему (3), в псевдообращении которой состоит рассматриваемая задача, записываем в виде

$$u_1(s)u_2(s) = u(s). \quad (8)$$

Считая функции $G_k(s-s')$ ($k = \overline{1, 2}$) в (7) известными, а также учитывая, что согласно (7)

$$\int_S \bar{G}_k(s')u_k(s')ds' = \bar{y}$$

при $G_k(s') = \text{col}(G_k(s_l - s'), l = \overline{1, L})$, с точностью $\varepsilon^2 = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T Q_k Q_k^+ \bar{y}$, где

$$Q_k = \int_S \bar{G}_k(s)\bar{G}_k^T(s)ds,$$

имеем $u_k(s) = \bar{G}_k^T(s)Q_k^+ \bar{y}$. Последнее позволяет задачу (5) записать в виде

$$\int_S [(\bar{G}_1^T(s)Q_1^+ \bar{y})(\bar{G}_2^T(s)Q_2^+ \bar{y}) - u(s)]^2 ds \rightarrow \min_{\bar{y}}, \quad (9)$$

что с учетом (8) эквивалентно следующему:

$$\int_S (u_1(s)u_2(s) - u(s))^2 ds \rightarrow \min_{u_1(s), u_2(s)}. \quad (10)$$

Заметим при этом, что функции $u_1(s)$, $u_2(s)$, найденные согласно (10), позволяют найти функцию состояния $y(s)$ и вектор \bar{y} значений этой функции в точках s_l ($l = \overline{1, L}$).

Вначале рассмотрим вариант решения задачи (10) для случая, когда функция $u(s)$ задана вектором ее значений $u(s'_m)$ ($m = \overline{1, M}$), определенных в точках s'_m , для которых $s'_{m+1} - s'_m = \Delta s'_m$. В этом случае уравнения (7), (8) и условие (10) приведем к виду

$$\bar{y} = A_1 \bar{u}_1 = A_2 \bar{u}_2,$$

$$\bar{u}_1 \otimes \bar{u}_2 = \bar{u}, \quad (11)$$

$$\|\bar{u}_1 \otimes \bar{u}_2 - \bar{u}\|^2 \rightarrow \min_{u_1, u_2}$$

где \otimes — операция декартового произведения векторов,

$$A_k = [G_k(s_l - s'_m) \sqrt{\Delta s'_m}]_{l=1, m=1}^{l=L, m=M},$$

$$\bar{u}_k = (u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{kM}) \quad (k = \overline{1, 2}), \quad \bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)^T$$

при

$$u_m = u(s'_m) \Delta s'_m, \quad u_{km} = u_k(s'_m) \sqrt{\Delta s'_m} \quad (m = \overline{1, M}).$$

С использованием

$$\bar{u}_k = \arg \min_{\bar{u}_k \in \Omega_k} \|\bar{u}_k\|^2 = A_k^T P_k^+ \bar{y} \quad (k = \overline{1, 2}),$$

где

$$P_k = A_k A_k^T,$$

$$\Omega_k = \{\bar{u}_k \in R^M : \bar{u}_k = \arg \min_{u_k} \|A_k u_k - \bar{y}\|^2 =$$

$$= A_k^T P_k^+ \bar{y} + v_k - A_k^T P_k^+ A_k v_k \quad \forall v_k \in R^M\},$$

$v_k \equiv 0$ при $\det A_k^T A_k > 0$, а

$$\min_{\bar{u}_k \in \Omega_k} \|A_k \bar{u}_k - \bar{y}\|^2 = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T P_k P_k^+ \bar{y} = \varepsilon_k^2,$$

уравнение (11) запишем в виде

$$\bar{u}_1 \otimes A_2^T P_2^+ A_1 \bar{u}_1 = \bar{u} \quad (12)$$

или

$$\bar{u}_2 \otimes A_1^T P_1^+ A_2 \bar{u}_2 = \bar{u}. \quad (13)$$

Решения уравнений (12), (13) такие, чтобы

$$\|\bar{u}_1 \otimes A_2^T P_2^+ A_1 \bar{u}_1 - \bar{u}\| \rightarrow \min_{\bar{u}_1}, \quad (14)$$

$$\|\bar{u}_2 \otimes A_1^T P_1^+ A_2 \bar{u}_2 - \bar{u}\| \rightarrow \min_{\bar{u}_2}, \quad (15)$$

получим после среднеквадратического обращения систем

$$\bar{A}_k \alpha_k = \bar{u} \quad (k = \overline{1, 2}), \quad (16)$$

где

$$\bar{A}_1 = \text{col}(\underbrace{(0, \dots, 0)}_{M(i-1)}, \text{str}([A_2^+ A_1]_{ij}, j = \overline{1, M}), \underbrace{(0, \dots, 0)}_{M^2-iM}, i = \overline{1, M}),$$

$$\bar{A}_2 = \text{col}(\underbrace{(0, \dots, 0)}_{M(i-1)}, \text{str}([A_1^+ A_2]_{ij}, j = \overline{1, M}), \underbrace{(0, \dots, 0)}_{M^2-iM}, i = \overline{1, M}),$$

$$\alpha_k = \text{col}((u_{ki} u_{kj}), j = \overline{1, M}), i = \overline{1, M}) \quad (k = \overline{1, 2}).$$

Комбинации $(u_{ki}u_{kj})$ ($i, j = \overline{1, M}$) компонент u_{ki} ($i = \overline{1, M}$) векторов \bar{u}_k ($k = \overline{1, 2}$) такие, чтобы

$$\bar{\alpha}_k = \arg \min_{a_k \in \Omega_k^{(\alpha)}} \|a_k\|^2$$

при

$$\Omega_k^{(\alpha)} = \{a_k : a_k = \arg \min_{\alpha \in R^{M^2}} \|\bar{A}_k \alpha - \bar{u}\|^2\},$$

определим соотношениями:

$$u_{1i}u_{1j} = [A_2^T P_2^+ A_1]_{ij} \left(u_i - \sum_{p=1}^M [A_2^T P_2^+ A_1]_{ip} [v_1]_{(i-1)M+p} \right) \times \\ \times \left[\sum_{m=1}^M ([A_2^T P_2^+ A_1]_{im})^2 \right]^{-1} + [v_1]_{(i-1)M+j}, \quad (17)$$

$$u_{2i}u_{2j} = [A_1^T P_1^+ A_2]_{ij} \left(u_i - \sum_{p=1}^M [A_1^T P_1^+ A_2]_{ip} [v_2]_{(i-1)M+p} \right) \times \\ \times \left[\sum_{m=1}^M ([A_1^T P_1^+ A_2]_{im})^2 \right]^{-1} + [v_2]_{(i-1)M+j}, \quad (18)$$

где

$$\min_{a_k \in \Omega_k} \|\bar{A}_k a_k - \bar{u}\|^2 = \bar{u}^T \bar{u} - \bar{u}^T \bar{A}_k \bar{A}_k^+ \bar{u} = \delta_k^2, \quad (19)$$

а $v_k \in R^{M^2}$ определяется из условия

$$[\alpha_k]_{(i-1)M+j}^2 = [\alpha_k]_{(i-1)M+i} [\alpha_k]_{(j-1)M+j}$$

или есть решением системы

$$([\bar{A}_k^T]_{(i-1)M+j} (\bar{A}_k \bar{A}_k^T)^+ a + [v_k]_{(i-1)M+j} - [\bar{A}_k^T]_{(i-1)M+j} (\bar{A}_k \bar{A}_k^T)^+ \bar{A}_k v_k)^2 = \\ = ([\bar{A}_k^T]_{(i-1)M+i} (\bar{A}_k \bar{A}_k^T)^+ a + [v_k]_{(i-1)M+i} - [\bar{A}_k^T]_{(i-1)M+i} (\bar{A}_k \bar{A}_k^T)^+ \bar{A}_k v_k) \times (20) \\ \times ([\bar{A}_k^T]_{(j-1)M+j} (\bar{A}_k \bar{A}_k^T)^+ a + [v_k]_{(j-1)M+j} - [\bar{A}_k^T]_{(j-1)M+j} (\bar{A}_k \bar{A}_k^T)^+ \bar{A}_k v_k).$$

Здесь и дальше $[\cdot]_{ij}, [\cdot]_i$ — (i, j) -й элемент матрицы и i -я компонента вектора соответственно.

Если учесть, что $[\alpha_k]_{(i-1)M+j} = [\alpha_k]_{(j-1)M+i}$, то размерность системы (20) можно уменьшить до $(M^2 - M)/2$. С учетом (20) из соотношений (17), (18) находим компоненты u_{ki} ($i = \overline{1, M}$) искомым согласно (14), (15) векторов u_k ($k = \overline{1, 2}$).

Заканчивая рассмотрение дискретного случая задачи, отмечаем, что функция $y(s)$ и вектор \bar{y} значений $y(s_l)$ ($l = \overline{1, L}$) этой функции, являясь решением задачи (9), с точностью δ_1^2 и δ_2^2 удовлетворяет уравнениям (12), (13). При условии, что $\det A_k^T A_k > 0$ при $k = 2$ и $k = 1$ соответственно, эта функция с аналогичной точностью будет удовлетворять и дискретизированному точками s_l ($l = \overline{1, L}$) соотношению (5).

Аналогично (7) функция $y(s)$ при этом запишется в виде

$$y(s) = \sum_{m=1}^M G_k (s - s'_m) u_{km} \sqrt{\Delta s'_m},$$

где

$$k = 1 \text{ при } \varepsilon_1^2 + \delta_1^2 < \varepsilon_2^2 + \delta_2^2 \quad (21)$$

или

$$k = 2 \text{ при } \varepsilon_2^2 + \delta_2^2 < \varepsilon_1^2 + \delta_1^2. \quad (22)$$

Для построения функции $y(s)$, которая согласно (5) удовлетворяет (1) и соотношением (7) определяется через функционально заданное внешнединамическое возмущение $u(s)$, будем исходить из результатов решения рассматриваемой задачи, полученной в [1] для случая, когда $u(s)$ определено в точках s'_m ($m = \overline{1, M}$).

Аналитический вид функций $u_k(s)$ ($k = \overline{1, 2}$), через одну из которых соотношением (7) определяется искомая функция $y(s)$, получим из (17), (18) с учетом того, что

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{u_{ki} u_{kj}}{\Delta s'_m}} \Big|_{i=j=m} &= \lim_{M \rightarrow \infty} u_k(s'_m) = u_k(s'), \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{A_k}{\sqrt{\Delta s'_m}} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{col}(G_k(s_l - s'_m), l = \overline{1, L}) = \\ &= \text{col}(G_k(s_l - s'_m), l = \overline{1, L}) = \overline{G}_k(s), \\ \lim_{M \rightarrow \infty} A_k A_k^T &= \int_S \overline{G}_k(s) \overline{G}_k^T(s) ds = P_k. \end{aligned}$$

При этом

$$u_1^2(s) = \overline{G}_2^T(s) P_2^+ \overline{G}_1(s) Q_1^{-1}(s) u(s), \quad (23)$$

$$u_2^2(s) = \overline{G}_1^T(s) P_1^+ \overline{G}_2(s) Q_2^{-1}(s) u(s), \quad (24)$$

где

$$Q_1(s) = \int_S (\overline{G}_2^T(s) P_2^+ \overline{G}_1(s'))^2 ds', \quad Q_2(s) = \int_S (\overline{G}_1^T(s) P_1^+ \overline{G}_2(s'))^2 ds'.$$

При $M \rightarrow \infty$ из соотношений (19) получим величины δ_k^2 — точности, с которыми найденные согласно (23), (24) функции $u_k(s)$ ($k = \overline{1, 2}$) удовлетворяют уравнению (8):

$$\delta_k^2 = \int_S u^2(s) ds - a_k^T \overline{P}_k^+ a_k, \quad (25)$$

где

$$\overline{P}_k = \int_S \overline{A}_k^T(s) \overline{A}_k(s) ds, \quad a_k = \int_S \overline{A}_k^T(s) u(s) ds.$$

Для выбора значения k в соотношении (7), кроме определенных ранее δ_k^2 ($k = \overline{1, 2}$), учтем также точности

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^2 &= \min_{u_k(s)} \sum_{l=1}^L (y(s_l) - \int_S G_k(s_l - s') u_k(s') ds')^2 = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \min_{\bar{u}_k} \|A_k \bar{u}_k - \bar{y}\|^2 = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T P_k P_k^+ \bar{y} \quad (k = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (26)$$

с которыми использованные в (8) функции $u_k(s)$ в точках s_l ($l = \overline{1, L}$) будут удовлетворять уравнению (7).

Найденные согласно (25), (26) величины δ_k^2 и ε_k^2 по аналогии с (21), (22) будут определять индекс k при выборе (соотношения (23), (24)) функции $u_k(s)$ и в конечном представлении — состояния $y(s)$ рассматриваемой системы.

**ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ОБРАЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ,
ПОЛУЧЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ**

Рассмотрим задачу построения определенного согласно (3) вектора \bar{y} значений $y_l = y(s_l)$ ($l = \overline{1, L}$) функции $y(s)$.

Несложно видеть, что задача (3) эквивалентна задаче среднеквадратического обращения уравнения

$$u_1(s)u_2(s) \dots u_N(s) = u(s), \quad (27)$$

в котором

$$u_k(s) = L_k(\partial_s)y(s) \quad (k = \overline{1, N})$$

или (что эквивалентно)

$$y(s) = \int_S G_k(s-s')u_k(s')ds' \quad (k = \overline{1, N}). \quad (28)$$

Среднеквадратически обращая дискретизированное по нештрихованным координатам точками s_l ($l = \overline{1, L}$) уравнение (28), с точностью

$$\varepsilon_k^2 = \min_{u_k(s)} \sum_{l=1}^L \left(\int_S G_k(s_l - s')u_k(s')ds' - y_l \right)^2 = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T P_k P_k^+ \bar{y}$$

получаем

$$u_k(s) = \bar{G}_k^T(s)P_k^+ \bar{y} \quad (k = \overline{1, N}), \quad (29)$$

где $\bar{G}_k(s)$ и P_k — вектор-функция и матрица, которые совпадают с определенными выше.

С учетом (29) при

$$U_i(s) = \bar{G}_i^T(s)P_i^+ \left(\int_S \bar{G}_k(s')u_k(s')ds' \right) \quad (i = \overline{1, N}, i \neq k)$$

уравнение (27) запишем в виде

$$U_1(s) \dots U_{k-1}(s)u_k(s)U_{k+1}(s) \dots U_N(s) = u(s). \quad (30)$$

Из соотношения (30) находим значения $u_k(s'_m)$ ($m = \overline{1, M}$) функции $u_k(s)$ ($k = \overline{1, M}$), которые, как и выше, удовлетворяют уравнению (16) при $k = \overline{1, N}$ и

$$\bar{A}_k = \text{col} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{(k-1)M^{N-1}}, \underbrace{A_j^{(k)}}_{M^N - kM^{N-1}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M^N - kM^{N-1}}, j = \overline{1, M} \right),$$

$$A_j^{(k)} = \text{str} \left(\left(\dots \left(\left(\left(\left[\bar{G}_1^T P_1^+ \bar{G}_k \right]_{j i_1} \dots \left[\bar{G}_{k-1}^T P_{k-1}^+ \bar{G}_k \right]_{j i_{k-1}} \left[\bar{G}_{k+1}^T P_{k+1}^+ \bar{G}_k \right]_{j i_{k+1}} \dots \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right. \left. \dots \left[\bar{G}_N^T P_N^+ \bar{G}_k \right]_{j i_N}, i_N = \overline{1, M}, \dots \right), i_{k+1} = \overline{1, M}, i_{k-1} = \overline{1, M}, \dots \right), i_1 = \overline{1, M} \right),$$

$$\bar{G}_k = \text{str} \left(\bar{G}_k(s'_m) \sqrt{(\Delta s'_m)^{N-1}}, m = \overline{1, M} \right),$$

$$\alpha_k = \text{col} \left((u_{k i_1} \dots u_{k i_N}, i_N = \overline{1, M}, \dots), i_1 = \overline{1, M} \right).$$

Как и в [1], эти значения определим соотношением

$$u_k(s'_{i_1}) \dots u_k(s'_{i_N}) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} [\overline{G}_j^T P_j^+ \overline{G}_k]_{i_1 i_{j+1}} \prod_{j=k+1}^N [\overline{G}_j^T P_j^+ \overline{G}_k]_{i_1 i_j}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sum_{p_j=1}^M [\overline{G}_j^T P_j^+ \overline{G}_k]_{i_1 p_j}^2} \times \\ \times \left(u(s'_{i_1}) - v_{i_1} \prod_{j=1}^{k-1} \sum_{p_j=1}^M [\overline{G}_j^T P_j^+ \overline{G}_k]_{i_1 p_{j+1}} v_{p_j} \prod_{j=k+1}^N \sum_{p_j=1}^M [\overline{G}_j^T P_j^+ \overline{G}_k]_{i_1 p_j} v_{p_j} \right) + \prod_{j=1}^N v_{i_j}.$$

Откуда при $M \rightarrow \infty$ находим $u_k(s_1) \dots u_k(s_N) = U(s_1, \dots, s_N)$, где

$$U(s_1, \dots, s_N) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \overline{G}_j^T(s_{j+1}) P_j^+ \overline{G}_k(s_1) \prod_{j=k+1}^N \overline{G}_j^T(s_j) P_j^+ \overline{G}_k(s_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \int_S (\overline{G}_j^T(\xi) P_j^+ \overline{G}_k(\xi))^2 d\xi} \times \\ \times \left(u(s_1) - v(s_1) \prod_{j=1}^{k-1} \overline{G}_j^T(s_{j+1}) P_j^+ \prod_{j=k+1}^N \overline{G}_j^T(s_j) P_j^+ \left(\int_S \overline{G}_k^T(\xi) v(\xi) d\xi \right)^{N-1} \right) + \prod_{j=1}^N v(s_j)$$

для $k = \overline{1, N}$, $s_1 \in S, \dots, s_N \in S$. При этом $v(s_j)$ ($j = \overline{1, N}$) — произвольные функции, выбор которых ограничивается условиями

$$U^N(s_1, \dots, s_N) = \prod_{j=1}^N U(s_j, \dots, s_N), \\ U(s_1, \dots, s_N) = U(s_N, \dots, s_1).$$

С учетом того, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \min_{a_k \in \Omega_k} \|\overline{A}_k a_k - \bar{u}\|^2 = \delta_k^2 = 0 \quad \forall k = \overline{1, N},$$

при $k = \arg \min_{i=1, N} \varepsilon_i^2$ соотношением (28) определим искомую согласно (3) функцию $y(s)$ состояния рассматриваемой системы.

ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ КВАДРАТИЧНО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим задачу псевдообращения системы (2), которую для удобства запишем в виде

$$\sum_{k=0}^n a_k(s) \partial_s^{n-k} y(s) = u(s), \quad (31)$$

положив

$$L_k(\partial_s) y(s) = a_k(s) \quad (32)$$

для $k = \overline{0, n}$.

Для решения задачи (4) для системы (31) будем исходить из того, что соотношение (32) эквивалентно следующему:

$$y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(s-s') a_k(s') ds'. \quad (33)$$

Здесь, как и ранее, $G_k(s-s')$ — функция Грина уравнения (32), методы построения которой для неограниченной пространственно-временной области детально рассмотрены в [5].

С учетом постановки задачи ограничимся рассмотрением вектора \bar{y} значений $y(s_l)$ ($l = \overline{1, L}$) функции состояния $y(s)$. Из (33) находим

$$a_k(s) = \min_{\alpha_k(s) \in \Omega_k} \|\alpha_k(s)\|^2 \quad (34)$$

при

$$\Omega_k = \left\{ \alpha_k : \sum_{l=1}^L \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G_k(s_l - s') \alpha_k(s') ds' - y(s_l) \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha_k(s)} \right\}. \quad (35)$$

Согласно изложенному в [2] находим, что с точностью

$$\varepsilon_k^2 = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T P_k P_k^+ \bar{y}$$

определенное соотношениями (34), (35)

$$a_k(s) = \bar{G}_k^T(s) P_k^+ \bar{y}. \quad (36)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{G}_k(s) &= \text{col}(G_k(s_l - s'), l = \overline{1, L}), \\ P_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}_k(s) \bar{G}_k^T(s) ds. \end{aligned}$$

После подстановки (36) в уравнение (31) последнее запишем в виде

$$\sum_{k=0}^n \bar{G}_k^T(s) P_k^+ \bar{y} y^{(n-k)}(s) = u(s), \quad (37)$$

где $y^{(n-k)}(s) = \partial_s^{(n-k)} y(s)$ для $k = \overline{0, n}$.

Учитывая, что искомая согласно (4) функция $y(s)$ определена в дискретных точках s_1, \dots, s_L , в этих же точках дискретно определяем и ее производные $y^{(n-k)}(s)$ ($k = \overline{0, n}$), для чего вводим в рассмотрение значения $y_i^{(n-k)} = y^{(n-k)}(s_i)$ $i = \overline{1, L}$ последних. Это позволяет уравнение (37) при известной функции $u(s)$ записать в виде

$$\sum_{k=0}^n \bar{G}_k^T(s_i) P_k^+ \bar{y} y_i^{(n-k)} = u_i \quad (i = \overline{1, L})$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^L \bar{G}_k^T(s_i) P_{kl}^+ y_l y_i^{(n-k)} = u(s_i) \quad (i = \overline{1, L}), \quad (38)$$

где $(P_{k_1}^+, \dots, P_{k_L}^+) = P_k^+$.

Обозначив через

$$\alpha = \text{col}((y_l y_i^{(n-k)}), l = \overline{1, L}, k = \overline{0, n}, i = \overline{1, L}), \quad (39)$$

$$A = \text{diag}(\text{str}((\bar{G}_k^T(s_i) P_{kl}^+), l = \overline{1, L}, k = \overline{0, n}, i = \overline{1, L})),$$

уравнение (38) запишем в виде

$$A\alpha = \bar{u}, \quad (40)$$

где $\bar{u} = \text{col}(u(s_l), l = \overline{1, L})$.

Обозначив через

$$P = AA^T = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^L (\bar{G}_k^T(t_i) P_{kl}^+)^2, i = \overline{1, L} \right),$$

с точностью

$$\varepsilon^2 = \min_{\alpha \in R^{L^2 \times (n-1)}} \|A\alpha - \bar{u}\|^2 = \bar{u}^T \bar{u} - \bar{u}^T P P^+ \bar{u}$$

соотношением

$$\alpha = \alpha_0 + v - A^T P^{-1} v, \quad (41)$$

в котором

$$\alpha_0 = A^T P^{-1} \bar{u} = \text{col} \left(\left(\left(\bar{G}_p^T (s_i) P_{pq}^+ \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^L (\bar{G}_k^T (s_i) P_{kl}^+)^{-2} u(s_i) \right)_{q=1, \dots, L}, p=0, \dots, n \right), i=1, \dots, L \right), \quad (42)$$

такое, что

$$\alpha_0 = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} \|\xi^2\|,$$

где

$$\Omega_\xi = \{\xi : \|A\xi - \bar{u}\|^2 \rightarrow \min_\xi\},$$

запишем результат псевдообращения системы (40).

С учетом определения (39) вектора α из (42) находим

$$y_i y_i^{(n-p)} = \bar{G}_p^T (s_i) P_{pi}^+ \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^L (\bar{G}_k^T (s_i) P_{kl}^+)^{-2} u(s_i)$$

для $i=1, \dots, L$.

А это означает, что решением рассматриваемой задачи будет вектор \bar{y} с компонентами

$$y_i^2 = \bar{G}_n^T (s_i) P_{ni}^+ \sum_{k=0}^n \sum_{l=1}^L (\bar{G}_k^T (s_i) P_{kl}^+)^{-2} u(s_i) \quad (i=1, \dots, L).$$

Решение будет точным, если равны нулю точности ε_k^2 ($k=0, \dots, n$) среднеквадратического обращения дискретизированного точками s_l $l=(1, \dots, L)$ уравнения (33) и равна нулю точность ε^2 решения задачи (4). Однозначность полученного решения определяется однозначностью среднеквадратического обращения уравнений (33) и (40). Условиями этого являются

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det [\bar{G}_k^T (s_i) G_k (s_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$$

и $\det (A^T A) > 0$ соответственно.

Заметим, что выбор вектора $v \in R^{L^2 \times (n+1)}$ в решении (41) уравнения (40) ограничен логической структурой вектора α .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, решена сложная математическая задача псевдообращения нелинейных дифференциальных математических моделей, нелинейность которых, как и в [1], определяется произведением линейных дифференциальных преобразований функции состояния системы (процесса) или получается после замены этими преобразованиями коэффициентов линейного приближения модели.

В отличие от [1], где такие модели псевдорешены при дискретно определенных внешнединамических возмущениях системы, в данной публикации решены задачи построения интегральных математических моделей рассматриваемых систем при непрерывно заданных возмущениях. Критерием решения изученных задач является среднеквадратическое приближение построенной функции состояния системы к точному математическому решению дифференциального уравнения модели. Описаны случаи, когда такое приближение выполняется непрерывно по пространственно-временным координатам или при дискретно заданных значениях последних. Для всех рассмотренных в работе задач построены множества функцио-

нальных зависимостей состояния системы от значений внешнединамических возмущающих факторов. Как и в [1], дана оценка точности полученных решений и сформулированы условия однозначности построенных множеств.

Форма конечных математических результатов несложная для практического использования и может стать основой для решения задач математического моделирования динамики нелинейных неположенно определенных динамических систем, что расширит возможности развитого в [6, 7] подхода к решению подобных задач в линейном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. I. Случай дискретно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 5. С. 115–127.
2. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 3. С. 90–104.
3. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. I. Мультипликативно нелинейные системы. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 1. С. 127–134.
4. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. II. Системы с адитивно выделенной нелинейностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 2. С. 102–107.
5. Стоян В.А., Двірничук В.Б. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей. *Доповіді НАН України*. 2012. № 9. С. 36–43.
6. Скопецкий В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ: Наук. думка, 2002. 361 с.
7. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.

Надійшла до редакції 12.10.2018

В.А. Стоян

ДО ПОБУДОВИ ІНТЕГРАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОХ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ. II. ВИПАДОК НЕПЕРЕРВНО ВИЗНАЧЕНИХ ЗОВНІШНЬОДИНАМІЧНИХ ЗБУРЕНЬ

Анотація. Розв'язано задачі псевдообернення нелінійних диференціальних моделей просторово розподілених динамічних систем. Розглянуто системи, нелінійність яких утворена добутком лінійних диференціальних перетворень функції стану системи, або шляхом заміни ними коефіцієнтів лінійного наближення моделі. Будуються аналітичні залежності функції стану системи від неперервно визначених значень зовнішньодинамічних збурюючих факторів.

Ключові слова: псевдообернення, нелінійні динамічні системи, системи з розподіленими параметрами, просторово розподілені динамічні системи.

V.A. Stoyan

CONSTRUCTION INTEGRAL MATHEMATICAL MODELS OF TWO CLASSES OF NONLINEAR SPATIALLY DISTRIBUTED SYSTEMS. II. THE CASE OF CONTINUOUSLY DEFINED EXTERNAL-DYNAMIC PERTURBATIONS

Abstract. Problems of pseudoinversion of nonlinear differential models of spatially distributed dynamic systems are solved. Systems whose nonlinearity is formed by the product of linear differential transformations of the function of system's state or by replacing the coefficients of linear approximation by these transformations are considered. Analytic dependences of the function of system's state on continuously defined values of external-dynamic factors are constructed.

Keywords: pseudoinversion, nonlinear dynamical systems, spatially distributed dynamical systems.

Стоян Владимир Антонович,

доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: v_a_stoyan@ukr.net.