УДК 368:519.21

Ю.М. ЕРМОЛЬЕВ, В.И. НОРКИН, Б.В. НОРКИН

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ СТРАХОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. Дан обзор стохастических оптимизационных моделей страховой математики и методов их решения на основе методологии многокритериального стохастического программирования и оптимального управления. Эволюция капитала страховой компании рассматривается в дискретном времени. Основными случайными параметрами моделей являются уровни страховых выплат, т.е. отношения оплаченных страховых требований к соответствующим премиям за единицу времени. Переменные оптимизации — структура страхового портфеля (структура валовой премии) и размер дивидендов. Критериями эффективности являются показатели доходности страхового бизнеса, а показателями риска — вероятность разорения и капитал, необходимый для предотвращения разорения. Цель оптимизации — поиск парето-оптимальных решений. Предложены методы нахождения этих решений.

Ключевые слова: страховая математика, процесс риска, вероятность разорения, стохастическое программирование, многокритериальные задачи, двухэтапные задачи, вероятностные ограничения, стохастическое оптимальное управление, частично-целочисленное программирование, динамическое программирование.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционная теория оптимального страхования базируется на теории ожидаемой полезности [1, 2]. Альтернативный подход основан на оптимизации доходности и/или риска [3–11]. В качестве показателя риска чаще всего используется вероятность разорения (вероятность неплатежеспособности), оценкам и вычислению которой посвящена обширная литература [12–14]. Трудность возникающих при этом оптимизационных задач объясняется тем, что они относятся к классу невыпуклых задач стохастического программирования или стохастического оптимального управления при вероятностных ограничениях. Теория стохастического программирования предназначена для формализации задач принятия решений в условиях стохастической неопределенности [15–18]. В настоящей работе на модельных примерах показывается, как ставятся и численно решаются задачи оптимизации страхового бизнеса по нескольким критериям в рамках парадигмы вычислительного стохастического программирования [19].

В отличие от классической модели Крамера–Лундберга в данной статье процесс стохастической эволюции капитала страховой компании рассматривается в дискретном времени, что оправдано дискретной временной (квартальной, годовой) отчетностью компаний по результатам своей деятельности. В страховании основным источником случайности являются страховые требования, которые появляются в случайные моменты времени и имеют случайный размер. В рассматриваемых моделях с дискретным временем основной случайной переменной является уровень страховых выплат — отношение выплат к премиям за единицу времени (год, квартал). Динамика принятия оптимальных решений в этих моделях отображается в двух- и многоэтапной структуре моделей стохастического программирования, а также многоэтапности моделей стохастического динамического программирования. В работе предлагается ряд новых методов решения возникающих стохастических оптимизационных задач. Более полно эти вопросы исследуются в [20].

Е-МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим следующую концептуальную модель страховой компании. Пусть $u \geq 0$ обозначает страховой резерв из некоторого допустимого множества U, $x \in X$ — плановый объем страховых договоров (в денежном выражении) из допустимого множества X, $\nu \geq 0$ — страховая нагрузка, $c(x)$ — чистая премия по договорам страхования (валовая премия $(1+\nu)x$ минус производственные издержки на поддержание объема договоров уровня x, $\xi \geq 0$ — (случайная) убыточность страхового бизнеса (с функцией распределения $F(\cdot)$), т.е. случайная величина страховых требований, соответствующих единице премий. В страховой статистике величина ξ называется уровнем выплат [21]. В теории стохастического программирования рассматривается так называемая двухэтапная модель принятия решений. Применительно к страховому моделированию она выглядит следующим образом: на первом этапе принимается детерминированное решение (u, x), а на втором — наблюдается величина ξ, т.е. становится известной величина страховых требований ξx. Целью бизнеса является максимизация дивидендов d, которые могут быть, в зависимости от постановки, как детерминированными, так и случайными. Пусть решение о дивидендах принимается до того, как станут окончательно известны страховые требования ξx. Таким образом, если на первом этапе капитал компании составлял величину u, то на втором он составляет случайную величину

$$f(u, x, d, \xi) = u + c(x) - d - \xi x, \tag{1}$$

которая может быть как положительной, так и отрицательной. В последнем случае говорят, что наступает неплатежеспособность компании. В рамках стандартной теории стохастического программирования считается, что проблему неплатежеспособности можно решить за счет заимствования капитала величины $(-\min\{0, u + c(x) - d - \xi x\})$, умноженного на коэффициент штрафа $q > 0$ за неплатежеспособность (естественно полагать, что $q \geq 1$). Тогда задача принятия решений о величинах u, x, d состоит в максимизации суммарного ожидаемого дохода (Е-задача):

$$F(u, x, q) = d + q\mathrm{E}_{\xi} \min\{0, u + c(x) - d - \xi x\} \to \max_{(u,x)\in W \subseteq U \times X,\ d \geq 0}, \tag{2}$$

где E_{ξ} — оператор математического ожидания по ξ. Если множество-ограничение $W \subseteq U \times X$ одноточечное, т.е. величины u, x фиксированы, то задача (2), по сути, касается только выбора заранее выплачиваемых дивидендов d. При фиксированном параметре q и выпуклой вверх функции $c(x)$ задача (2) является задачей выпуклого стохастического программирования, для решения которой существуют различные методы [15–19]. Пусть (u^*, x^*, d^*) — оптимальное решение задачи (2). При этом не исключено, что для некоторых значений ξ имеет место неплатежеспособность компании, $f(u^*, x^*, d^*, \xi) < 0$, или, иными словами, вероятность неплатежеспособности $\Pr\{f(u^*, x^*, d^*, \xi) < 0\}$ больше нуля. Однако за счет увеличения коэффициента штрафа q можно добиться желаемого уменьшения этой вероятности [22].

Р-МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Имеются и другие постановки задач стохастического программирования, например так называемые Р-задачи [17]. В обозначениях предыдущего раздела рассмотрим задачу

$$d \to \max_{(u,x)\in W \subseteq U \times X,\ d \geq 0} \tag{3}$$

при вероятностном ограничении

$$\Pr\{u+c(x)-\xi x-d<0\}\le\varepsilon, \tag{4}$$

где $\Pr\{\cdot\}$ — вероятность события в фигурных скобках, ε — параметр надежности страхового бизнеса, $0<\varepsilon<1$. В отличие от (2) модель (3), (4) позволяет явно контролировать вероятность неплатежеспособности, но при этом оказывается невыпуклой. Действительно, обозначим $F(z)=\Pr\{\xi\le z\}$ функцию распределения случайной величины ξ. Тогда

$$\Pr\{u+c(x)-d-\xi x<0\}=\Pr\{\xi>(u+c(x)-d)/x\}=1-F((u+c(x)-d)/x)$$

и, таким образом, ограничение можно переписать в виде

$$F((u+c(x)-d)/x)\ge 1-\varepsilon. \tag{5}$$

Отсюда видно, что ограничение (5) и, следовательно, (4) могут быть невыпуклыми, что значительно усложняет решение задачи (3), (4).

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРАХОВОГО ПОРТФЕЛЯ

В страховании портфель означает структуру страховой премии по разным видам страхования. Будем описывать страховой портфель вектором $x\in X$ с компонентами $(x_1,\ldots,x_n)$, где X — множество допустимых портфелей, например, $X=\{x\ge 0:\sum_{i=1}^n x_i\le w\}$ с фиксированной суммарной номинальной стоимостью w. Обозначим $c(x_i)$ и ξ_i чистый доход и случайную убыточность i-го вида страхования (например, в годовом выражении), $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Тогда аналогично (1) при начальном капитале u и дивидендных выплатах d случайный капитал в конце года будет равен

$$f(u,x,d,\xi)=u+\sum_{i=1}^n c_i(x_i)-d-\sum_{i=1}^n x_i\xi_i.$$

Задачи оптимизации страхового портфеля ставятся аналогично (2):

$$F(u,x,q)=d+q\mathrm{E}_\xi \min\{0,f(u,x,d,\xi)\}\to\max_{(u,x)\in W\subseteq U\times X,\,d\ge 0}; \tag{6}$$

или подобно (3), (4):

$$d\to\max_{(u,x)\in W\subseteq U\times X,\,d\ge 0}, \tag{7}$$

$$\Pr\{f(u,x,d,\xi)<0\}\le\varepsilon. \tag{8}$$

В многомерном случае вероятностное ограничение (8) нельзя выразить через функцию распределения, как в (5), поэтому задача (7), (8) требует разработки специальных методов решения.

СВЕДЕНИЕ P-МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ЧАСТИЧНО-ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ ЗАДАЧАМ ОПТИМИЗАЦИИ

Если случайная величина ξ принимает только конечное число значений (сценариев) $\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$ с вероятностями $\{p_1,\ldots,p_k\}$, то задачу (3), (4) можно эквивалентно свести к задаче частично-целочисленного программирования. Пусть $z=\{z_1,\ldots,z_k\}$ — набор булевых переменных, а M — достаточно большая константа. Тогда задача (3), (4) эквивалентна следующей задаче частично-целочисленного программирования:

$$d\to\max_{(u,x)\in W,\,d\ge 0,\,z\in\{0,1\}^k}, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i z_i \ge 1-\varepsilon, \tag{10}$$

$$u+c(x)-d-\xi_i x \ge -M(1-z_i), \quad i=1,\ldots,k. \tag{11}$$

Здесь ограничение (10) означает, что суммарная вероятность тех сценариев i, для которых $z_i=1$, больше или равна $(1-\varepsilon)$. При $z_i=1$ соответствующее ограничение $u+c(x)-d-\xi_i x \ge -M(1-z_i)$ преобразуется в неравенство $u+c(x)-$ $-d-\xi_i x \ge 0$, а при $z_i=0$ оно переходит в неравенство $u+c(x)-d-\xi_i x \ge -M$ и в силу большой величины M выполняется автоматически, т.е. не является ограничивающим. Таким образом, в совокупности ограничения (10), (11) влекут выполнение вероятностного ограничения (4). Подобный подход к сведению задачи с вероятностным ограничением к задаче частично-целочисленного программирования (впервые предложен в [23], см. также [24]) применяется в [9, 20] к оптимизации страхового портфеля при ограничении на вероятность разорения компании.

ВЕКТОРНАЯ ЗАДАЧА СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача оптимизации страхового бизнеса может рассматриваться как многокритериальная. Например, вместо задач (2) и (3), (4) можно рассмотреть следующие двухкритериальные задачи:

$$f_1(u,x,d)=d \to \max_{(u,x)\in W,\, d\ge 0}, \tag{12}$$

$$f_2(u,x,d)=-\mathrm{E}_\xi \min\{0, u+c(x)-d-\xi x\} \to \min_{(u,x)\in W,\, d\ge 0}, \tag{13}$$

где второй критерий $f_2(u,x,d)$ означает средний дефицит капитала в момент разорения,

$$f_1(u,x,d)=d \to \max_{(u,x)\in W,\, d\ge 0}, \tag{14}$$

$$f_3(u,x,d)=\Pr\{u+c(x)-d-\xi x<0\} \to \min_{(u,x)\in W,\, d\ge 0}. \tag{15}$$

Эффективная граница первой задачи (12), (13) в плоскости «доходность–риск» (f_1, f_2) задается функцией

$$F_2(d)=\min_{(u,x)\in W} f_2(u,x,d)=\min_{(u,x)\in W} \mathrm{E}_\xi \max\{0, d+\xi x-u-c(x)\}. \tag{16}$$

Если $c(x)$ — линейная или вогнутая функция, то (16) — задача выпуклого стохастического программирования [15, 16, 18].

Эффективная граница второй задачи (14), (15) в плоскости «дивиденды–вероятность разорения» (f_1, f_3) задается функцией

$$F_3(d)=\min_{(u,x)\in W} f_3(u,x,d)=\min_{(u,x)\in W} \Pr\{u+c(x)-d-\xi x<0\}. \tag{17}$$

Данная задача является невыпуклой задачей стохастического программирования. В случае скалярных ξ и x получаем

$$F_3(d)=\min_{(u,x)\in W}[1-F((u+c(x)-d)/x)],$$

где $F(\cdot)$ — функция распределения случайной величины ξ.

Если случайная величина ξ принимает конечное множество значений (сценариев) $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с вероятностями $\{p_1, \ldots, p_n\}$, то задача (17) сводится к задаче частично-целочисленного программирования аналогично [24]. Действительно, введем булевые переменные $\{z_1, \ldots, z_n\}$ и рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i \to \max_{(u,x)\in W,\, z_i \in \{0,1\}^n},$$

$$u + c(x) - d - \xi_i x \ge -M(1 - z_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где M — достаточно большая константа. В данной задаче максимизируется вероятность неразорения, поэтому она эквивалентна задаче (17).

МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С РЕШАЮЩИМИ СТРАТЕГИЯМИ

Рассмотрим вариант, когда решение о выплате дивидендов принимается после того, как станут известны страховые требования ξx. В этом случае дивиденды $d = d(\cdot)$ могут быть произвольной измеримой функцией от капитала компании $u + c(x) - \xi x$. Тогда задача (3), (4) принимает вид

$$\mathrm{E}_{\xi} d(u + c(x) - \xi x) \to \max_{(u,x)\in W,\, d(\cdot)\ge 0} \tag{18}$$

при вероятностном ограничении

$$\Pr\{u + c(x) - \xi x - d(u + c(x) - \xi x) < 0\} \le \varepsilon, \tag{19}$$

где оптимизация ведется не только по переменным u и x, но и по всем измеримым (по Борелю) функциям $d(\cdot) \ge 0$. Данная задача бесконечномерная, для ее решения необходимо перебрать все возможные измеримые функции $d(\cdot)$ вместе со всеми допустимыми значениями u и x. Один из возможных подходов к ее приближенному решению состоит в задании параметрической формы функции $d(\cdot)$. Например, можно ограничиться так называемыми барьерными стратегиями $d(\cdot, y) = \max\{0, \cdot - y\}$, где y — параметр величины барьера. Выбор барьерной стратегии выплаты дивидендов означает, что при капитале компании меньше барьера дивиденды не вычитаются из капитала, а при капитале больше барьера в качестве дивидендов вычитается часть капитала, превышающего барьер. Возможны и другие виды дивидендных стратегий, зависящие, вообще говоря, от векторного конечномерного параметра y. При подстановке функции $d(\cdot, y)$ в задачу (18), (19) последняя преобразуется в конечномерную задачу

$$\mathrm{E}_{\xi} d(u + c(x) - \xi x, y) = \mathrm{E}\xi \max\{0, (u + c(x) - \xi x - y)\} \to \max_{(u,x)\in W,\, y\ge 0} \tag{20}$$

при вероятностном ограничении

$$\Pr\{u + c(x) - \xi x - \max\{0, (u + c(x) - \xi x - y)\} < 0\} \le \varepsilon \tag{21}$$

и поддается решению переборными (эволюционными) алгоритмами. Таким же образом могут быть переформулированы векторные задачи (12)–(15). Подобный подход к решению сложных динамических задач стохастического оптимального управления дивидендной стратегией страховой компании применяется в [25].

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть резервы страховой компании X^t изменяются с течением (дискретного) времени $t = 0, 1, \ldots$ согласно следующему соотношению:

$$X^{t+1} = X^t + c(x) - d(X^t, y) - \xi^t x, \quad X^0 = u, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{22}$$

Здесь x — номинальная стоимость страхового портфеля; $c(x)$ — детерминированные поступления премий в единицу времени от страхового портфеля x; $d(X^t, y) \in [0, X^t]$ — дивидендная стратегия как функция текущего капитала и параметра y; $\{\xi^t, t = 0, 1, \ldots\}$ — независимые одинаково распределенные (как некоторая случайная величина ξ с функцией распределения F) наблюдения уровня выплат страховых требований. Процесс (22) называется процессом риска. Под событием разорения (или неплатежеспособности) процесса риска будем понимать такие реализации процесса (22), когда $X^t < 0$ для некоторого $t > 0$. Обозначим $\varphi^t(u)$ вероятность неразорения процесса (22) за t шагов при начальном капитале $X^0 = u$:

$$\varphi^t(u) = \Pr\{X^k \geq 0,\ 0 \leq k \leq t,\ X^0 = u\},$$

где $\Pr\{\cdot\}$ — вероятность события, обозначенного в фигурных скобках. Функция φ зависит не только от u, но и от других параметров (x, y) процесса (22). Однако в данном контексте эта зависимость явно не указывается. Последовательность функций $\{\varphi^t(\cdot),\ t = 0, 1, \ldots\}$ удовлетворяет интегральным соотношениям

$$\varphi^1(u) = \Pr\{u + c(x) - d(u) - \xi x \geq 0\} =$$

$$= \Pr\{\xi \leq (u + c(x) - d(u))/x\} = F((u + c(x) - d(u))/x), \tag{23}$$

$$\varphi^{t+1}(u) = \mathrm{E}_\xi \varphi^t(u + c(x) - d(u) - \xi x), \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где E_ξ — оператор математического ожидания (интеграл Лебега по мере, индуцированной случайной величиной ξ), $F(z) = \Pr\{\xi \leq z\}$; по определению $\varphi^t(u) = 0$ при $u < 0$ для всех t.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТРАХОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Вероятность неразорения процесса (22) на бесконечном интервале времени

$$\varphi(u) = \Pr\{X^t \geq 0 \ \ \forall t \geq 0,\ X^0 = u\}$$

удовлетворяет при фиксированном x (интегральному) уравнению

$$\varphi(u) = \mathrm{E}_\xi \varphi(u + c(x) - d(u) - \xi x) =$$

$$= \int\limits_{\{\eta: u + c(x) - d(u) - \eta x \geq 0\}} \varphi(u + c(x) - d(u) - \eta x)\, dF(\eta), \tag{25}$$

где по определению $\varphi(u) = 0$ при $u < 0$. Это линейное интегральное уравнение, которое всегда имеет нулевое решение. Однако интерес представляют условия, при которых существует неубывающее решение $\varphi(\cdot)$ такое, что

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1, \quad \lim_{\{u \to +\infty\}} \varphi(u) = 1. \tag{26}$$

В работах [20, 26] изучаются свойства подобных уравнений и условия существования и единственности такого решения. При этом соотношения (23), (24), по сути, определяют метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения (25).

Заметим, что оператор $A\varphi(u) = \mathrm{E}_\xi \varphi(u + c(x) - d(u) - \xi x)$ в правой части (25) нерастягивающий относительно sup-нормы:

$$||A\varphi_1 - A\varphi_2|| = \sup_{u\geq 0} |A\varphi_1(u,x) - A\varphi_2(u,x)| =$$

$$= \sup_{u\geq 0} |\mathrm{E}_\xi \varphi_1(u + c(x) - d(u) - \xi x, x) - \mathrm{E}_\xi \varphi_2(u + c(x) - d(u) - \xi x, x)| \leq$$

$$\leq \mathrm{E}_\xi \sup_{u\geq 0} |\varphi_1(u + c(x) - d(u) - \xi x, x) - \varphi_2(u + c(x) - d(u) - \xi x, x)| \leq$$

$$\leq \mathrm{E}_\xi \sup_{y\geq 0} |\varphi_1(y,x) - \varphi_2(y,x)| = \mathrm{E}_\xi ||\varphi_1 - \varphi_2|| = ||\varphi_1 - \varphi_2||.$$

Но этот оператор не является сжимающим, поэтому существование и единственность решения уравнения (25), а также сходимость метода последовательных приближений (23), (24) не могут быть выведены из принципа сжимающих отображений.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТРАХОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Пусть $A\varphi(u) = \mathrm{E}_\xi \varphi(u + c(x) - d - \xi x)$ — оператор в правой части (25), где x, d — фиксированные параметры. Предположим, что случайная величина ξ ограничена, $\xi \leq m$ с вероятностью единица. Найдем функцию $\varphi_*(u)$ такую, что $A\varphi_*(u) \geq \varphi_*(u)$ имеет вид $\varphi_*(u) = \max\{0, 1 - e^{-L(u-u_*)}\}$, где L, u_* — искомые константы. Справедливы следующие оценки:

$$A\varphi_*(u) \geq \int_0^{(u+c(x)-d)/x} (1 - e^{-L(u-u_*+c(x)-d-\eta x)}) dF(\eta) =$$

$$= F((u + c(x) - d)/x) - e^{-L(u-u_*)} \int_0^{(u+c(x)-d)/x} e^{L(x\eta + d - c(x))} dF(\eta) \geq$$

$$\geq F((u + c(x) - d)/x) - e^{-L(u-u_*)} \int_0^{+\infty} e^{L(x\eta + d - c(x))} dF(\eta). \qquad (27)$$

Найдем u_*, L такие, что выполнены условия

$$(u_* + c(x) - d)/x \geq m, \quad \int_0^{+\infty} e^{L(x\eta + d - c(x))} dF(\eta) \leq 1,$$

тогда из (27) для $u \geq u_*$ получаем $A\varphi_*(u) \geq 1 - e^{-L(u-u_*)}$ и, таким образом, для всех $u \geq 0$ имеем $A\varphi_*(u) \geq \max\{0, 1 - e^{-L(u-u_*)}\} = \varphi_*(u)$. Это условие необходимо и достаточно для существования решения задачи (25), (26) [26].

Применив оператор A к ступенчатой функции $\mathbf{1}(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$ получим

$$A\mathbf{1}(u) = \int_0^{(u+c(x)-d)/x} dF(\eta) = F((u + c(x) - d)/x).$$

Если $F(y) < 1$ для всех y, то $A\mathbf{1}(u) < 1$ для всех $u \geq 0$. Это условие достаточно для единственности решения задачи (25), (26). Необходимые условия единственности решения (подобного типа) приведены в [26].

Для процесса (22) рассмотрим ряд аддитивных функционалов полезности и риска. Пусть на каждом шаге процесс (22) характеризуется показателем $r(\cdot,\xi)$, тогда определим аддитивный по траектории процесса функционал

$$V(u,x,y)=\mathrm{E}\sum_{t=0}^{\tau-1}\gamma^t r(X^t,\xi^t),$$

где $0<\gamma<1$, математическое ожидание E вычисляется по всем возможным траекториям процесса, τ — случайный момент разорения процесса, т.е.

$$\tau=\sup\{t:\min_{0\le k<t}X^k\ge 0\}.$$

Заметим, что функция $V(u,x,y)$ зависит от параметров (u,x,y) процесса (22), но не содержит никаких операций супремума или инфимума в отличие от стандартной функции оптимальности Беллмана. Если функция $r(\cdot)$ растет не быстрее, чем линейная, то функция $V(\cdot,x,y)$ удовлетворяет уравнению [27]

$$V(u,x,y)=\mathrm{E}_\xi r(u,\xi)+\gamma\mathrm{E}_\xi V(u+c(x)-d(u,y)-x\xi,x,y), \tag{28}$$

где $V(u,x,y)=0$ при $u<0$. Отметим, что в отличие от стандартного уравнения Беллмана в правой части (28) не содержится никаких операций супремума или инфимума.

Если $r(\cdot)$ полунепрерывна сверху, а $c(x)$ и $d(u,y)$ непрерывны по своим аргументам, то $V(u,x,y)$ полунепрерывна сверху и для каждой фиксированной пары (x,y) ее значения можно найти методом последовательных приближений [27]:

$$V^{k+1}(u,x,y)=r(u)+\gamma\mathrm{E}_\xi V^k(u+c(x)-d(u,y)-\xi x,x,y),$$

$$V^0(u,x,y)=0,\ k=0,1,\ldots \tag{29}$$

Например, если

$$r_0(X^t)=\begin{cases}d(X^t,y), & X^t\ge 0,\\ 0, & X^t<0,\end{cases}$$

то средние дисконтированные дивиденды до момента разорения выражаются как

$$V_0(u,x,y)=\mathrm{E}\sum_{t=0}^{\tau-1}\gamma^t d(X^t,y)$$

и функция $V_0(\cdot,x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$V_0(u,x,y)=d(u,y)+\gamma\mathrm{E}_\xi V_0(u+c(x)-d(u,y)-x\xi,x,y).$$

Если

$$r_1(X^t)=\begin{cases}1, & X^t\ge 0,\\ 0, & X^t<0,\end{cases}$$

то среднее дисконтированное время жизни процесса

$$V_1(u,x,y)=\mathrm{E}\sum_{t=0}^{\tau-1}\gamma^t$$

удовлетворяет уравнению

$$V_1(u, x, y) = 1 + \gamma \mathrm{E}_\xi V_1(u + c(x) - d(u, y) - x\xi, x, y).$$

Если

$$r_2(X^t, \xi^t) = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{X^t + c(x) - d(X^t, y) - \xi^t x < 0\}}, & X^t \ge 0, \\ 0, & X^t < 0, \end{cases}$$

то (дисконтированная) вероятность разорения

$$V_2(u, x, y) = \mathrm{E} \sum_{t=0}^{\tau-1} \gamma^t \mathbf{1}_{\{X^t + c(x) - d(X^t, y) - \xi^t x < 0\}}$$

удовлетворяет уравнению

$$V_2(u, x, y) = \mathrm{E}_\xi \mathbf{1}_{\{u + c(x) - d(u, y) - \xi x < 0\}} + \gamma \mathrm{E}_\xi V_2(u + c(x) - d(u, y) - \xi x, x, y) =$$

$$= (1 - F((u + c(x) - d(u, y)) / x) + \gamma \mathrm{E}_\xi V_2(u + c(x) - d(u, y) - \xi x, x, y),$$

где $F(z) = \Pr\{\xi \le z\}$.

ВЕКТОРНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ РИСКА

Задача векторного оптимального управления процессом риска (22) состоит в поиске недоминируемых значений векторного показателя $\vec{\mathbf{V}}(u, x, y) = \{V_i(u, x, y),$ $i = 0, 1, \ldots\}$:

$$\vec{\mathbf{V}}(u, x, y) \to \mathrm{extr}_{(u,x) \in W,\ y \in Y}, \qquad (30)$$

а также соответствующих парето-оптимальных значений параметров (u, x, y), где u обозначает начальное значение процесса риска (22), x описывает структуру страхового портфеля, а параметр y определяет выбор дивидендной стратегии. Например, из эвристических соображений для числовой аппроксимации парето-оптимальной границы рассматривают так называемые барьерно-пропорциональные стратегии управления дивидендными отчислениями, т.е. $d(x, y) = y_1 \max\{0, x - y_2\}$, $y = (y_1, y_2)$, $y_1 \in [0, 1]$, $y_2 \ge 0$.

Сложность данной задачи состоит в том, что, во-первых, сами показатели $V_i(u, x, y)$ не известны в явном виде, а являются решениями соответствующих интегральных уравнений, во-вторых, эти показатели могут быть невыпуклыми функциями, в-третьих, соответствующее парето-оптимальное множество может иметь весьма сложную структуру.

Значения функций $V_i(u, x, y)$ можно найти методом последовательных приближений (29) или методом статистических испытаний, в частности их параллельными версиями.

При небольших размерностях вектора параметров (u, x, y) задачу (30) можно приближенно решить с помощью дискретной аппроксимации множеств W, Y конечными множествами W^N, Y^N и решения дискретной задачи векторной оптимизации

$$\vec{\mathbf{V}}(u, x, y) \to \mathrm{extr}_{(u,x) \in W^N,\ y \in Y^N}.$$

Подобный метод решения задач векторной оптимизации рассмотрен в работе [28], его сходимость исследована в работах [29–31].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дан обзор концептуальных оптимизационных моделей страховой деятельности, построенных на основе парадигмы стохастического программирования. Функционирование страховых компаний описывается случайным процессом эволюции капитала в дискретном времени. Основной случайной фактор эволюции — страховые требования. Основными характеристиками функционирования компаний являются показатели средней эффективности, например ожидаемой доходности, и показатели риска, например вероятности неплатежеспособности или величины необходимого заемного капитала. Рассмотрены одно-, двух- и многоэтапные модели, а также многокритериальные постановки. Сложность возникающих оптимизационных задач обусловлена наличием не только случайных параметров, но и невыпуклостью задач. Кроме того, сами показатели функционирования страховых компаний не известны в явном виде, а являются либо многомерными интегралами типа математического ожидания, либо решениями интегральных уравнений страховой математики. Эти обстоятельства трансформируют задачу оптимизации страховой деятельности в непростую вычислительную проблему. В работе предлагаются подходы к решению данных задач на основе методов стохастического программирования, целочисленного программирования, многокритериальной оптимизации и динамического программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. Modern actuarial risk theory. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 309 p.
2. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial mathematics. Chicago: Society of Actuaries, 1997. 730 p.
3. de Finetti B. Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XV-th International Congress of Actuaries*. New York: Actuarial Society of America, 1957. Vol. 2. P. 433–443.
4. Beard R.E., Pentikainen T., Pesonen E. Risk theory. The stochastic basis of insurance. 3-rd ed. London; New York: Chapman and Hall, 1984. 408 p.
5. Наконечный А.Н. Оптимизация процессов риска. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 5. С. 42–48.
6. Любченко Г.И., Наконечный А.Н. Методы оптимизации сложных пуассоновских процессов риска. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 2. С. 87–96.
7. Bayraktar E., Young V. Maximizing utility of consumption subject to a constraint on the probability of lifetime ruin. *Finance and Research Letters*. 2008. Vol. 5, Iss. 4. P. 204–212. DOI: 10.1016/j.frl.2008.08.002.
8. Schmidli H. Stochastic control in insurance. London: Springer-Verlag, 2008. 254 p.
9. Норкин Б.В. Об оптимизации портфеля страховых договоров. *Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика*. 2011. № 1–2. С. 197–203. URL: https://www.researchgate.net/publication/260869967_On_optimization_of_insurance_portfolio.
10. Норкин Б.В. Математические модели оптимизации страхового дела. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 1. С. 128–145. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/72208/11-Norkin.pdf?sequence=1.
11. Громов А.Н. Оптимальная стратегия перестрахования и инвестирования. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*. 2013. Вып. 2. С. 6–12. URL: https://cyberleninka.ru/article/v/optimalnaya-strategiya-perestrahovaniya-i-investirovaniya.
12. Asmussen S., Albrecher H. Ruin probabilities. Sec. Ed. London: World Scientific, 2010. 602 p.

13. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2011. 620 с.

14. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. К.: Інформтехніка, 1995. 380 с.

15. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A. Lectures on stochastic programming: Modeling and theory. Philadelphia: SIAM, 2009. 442 p.

16. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. Москва: Наука, 1976. 240 с.

17. Кан Ю.С., Кибзун А.Н. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. Москва: Физматлит, 2009. 372 с.

18. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. Москва: Сов. радио, 1979. 392 с.

19. Powell W.B. Clearing the jungle of stochastic optimization. *INFORMS Tutorials in Operations Research*. Published online: 27 Oct. 2014. P. 109–137. http://dx.doi.org/10.1287/ educ.2014.0128.

20. Норкін Б.В. Числові методи розв'язання стохастичних задач оптимізації у страховій математиці. Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2015. 36 с.

21. *Фориншурер.* URL: https://forinsurer.com/ratings/nonlife.

22. Ermoliev Y.M., Ermolieva T.Y., MacDonald G., Norkin V.I. Stochastic optimization of insurance portfolios for managing exposure to catastrophic risks. *Ann. Oper. Res*. 2000. Vol. 99. P. 207–225. https://doi.org/10.1023/A:1019244405392.

23. Ruszczynki A. Probabilistic programming with discrete distributions and precedence constrained knapsack polyhedral. *Math. Program*. 2002. Vol. 93. P. 195–215. DOI: 10.1007/s10107-002-0337-7.

24. Норкин В.И., Бойко С.В. Оптимизация финансового портфеля на основе принципа безопасности. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 2. С. 29–41. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/84030/02-Norkin.pdf?sequence=1.

25. Norkin B.V. Random search of multicriterion optimum in insurance. *Proc. of the 4-th Intern. Scientific Conf. of Students and Young Scientists* "*Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics*" (TAAC-2011. Kyiv, Nov. 24–28, 2014). Kyiv: Bukrek, 2014. P. 176–187. URL: https://www.researchgate.net/publication/301764924_Random_Search_of_Multicriterion_Optimum _in_Insurance.

26. Норкин Б.В. Необходимые и достаточные условия существования и единственности решений интегральных уравнений страховой математики. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. № 5. С. 157–164.

27. Норкин Б.В. Стохастическое оптимальное управление процессами риска с липшицевыми функциями выигрыша. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 139–154. URL: http://www.kibernetika.org/volumes/2014/numbers/05/articles/15/15.pdf.

28. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Дрофа, 2006. 176 с.

29. Norkin B.V. Sample approximations of multiobjective stochastic optimization problems. Optimization-online, Nov. 2014. URL: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2014/ll/4655.html.

30. Norkin B.V. Statistical approximation of multicriteria stochastic optimization problems. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2015. № 4. С. 35–41. https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.04.035.

31. Norkin B.V. On the approximation of vector optimization problems. *Кибернетика и вычислительная техника*. 2015. Вып. 179. С. 35–42. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/86145/03-Norkin.pdf?sequence=1.

Надійшла до редакції 26.03.2019

Ю.М. Єрмольєв, В.І. Норкін, Б.В. Норкін

СТОХАСТИЧНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Анотація. Наведено огляд стохастичних оптимізаційних моделей страхової математики і методів їхнього розв'язання на основі методології багатокритерійного стохастичного програмування та оптимального керування. Еволюція капіталу страхової компанії розглядається в дискретному часі. Основними випадковими параметрами моделей є рівні страхових виплат, тобто відношення сплачених страхових вимог до відповідних премій за одиницю часу. Змінні оптимізації — структура страхового портфеля (структура валової премії) та розмір дивідендів. Критеріями ефективності є показники прибутковості страхового бізнесу, а показниками ризику — ймовірність розорення та капітал, необхідний для запобігання розоренню. Метою оптимізації є пошук парето-оптимальних рішень. Запропоновано методи знаходження цих рішень.

Ключові слова: страхова математика, процес ризику, ймовірність розорення, стохастичне програмування, багатокритерійні задачі, двоетапні задачі, імовірнісні обмеження, стохастичне оптимальне керування, частково-цілочислове програмування, динамічне програмування.

Yu.M. Ermoliev, V.I. Norkin, B.V. Norkin

STOCHASTIC OPTIMIZATION MODELS OF ACTUARIAL MATHEMATICS

Abstract. The paper overviews stochastic optimization models of actuarial mathematics and methods for their solution from the point of view of the methodology of multicriteria stochastic programming and optimal control. The evolution of the capital of an insurance company is considered in discrete time. The main random parameters of the models are payment levels, i.e., the ratio of paid claims to the corresponding premiums per unit of time. Optimization variables are the structure of the insurance portfolio (the gross premium structure) and the size of dividends. As efficiency criteria indicators of the profitability of the insurance business are used, and, as risk indicators the probability of ruin and the recourse capital necessary to prevent the ruin are taken. The goal of optimization is to find Pareto-optimal solutions. Methods for finding these solutions are proposed.

Keywords: insurance mathematics, risk process, ruin probability, stochastic programming, multicriteria problems, two-stage problems, probabilistic constraints, stochastic optimal control, mixed-integer programming, dynamic programming.

Ермольев Юрий Михайлович,
академик НАН Украины, профессор, научный сотрудник Международного института прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия, e-mail: ermoliev@iiasa.ic.it.

Норкин Владимир Иванович,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, профессор кафедры Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», e-mail: vladimir.norkin@gmail.com.

Норкин Богдан Владимирович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: bogdan.norkin@gmail.com.