

О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЫСОКОНАГРУЖЕННЫХ ШАХТНЫХ КОПРОВ

д.т.н. Грядущий Б.А., д.т.н. Дворников В.И., к.т.н. Кудрейко Н.А. (НИИ горной механики им. М.М. Федорова), инж. Карпунова Е.В. (ЭЦЦ Минтопэнерго, г. Донецк)

Розглянуті питання подовжніх коливань в елементах конструкції металевих копрів під дією зовнішніх навантажень.

Приведена математична модель спектра власних частот і форм коливань дозволяє застосувати метод кінцевих різниць для оцінювання парціальної кінетичної енергії дискретних мас.

ON THE LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF HIGH-LOADED MINE HEADFRAMES

Gryadushii V.B., Dvornikov V.I., Kudreyko N.A., Karpunova E.V.

Appointed the questions of longitudinal vibration at componentry of constructions of metal shaft headgear under the action external loading.

Offered the mathematical model of determination of spectrum own frequency and forms of vibration is allow to apply the method of finite differences for estimation parceling kinetic energy of intermittent masses.

Современные шахтные металлические копры представляют собой решетчатую сварную конструкцию, основными грузонесущими элементами которой являются вертикальные стойки (*шпангоуты*) и наклонные упоры (*откосы*). Динамическое состояние такой системы жестких взаимосвязанных стержней (балок) обусловлено возможностью совместных продольных, крутильных и поперечных колебаний шпангоутов и откосов под действием внешних нагрузок, главными источниками которых являются навешенные в стволе движущиеся подъемные сосуды (скипы, клетки) и подъемная машина, соединенные между собой упругими канатами. Строго говоря, термин «внешние нагрузки» в указанном смысле следует понимать условно, так как в действительности рассматриваемая система «копер-сосуды-машина» представляет собой фактически автономный ансамбль взаимодействующих механизмов, твердых тел и конструкций, для которых «внешними» является лишь гравитационное поле Земли и электромагнитное поле питающей сети.

Разумеется, в такой концепции трудно сразу выявить основные динамические свойства каждой составляющей такой системы, и поэтому вначале следует рассмотреть более простые схематизации, основанные на практических представлениях в рамках *изолирующей абстракции*, что является естественным приемом на начальной стадии развития исследований большинства инженерных проблем.

Так, на первом элементарном этапе, рассмотрим продольные колебания шпангоутов, каждый из которых будем считать в известном смысле «самостоятельным» стержнем, а учет влияния смежных такого же рода элементов осуществим при помощи условных упругих связей и «присоединенных» масс. Подобного типа расчетная схематизация представлена на рис. 1.

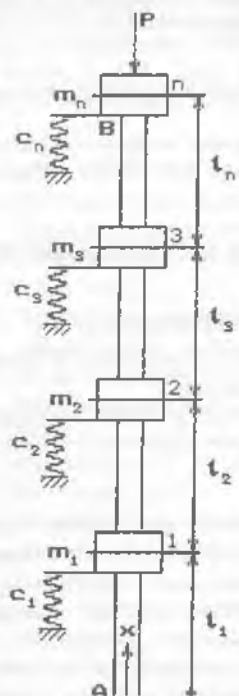


Рис.1. Расчетная схематизация шпангоута в продольных колебаниях.

Здесь шпангоут AB представляет собой в общем случае неоднородный сплошной стержень с «насаженными» на него в точках $1, 2, \dots, n$ на расстояниях l_1, l_2, \dots, l_n сосредоточенными массами m_1, m_2, \dots, m_n , которые имитируют соответствующие массы поперечных связей с соседними шпангоутами, при этом c_1, c_2, \dots, c_n — коэффициенты жесткости указанных связей. Начало лонгальной системы координат x поместим в точке A . Будем считать, что на участках l_1, l_2, \dots, l_n шпангоут имеет соответствующие продольные жесткости EF_1, EF_2, \dots, EF_n и линейные плотности $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, остающиеся постоянными внутри каждого из означенных участков. Предполагается также, что на массу с номером n действует внешняя сила $P(t)$ ($t \geq 0$), в общем случае зависящая от времени.

Считается, что до момента приложения нагрузки при $t = 0$ рассматриваемая система находилась в состоянии статического равновесия под действием массовых сил, то есть сил тяжести.

Наряду с абсолютными лонгальными координатами x введем для каждого из означенных на рис. 1 пролетов собственную относительную или локальную координату s , отсчитываемую от положения статического равновесия соответствующей массы вверх до ближайшей соседней массы, иначе говоря, в любом случае локальная координата s определена на интервале $[0, l_i]$. Все локальные системы координат в силу их определения являются инерциальными.

В рамках принятых допущений и оговорок уравнения динамического состояния стержня в отношении его продольных перемещений на любом i -ом пролете, то есть на участке шпангоута между массами с номерами $i-1$ и i , можно записать в форме [1, 2].

$$EF_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2} - \rho_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (0 \leq s \leq l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где $u_i(s, t)$ – функция продольных перемещений точек шпангоута на рассматриваемом интервале. Заметим, что приведенные уравнения являются однородными, то есть без учета массовых сил, так как динамические перемещения рассматриваются «на фоне» уже сложившегося статического равновесного состояния до момента приложения внешней нагрузки $P(t)$.

Граничными условиями для уравнений (1), очевидно, являются, прежде всего, условия непрерывности перемещений в точках $1, 2, \dots, n-1$. Иными словами, должно иметь место:

$$u_i(l_i, t) = u_{i+1}(0, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2)$$

Кроме того, для каждой из означенных на рис. 1 сосредоточенных масс должны обеспечиваться условия их динамического равновесия, которые запишем в форме уравнений Даламбера [2]:

$$m_i \frac{\partial^2 u_i(l_i, t)}{\partial t^2} + c_i u_i(l_i, t) + EF_i \frac{\partial u_i(l_i, t)}{\partial s} - EF_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(0, t)}{\partial s} = 0 \quad (3)$$

($i = 1, 2, \dots, n-1$)

Для граничных точек A и B имеем соответственно:

$$u_1(0, t) = 0, \quad m_n \frac{\partial^2 u_n(l_n, t)}{\partial t^2} + c_n u_n(l_n, t) + EF_n \frac{\partial u_n(l_n, t)}{\partial s} = -P(t), \quad (4)$$

что отражает отсутствие перемещений на опоре A и условие динамического равновесия массы m_n в точке B .

В качестве начальных условий, как говорилось выше, принимается статическое равновесное состояние шпангоута, то есть

$$u_i(s, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i(s, 0)}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Таким образом, для n уравнений (1) имеем $2n$ граничных условий (2), (3), (4) и $2n$ начальных условий (5), что обуславливает корректность поставленной граничной задачи. Для ее решения рассмотрим однородную граничную задачу (1-4) и применим по отношению к ней формальные символические преобразования

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega_j^2 \quad (j = 1, 2, \dots, \infty), \quad \frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \frac{d}{ds}, \quad u_i(s, t) \rightarrow U_{ji}(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

в результате чего получим следующую граничную задачу о так называемых *собственных функциях* [3, 4]:

$$\left. \begin{aligned} EF_i \frac{d^2 U_{ji}}{ds^2} + \rho_i \omega_j^2 U_{ji} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ U_{ji}(l_i) &= U_{j,i+1}(0) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad U_{ji}(0) = 0, \\ (c_i - \omega_j^2 m_i) U_{ji}(l_i) + EF_i \frac{dU_{ji}(l_i)}{ds} - EF_{i+1} \frac{dU_{j,i+1}(0)}{ds} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ (c_n - \omega_j^2 m_n) U_{jn}(l_n) + EF_n \frac{dU_{jn}(l_n)}{ds} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где ω_j – собственные частоты рассматриваемой системы. Решения граничной задачи (6), удовлетворяющие условиям непрерывности [вторая строка в (6)], построим в следующем специальном виде [5]

$$U_{ji}(s) = \Phi_{ji} \frac{\sin \lambda_i \omega_j s}{\sin \lambda_i \omega_j l_i} - \Phi_{j,i-1} \frac{\sin \lambda_i \omega_j (s - l_i)}{\sin \lambda_i \omega_j l_i} \quad (s \in [0, l_i], \quad i = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

причем $\Phi_{j0} = 0$. Константы Φ_{ji} , по сути дела являющиеся постоянными интегрирования уравнения в первой строке задачи (6), назовем *формами колебаний* шпангоута. Здесь также обозначено $\lambda_i = \rho_i / EF_i$, что представляет собой обратную величину скорости распространения продольной волны колебаний на участке стержня ($s \in [0, l_i]$) ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для удовлетворения остальных граничных условий в задаче (6) введем вначале следующие параметры

$$C_{ji} = EF_i \lambda_i \omega_j \frac{\cos \lambda_i \omega_j l_i}{\sin \lambda_i \omega_j l_i}, \quad C'_{ji} = EF_i \lambda_i \omega_j \frac{1}{\sin \lambda_i \omega_j l_i}, \quad (8)$$

которые назовем *динамическими жесткостями* [6] шпангоута на i -ом его участке соответственно в точках $s = l_i$ и $s = 0$. При этом в силу (7)

$$EF_i \frac{dU_{ji}(0)}{ds} = \Phi_{ji} C'_{ji} - \Phi_{j,i-1} C_{ji}, \quad EF_i \frac{dU_{ji}(l_i)}{ds} = \Phi_{ji} C_{ji} - \Phi_{j,i-1} C'_{ji}, \quad (9)$$

и тогда третья строка задачи (6) представится в виде

$$(c_i + C_{ji} + C_{j+1} - \omega_j^2 m_i) \Phi_{ji} - \Phi_{j-1} C'_{ji} - \Phi_{j+1} C'_{j+1} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (10)$$

а четвертая строка в соответствии с (9) запишется как

$$(c_n + C_{jn} - \omega_j^2 m_n) \Phi_{jn} - \Phi_{j-1} C'_{jn} = 0. \quad (11)$$

Структура соотношений (10) и (11) свидетельствует о том, что совокупность собственных форм Φ_{ji} для каждого номера j удовлетворяет однородной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$(-\omega_j^2 \hat{M} + \hat{C}_j) \Phi_j = 0, \quad (12)$$

где \hat{M} – диагональная квадратная матрица размерности $n \times n$, составленная из чисел m_1, m_2, \dots, m_n ; \hat{C}_j – симметрическая квадратная матрица «ленточного» трехкомпонентного типа размерности $n \times n$, составленная из чисел C_{ji}, C'_{ji} по определенному правилу (см. ниже); Φ_j – матрица-столбец размерности n , составленная из чисел $\Phi_{j1}, \Phi_{j2}, \dots, \Phi_{jn}$. Так, для случая $n = 4$ имеем в качестве примера:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}_j = \begin{pmatrix} c_1 + C_{j1} + C_{j2} & -C'_{j2} & 0 & 0 \\ -C'_{j2} & c_2 + C_{j2} + C_{j3} & -C'_{j3} & 0 \\ 0 & -C'_{j3} & c_3 + C_{j3} + C_{j4} & -C'_{j4} \\ 0 & 0 & -C'_{j4} & c_4 + C_{j4} \end{pmatrix}$$

Алгоритм построения таких матриц очевиден, и не составляет особого труда их записать для сколь угодно большого числа n .

Система однородных уравнений (12), как известно, имеет нетривиальные решения в том единственном случае, когда

$$\det(-\omega_j^2 \hat{M} + \hat{C}_j) = 0, \quad (13)$$

что представляет собой *характеристическое уравнение*, корни которого образуют дискретный спектр собственных частот ω_j .

Компоненты матрицы форм колебаний Φ_j для любого ω_j вычисляются как алгебраические дополнения к элементам любой строки в определителе (13) [7], а так как Φ_j определены с точностью до произвольного постоянного множителя, то представляется целесообразным приведение их к безразмерной форме, что проще всего достигается путем умножения

$$\beta = \sum_{i=1}^n c_i / \prod_{i=1}^n c_i.$$

Собственные функции $U_{j_1}, U_{j_2}, \dots, U_{j_n}$ взаимно ортогональны особым образом, как это будет видно из последующих выкладок, и чтобы это показать, обратимся к уравнениям в первой строке граничной задачи(6) и рассмотрим их с номерами k и j ("штрихи" означают обыкновенные производные по s от соответствующих функций):

$$EF_i U_{ki}'' + \rho_i \omega_k^2 U_{ki} = 0, \quad EF_i U_{ji}'' + \rho_i \omega_j^2 U_{ji} = 0 \quad (k, j = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n).$$

Умножим первое из этих уравнений на U_{ji} , а второе – на U_{ki} , вычислим их разность, результат проинтегрируем по s от 0 до l_i и затем просуммируем по всем i , что в итоге даст

$$\sum_{i=1}^n \left[EF_i \int_0^{l_i} U_{ki}'' U_{ji} ds - EF_i \int_0^{l_i} U_{ji}'' U_{ki} ds + (\omega_k^2 - \omega_j^2) \rho_i \int_0^{l_i} U_{ki} U_{ji} ds \right] = 0.$$

Интегрирование "по частям" в этом выражении приводит к результату:

$$\sum_{i=1}^n EF_i \left[\left(U_{ki}' U_{ji} \Big|_0^{l_i} - U_{ji}' U_{ki} \Big|_0^{l_i} \right) + (\omega_k^2 - \omega_j^2) \rho_i \int_0^{l_i} U_{ki} U_{ji} ds \right] = 0.$$

Учитывая здесь определения (9) и уравнения (10), (11), получим

$$(\omega_k^2 - \omega_j^2) \left[\sum_{i=1}^n \left(m_i \Phi_{ki} \Phi_{ji} + \rho_i \int_0^{l_i} U_{ki} U_{ji} ds \right) \right] = 0.$$

Следовательно, собственные функции $U_{ki}(s)$ в интервале $[0, l_i]$ ортогональны с весом [8]

$$\bar{\rho}_i(s) = \rho_i + m_i \delta_1(s - l_i), \quad (14)$$

а сами соотношения ортогональности собственных функций выглядят следующим образом –

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} U_{ki}(s) U_{ji}(s) \bar{\rho}_i(s) ds = m_2 N_j^2 \delta_{jk}, \quad (15)$$

причем нормировочные коэффициенты N_j^2 вычисляются как

$$N_j^2 = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^n \left(m_i \Phi_{ji}^2 + \rho_i \int_0^{l_i} U_{ji}^2 ds \right). \quad (16)$$

В соотношениях (14) и (15) приняты обозначения: $\delta_1(s-l_i)$ – импульсная функция Дирака; δ_{jk} – символ Кронекера;

$$m_\Sigma = \sum_{i=1}^n (m_i + \rho_i l_i), \quad (17)$$

что представляет собой суммарную массу системы.

В правой части (15) введена суммарная масса m_Σ , определяемая выражением (17), только лишь для того, чтобы нормировочные коэффициенты N_j^2 в соответствии с (16) были безразмерными. Полезно также соотношения ортогональности записать в форме

$$\sum_{i=1}^n \left(\rho_i \int_0^{l_i} U_{ki}(s) U_{ji}(s) ds \right) = m_\Sigma N_j^2 \delta_{jk} - \sum_{i=1}^n m_i \Phi_{ki} \Phi_{ji}. \quad (18)$$

что непосредственно следует из определения (15).

Теперь обратимся к исходной граничной задаче (1-4) и ее решение на каждом из участков l_1, l_2, \dots, l_n построим с помощью полученных собственных функций (по изложенному выше правилу) в форме разложения

$$u_i(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} U_{ji}(s) \psi_j(t), \quad (19)$$

где $\psi_j(t)$ – так называемые координатные функции, которые требуется еще определить. Подстановка (19) в (1) с учетом уравнения в первой строке граничной задачи (6) приводит к выражению

$$\rho_i \sum_{j=0}^{\infty} U_{ji}(s) [\ddot{\psi}_j(t) + \omega_j^2 \psi_j(t)] = 0.$$

Умножим это соотношение на функцию $U_{ki}(s)$, проинтегрируем по s от 0 до l_i , просуммируем по всем i и в итоге получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} [\ddot{\psi}_j(t) + \omega_j^2 \psi_j(t)] \sum_{i=1}^n \rho_i \int_0^{l_i} U_{ki}(s) U_{ji}(s) ds = 0.$$

Интеграл в левой части этого соотношения преобразуем в соответствии с выражением (18), и тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} [\ddot{\psi}_j(t) + \omega_j^2 \psi_j(t)] \left(m_{\Sigma} N_j^2 \delta_{jk} - \sum_{i=1}^n m_i \Phi_{ki} \Phi_{ji} \right) = 0,$$

или с учетом свойств символа Кронекера δ_{jk} —

$$m_{\Sigma} N_k^2 [\ddot{\psi}_k(t) + \omega_k^2 \psi_k(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} [\ddot{\psi}_j(t) + \omega_j^2 \psi_j(t)] \sum_{i=1}^n m_i \Phi_{ki} \Phi_{ji}. \quad (20)$$

Подстановка ряда (19) в граничное условие (2) приводит к тождественному равенству, благодаря условиям во второй строке граничной задачи (6) [отметим также, что в силу принятого равенства $\Phi_{j0} = 0$ обеспечивается первое из граничных условий (4)]. Такая же операция в отношении условий (3) с использованием уравнений в третьей строке задачи (6) и определений функций (7) сводится к соотношению

$$m_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{ji} [\ddot{\psi}_j(t) + \omega_j^2 \psi_j(t)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (21)$$

Наконец, подстановка ряда (19) во второе из граничных условий (4) приводит к функциональному равенству

$$m_n \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{jn} [\ddot{\psi}_j(t) + \omega_j^2 \psi_j(t)] = -P(t). \quad (22)$$

Теперь осталось заменить в (20) соответствующие функционалы на (21) и (22) и в результате получить систему несвязанных уравнений относительно координатных функций $\psi_k(t)$:

$$m_{\Sigma} N_k^2 [\ddot{\psi}_k(t) + \omega_k^2 \psi_k(t)] = -\Phi_{kn} P(t). \quad (23)$$

Решение уравнений (23) в силу начальных условий (5) запишем в форме интеграла Дюамеля [8]:

$$\psi_k(t) = -\frac{\Phi_{kn}}{m_{\Sigma} N_k^2 \omega_k} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau. \quad (24)$$

Таким образом, ряд (19) с определениями (7) и (24) полностью обуславливают корректное решение поставленной задачи, разумеется, если определен спектр собственных частот ω_k из уравнения (13), определены

все числа Φ_{ki} из линейных уравнений (12) и вычислены нормировочные коэффициенты N_k^2 по формуле (16). В ряде случаев удобно иметь дело с *нормированными формами и нормированными функциями*

$$\bar{\Phi}_{ki} = \Phi_{ki} / N_k, \quad \bar{U}_{ki} = U_{ki} / N_k. \quad (25)$$

Именно при такой последней операции, называемой *нормировкой*, обнаруживается особенность входящих в выражение (16) составляющих с учетом преобразований (25)

$$T_{k1} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\Phi}_{ki}^2, \quad T_{k2} = \sum_{i=1}^n \rho_i \int_0^l \bar{U}_{ki}^2 ds, \quad (26)$$

которые по своей физической сути можно интерпретировать с точностью до постоянного множителя как суммы *парциальных* кинетических энергий дискретных тел с массами m_1, m_2, \dots, m_n и кинетических энергий распределенных по длине масс стержня для конкретной собственной частоты ω_k . Упомянутая особенность состоит в том, что T_{k1} и T_{k2} в (26), сумма которых в силу (16) равна независимой от k константе m_2 , существенно отличаются друг от друга при изменении номера k , а именно, при некотором $k = \kappa$ обнаруживается, что $T_{\kappa 1} \gg T_{\kappa 2}$, и это дает основание считать, что именно на частоте ω_κ преобладают амплитуды парциальных колебаний дискретных масс [5, 9, 10]. Для доказательства этого утверждения положим для простоты выкладок, без ущерба физического смысла задачи, что рассматриваемый шпангоут является однородным стержнем, в котором при всех i имеют место равенства $\rho_i = \rho$ и $EF_i = EF$, и, кроме того $l_i = l$, $m_i = m$, $c_i = c$. Тогда $\lambda_i^2 = \lambda^2 = \rho / EF$ и в силу (8) $C_{ji} = C_j$, $C'_{ji} = C'_j$. В результате таких упрощений уравнения (10) и (11) запишутся в виде

$$(c + 2C_j - \omega_j^2 m) \Phi_{ji} - \Phi_{j-1} C'_j - \Phi_{j+1} C'_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (27)$$

$$(c + C_j - \omega_j^2 m) \Phi_{jn} - \Phi_{j-1} C'_j = 0, \quad \Phi_{j0} = 0. \quad (28)$$

Уравнения (27) можно рассматривать как линейные *конечноразностные* уравнения с граничными условиями (28) [11]. Поэтому их решения представим в традиционной форме как

$$\Phi_{ji} = A_j \gamma_j^i, \quad (29)$$

где A_j — некоторая независимая от i константа. Тогда относительно γ_j при подстановке (29) в (27) получим алгебраическое уравнение второго порядка *возвратного* типа

$$\gamma_j^2 - 2\varphi_j \gamma_j + 1 = 0, \quad (30)$$

где обозначено

$$\varphi_j = \frac{c + 2C_j - \omega_j^2 m}{2C_j'}, \quad (31)$$

откуда определяются два значения γ_{j1} и γ_{j2} , которые в силу свойств уравнения (30) связаны между собой очевидным соотношением $\gamma_{j1} = 1/\gamma_{j2}$. Обозначая в дальнейшем $\gamma_{j1} = \gamma_j$ и представив в силу (30)

$$\gamma_j = \varphi_j + \sqrt{\varphi_j^2 - 1}, \quad (32)$$

запишем согласно (29) общее решение уравнения (27) в форме

$$\Phi_{\mu} = A_j \gamma_j^i + B_j \gamma_j^{-i}, \quad (33)$$

причем постоянные A_j и B_j определим с помощью граничных условий (28) при $i = 0$ и $i = n$:

$$A_j + B_j = 0, \quad (c + C_j - \omega_j^2 m)(A_j \gamma_j^n + B_j \gamma_j^{-n}) - (A_j \gamma_j^{n-1} + B_j \gamma_j^{-n+1})C_j' = 0, \quad (34)$$

откуда следует частотное уравнение

$$(c + C_j - \omega_j^2 m)(\gamma_j^n - \gamma_j^{-n}) - (\gamma_j^{n-1} - \gamma_j^{-n+1})C_j' = 0, \quad (35)$$

если сюда вместо γ подставить его выражение согласно (32). Заметим, что при всех ω_j , являющихся корнями уравнения (35), выражение (32) приводит к комплексным значениям γ_j , и тогда обе разности $(\gamma_j^n - \gamma_j^{-n})$ и $(\gamma_j^{n-1} - \gamma_j^{-n+1})$ в (35) оказываются мнимыми, но в целом частотное уравнение, таким образом, будет содержать лишь действительные компоненты. Иными словами, частотное уравнение (35) можно представить в форме

$$(c + C_j - \omega_j^2 m) \sin n\theta_j - C_j' \sin(n-1)\theta_j = 0, \quad (36)$$

где θ_j – аргумент комплексного числа γ_j , то есть

$$\theta_j = \arctg \sqrt{\varphi_j^2 - 1}. \quad (37)$$

Важным является также то обстоятельство, что формы Φ_{ji} в силу (33) и первого уравнения из (34) определены с точностью до постоянного множителя A_j , однако нормировка (25) устраняет эту неоднозначность. В частности, при комплексных γ_j при помощи (37) запишем

$$\Phi_{ji} = A_j \sin i\theta_j. \quad (38)$$

Как видно, применение методов конечных разностей значительно упрощает процедуру определения спектра собственных частот и собственных форм, минуя громоздкие операции раскрытия определителя (12) и вычисления алгебраических дополнений к его элементам.

Для численного моделирования динамических состояний удобно ввести следующие безразмерные параметры

$$\sigma = cl/(EF), \quad \zeta = m/(\rho l), \quad \mu_j = \lambda \omega_j l, \quad (39)$$

и тогда характеристическое уравнение (36) с учетом определений динамических жесткостей (8) представится в виде

$$[(\sigma / \mu_j - \zeta \mu_j) \sin \mu_j + \cos \mu_j] \sin n\theta_j - \sin(n-1)\theta_j = 0,$$

и при этом выражение (31) запишется в форме

$$\varphi_j = \frac{1}{2}(\sigma / \mu_j - \zeta \mu_j) \sin \mu_j + \cos \mu_j.$$

Отношение парциальных кинетических энергий $\eta_j = T_{j1}/T_{j2}$, определяемых соотношениями (26), можно записать в следующем виде:

$$\eta_j = \frac{4\zeta \mu_j \sin^2 \mu_j \sum_{i=1}^n \overline{\Phi_{ji}^2}}{\sum_{i=1}^n [(2\mu_j - \sin 2\mu_j)(\Phi_{ji}^2 - 2\Phi_{ji}\Phi_{j,i-1} \cos \mu_j + \Phi_{j,i-1}^2) + 4\Phi_{ji}\Phi_{j,i-1} \sin^3 \mu_j]}$$

На рис. 2 в форме гистограмм представлены значения η_j , вычисленные при $n = 10$ для первых 100 собственных частот ω_j (μ_j), причем здесь принято $\sigma = 1/2$, $\zeta = 1$. Отсюда явно видно, что, во-первых, собственные частоты группируются по n значений в обособленных (локальных) областях (5 четных областей на рисунке представлены постепенно убывающими числами η_j), и, во-вторых, при определенных частотах действительно имеет место превалирование парциальной кинетической энергии дискретных масс.

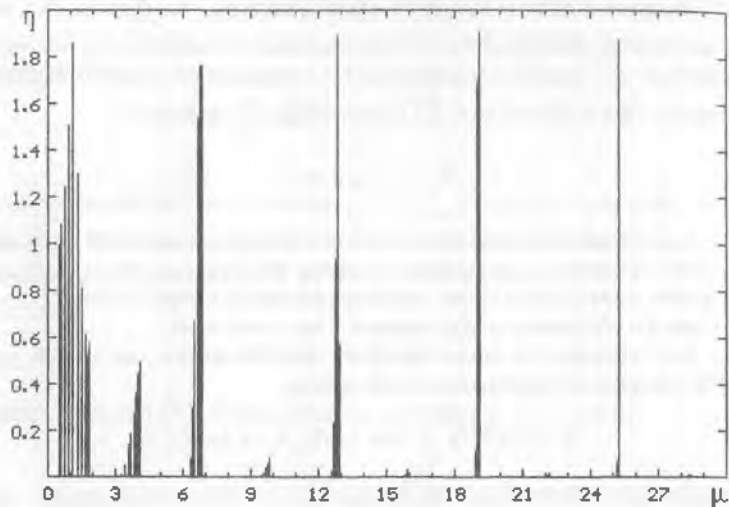


Рис.2. Гистограммы отношений парциальных кинетических энергий.

Это обстоятельство играет важную роль для построения приближенных методов изучения динамических состояний копров, что составит предмет наших дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович И. М. Основы строительной механики. – М.: Государственное изд-во литературы по строительству и строительным материалам, 1960. – 519 с.
2. Новацкий В. Динамика сооружений. М.: ГСИ, 1963. – 376 с.
3. Вибрации в технике. – М.: «Машиностроение», 1978, Т. 1 – 208 с.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 550 с.
5. Дворников В. И. Теория и моделирование динамического состояния шахтного подъемного комплекса. Дис... докт. техн. наук. – Донецк, 1989. – 385 с.
6. Дворников В. И., Карцелин Е.Р., Трибухин В.А., Савенко Э.С. Динамические жесткости канатов шахтных подъемных установок. В сб. Стальные канаты, Вып. 3, Одесса, 2003, с. 22-31.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М: Наука. 1973. – 208 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М. – Наука, 1968. – 720 с.
9. Дворников В. И. Об уравнениях движения шахтного подъемного сосуда с учетом масс проводниковой системы. Известия ВУЗов, Горный журнал, № 1, 1975.

10. Дворников В. И. Некоторые вопросы теории функций Грина одномерных краевых задач. «Прикладная механика», т.ХІ, вып. 3, Киев, 1974.
11. Дворников В. И. Собственные формы и частоты колебаний многопролетных балок на упругих опорах. «Прикладная механика», т.Х, вып.9, Киев, 1974.