УДК 517.98

Р. В. Грушевой

Про унітаризацію нерозкладних зображень примітивних частково впорядкованих множин скінченного типу

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. С. Самойленком)

Для кожної примітивної частково впорядкованої множини скінченного типу наведено набір характерів, яких достатньо для унітаризації всіх нерозкладних зображень даної множини.

Теорія зображень частково впорядкованих множин (чвм) у лінійних векторних просторах є однією з класичних тематик лінійної алгебри (див. [1, 2] та ін.).

З іншого боку, при вивченні унітарних зображень чвм в гільбертових просторах з точністю до унітарної еквівалентності майже відразу виникають дуже складні $*$-дикі задачі (у сенсі [3, 4]). Так, опис усіх трійок підпросторів $S = (H; H_1, H_2, H_3)$ таких, що $H_2 \subset H_3$ з точністю до унітарної еквівалентності — вже $*$-дика задача (див. [5]). Але якщо розглядати зображення примітивних чвм у гільбертових просторах, додавши лінійне співвідношення

$$\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = \gamma I, \qquad \alpha_k > 0, \qquad k = 1, \dots, n; \qquad \gamma > 0,$$

що пов'язує ортопроектори P_k $(k = 1, \dots, n)$ на відповідні підпростори, то виникає теорія, близька до теорії зображень чвм у лінійних просторах. Більше того, у випадку примітивних чвм скінченного типу кожне нерозкладне лінійне зображення такої чвм унітаризується з певними характерами $\chi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n; \gamma)$, тобто еквівалентне ортоскалярному зображенню з характером χ. У роботі [6] для кожного нерозкладного зображення примітивних чвм скінченного типу описується множина характерів, з якими воно унітаризується (див. п. 1).

Мета даної роботи — для кожної примітивної чвм скінченного типу описати такий набір характерів, якого вже достатньо для унітаризації всіх нерозкладних зображень цієї чвм.

1. Про унітаризацію зображень частково впорядкованих множин. Частково впорядкована множина $\mathcal{P}$ називається *примітивною* і позначається $(k_1, \dots, k_m)$, якщо це кардинальна сума m лінійно впорядкованих множин, що мають потужність $k_1, \dots, k_m$ відповідно. У цій роботі розглядатимемо тільки такі чвм.

Зображенням (лінійним зображенням) π чвм $\mathcal{P}$ у скінченновимірному комплексному векторному просторі $V = V(\pi)$ (розглядатимемо над полем $\mathbb{C}$) називають відповідність, за якою кожному елементу a_i множини $\mathcal{P}$ ставиться у відповідність підпростір V_i векторного простору V, причому $V_i \subseteq V_j$, якщо $a_i \prec a_j$ в $\mathcal{P}$.

Позначатимемо зображення таким чином: $\pi = (V; V_1, \dots, V_n)$, де n — потужність чвм. Вектор $D = (d; d_1, d_2, \dots, d_n)$, де $d = \dim V$, $d_i = \dim V_i$, $i = 1 \dots n$, називають розмірністю зображення π чвм $\mathcal{P}$. Зображення чвм розглядаються з точністю до еквівалентності. Два зображення $\pi = (V; V_1, \dots, V_n)$ та $\widetilde{\pi} = (\widetilde{V}; \widetilde{V}_1, \dots, \widetilde{V}_n)$ еквівалентні, якщо існує ізоморфізм просторів $C \colon V \to \widetilde{V}$ такий, що $C(V_i) = \widetilde{V}_i$ для всіх $a_i \in \mathcal{P}$. Кажуть, що зображення π є *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі нетривіальних зображень цієї чвм. Інакше зображення називається *нерозкладним*.

Чвм $\mathcal{P}$ має *скінченний (лінійний) зображувальний тип*, якщо існує лише скінченна кількість нерозкладних зображень чвм $\mathcal{P}$ з точністю до еквівалентності. Відомо (див. [2]), що примітивні чвм скінченного типу вичерпуються такими: (k) для всіх $k \in \mathbb{N}$ (лінійно впорядковані множини); (k_1, k_2) для всіх k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$; $(k, 1, 1)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$; $(2, 2, 1)$; $(3, 2, 1)$; $(4, 2, 1)$.

Унітарним зображенням чвм $\mathcal{P}$ називається таке зображення $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$, для якого $V = H$ — унітарний простір і елементам чвм відповідають його підпростори. При цьому унітарні зображення розглядаються з точністю до *унітарної еквівалентності* (оператор C в означенні еквівалентності має бути унітарним).

Унітарне зображення $\pi = (H; H_1, \ldots, H_n)$ називається *незвідним*, якщо W^*-алгебра, породжена ортопроекторами $\{P_k\}$ на підпростори $\{H_k\}$, збігається з $\mathcal{L}(H)$. При цьому задача опису всіх незвідних зображень з точністю до унітарної еквівалентності є $*$-дикою для всіх чвм крім дуже вузького класу (серед примітивних не $*$-дикими є задачі опису всіх незвідних зображень, з точністю до унітарної еквівалентності лише для ланцюгів і множини $(1, 1)$), зокрема для $\mathcal{P} = (1, 2)$ вже неможливо описати всі незвідні зображення з точністю до унітарної еквівалентності (див. [5]).

Далі ми розглядатимемо такі зображення, для яких виконується умова

$$\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = \gamma I, \tag{1}$$

де α_i, $i = 1, \ldots, n$; γ — додатні дійсні числа. Такі зображення утворюють підкатегорію в категорії унітарних зображень. Називатимемо їх (додержуючись [7]) *ортоскалярними*, а набори $\chi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \gamma)$ — характерами відповідних зображень.

Кажуть, що чвм $\mathcal{P}$ має *скінченний гільбертів тип*, якщо для будь-якого характеру χ існує лише скінченна кількість незвідних ортоскалярних зображень чвм $\mathcal{P}$ з характером χ з точністю до унітарної еквівалентності.

Як і в лінійному випадку, примітивна чвм $\mathcal{P}$ має скінченний гільбертів тип тоді і тільки тоді, коли вона не містить жодної з чвм $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 5)$, тобто тоді і тільки тоді, коли вона має скінченний лінійний тип (див., напр., [8]).

Кажуть, що лінійне зображення $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$ чвм $\mathcal{P}$ *унітаризується з характером* $\chi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \gamma) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, якщо в просторі V можна ввести скалярний добуток $(\cdot, \cdot)$ таким чином, щоб ортопроектори на відповідні підпростори $P_i \colon V \to V$ задовольняли співвідношення (1) (див. [9]).

Зауваження 1. Лінійне зображення π чвм $\mathcal{P}$ унітаризується з характером χ тоді і тільки тоді, коли воно еквівалентне деякому ортоскалярному зображенню Π цієї чвм з характером χ.

З роботи [7] безпосередньо випливає, що унітаризація зображень примітивних чвм з фіксованим характером χ чвм єдина з точністю до унітарної еквівалентності, якщо вона існує.

Зауваження 2. Лінійне зображення π може, взагалі кажучи, унітаризуватися з багатьма різними характерами. Опис усіх характерів, з якими унітаризуються зображення всіх примітивних чвм скінченного типу, наведено в роботі [6], а чвм $(1, 1, 1, 1)$ — в роботі [9].

Зауваження 3. Нескладно навести приклад, коли ортоскалярні зображення з різними характерами, яким еквівалентне зображення π, можуть бути унітарно нееквівалентними.

2. Про характери, з якими унітаризуються всі нерозкладні зображення примітивних чвм скінченного типу. Наведена нижче теорема для кожної з примітивних чвм скінченного типу $\mathcal{P}$ дає опис характерів $\Sigma_{\mathcal{P}}$, яких вже достатньо для того, щоб кожне нерозкладне лінійне зображення чвм $\mathcal{P}$ унітаризувалось з характером з $\Sigma_{\mathcal{P}}$.

Теорема 1. *Для чвм $\mathcal{P}$ кожне нерозкладне лінійне зображення унітаризується з деяким характером з множини $\Sigma_{\mathcal{P}}$:*

- $\forall\, k \in \mathbb{Z}$: $\Sigma_{(k)} = \{(1,\ldots,1;\gamma) \mid \gamma = 0,1,\ldots,k\}$;
- $\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$: $\Sigma_{(k_1;k_2)} = \{(1,\ldots,1;1,\ldots,1;\gamma) \mid \gamma = 0,1,\ldots,k_1+k_2\}$;
- $\forall\, k \in \mathbb{Z}$: $\Sigma_{(k;1;1)} = \{(1,\ldots,1;1;1;\gamma) \mid \gamma = 0,1,\ldots,k+2\} \bigcup$

  $\bigcup \left\{(1,\ldots,1;l_1;l_1;\gamma) \mid \gamma = \frac{3}{2}l_1, \frac{3}{2}l_1 + l_2,\ \text{де } l_1, l_2 = 0,\ldots,k,\ \text{і } l_1 + l_2 \leqslant k\right\}$;
- $\Sigma_{(2;2;1)} = \left\{(1,1;1,1;1;\gamma) \mid \gamma = 0,1,\dfrac{3}{2},2,\dfrac{7}{3},\dfrac{5}{2},\dfrac{8}{3},3,\dfrac{7}{2},4,5\right\} \bigcup \{(1,1;1,1;2;3)\} \bigcup$

  $\bigcup \{(1,1;1,2;2;3)\} \bigcup \{(1,2;1,1;2;3)\} \bigcup \{(2,1;1,1;2;4)\} \bigcup \{(1,1;2,1;2;4)\}$;
- $\Sigma_{(3;2;1)} = \left\{(1,1,1;1,1;1;\gamma) \mid \gamma = 0,1,\dfrac{3}{2},2,\dfrac{7}{3},\dfrac{5}{2},\dfrac{8}{3},3,\dfrac{10}{3},\dfrac{7}{2},\dfrac{11}{3},4,\dfrac{9}{2},5,6\right\} \bigcup$

  $\bigcup \left\{(1,1,1;1,1;2;\gamma) \mid \gamma = 3, \dfrac{17}{4}\right\} \bigcup \{(1,1,1;1,2;2;3)\} \bigcup \{(1,1,2;1,1;2;3)\} \bigcup$

  $\bigcup \{(2,1,1;1,1;2;4)\} \bigcup \{(1,1,1;2,1;2;\gamma) \mid \gamma = 4,\}$;
- $\Sigma_{(4;2;1)} = \left\{(1,1,1,1;1,1;1;\gamma) \mid \gamma = 0,1,\dfrac{3}{2},2,\dfrac{7}{3},\dfrac{5}{2},\dfrac{8}{3},3,\dfrac{10}{3},\dfrac{7}{2},\dfrac{11}{3},4,\dfrac{13}{3},\dfrac{9}{2},\dfrac{14}{3},5,\right.$

  $\left.\dfrac{11}{2},6,7\right\} \bigcup \{(1,1,1,1;1,1;2;3)\} \bigcup \{(1,1,1,1;1,2;2;3)\} \bigcup$

  $\bigcup \{(1,1,1,2;1,1;2;3)\} \bigcup \{(2,1,1,1;1,1;2;4)\} \bigcup \{(1,1,1,1;2,1;2;4)\} \bigcup$

  $\bigcup \{(1,1,1,1;1,1;3;4)\} \bigcup \{(1,1,1,1;1,2;3;3)\} \bigcup \{(1,1,1,2;1,1;3;3)\} \bigcup$

  $\bigcup \{(2,1,1,1;1,1;3;4)\} \bigcup \{(1,1,1,1;2,1;3;4)\}$.

Доведення. Для чвм (k) та (k_1, k_2) твердження очевидне, бо всі нерозкладні зображення цих множин одновимірні. Для решти чвм цей факт отримується з опису всіх характерів, з якими унітаризується кожне нерозкладне зображення відповідної чвм (див. теорему 3.2 [6]).

Для кожного нерозкладного зображення фіксованої примітивної чвм скінченного типу, яке з точністю до еквівалентності визначається узагальненою розмірністю, вказані умови на χ, за яких це зображення унітаризується з характером χ. Усі ці умови складаються з певної кількості нерівностей і рівності сліду:

$$\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i d_i + \sum_{j=1}^{k_2} \beta_i d_{k_1+j} + \sum_{l=1}^{k_3} \delta_l d_{k_1+k_2+l} = \gamma d.$$

Таким чином, остання компонента характеру, з яким унітаризується зображення, однозначно визначається за попередніми і вектором узагальненої розмірності даного зображення. Тому далі розглядатимемо замість характерів вектори $\widehat{\chi} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1}; \beta_1, \ldots, \beta_{k_2};$

$\delta_1, \ldots, \delta_{k_3}$). З умов на характери, з теореми 3.2 [6] отримаємо нерівності, які мають задовольняти $\widehat{\chi}$. Отже, для кожного зображення π маємо область D_π в $\mathbb{R}_+^{k_1+k_2+k_3}$, в якій лежать перші $k_1 + k_2 + k_3$ компонент характерів, з якими унітаризується дане зображення.

Розглянемо розбиття нерозкладних зображень чвм $\mathcal{P}$ на групи так, щоб перетин областей D_π за всіма π з фіксованої групи не був порожній і виберемо серед розбиттів те, що має найменшу кількість груп зображень. Візьмемо по одному представнику $\widehat{\chi}$ з кожного такого перетину і доповнимо їх останніми координатами (знайденими з рівностей сліду), отримаємо вказані в умові набори характерів.

Зауваження 4. Якщо вилучити якийсь елемент з набору $\Sigma_{\mathcal{P}}$ знайдеться нерозкладне зображення чвм $\mathcal{P}$, яке не буде унітаризуватись з жодним з характерів, що залишаться.

Автор висловлює щиру подяку проф. Ю. С. Самойленку за постановку задачі та постійну увагу під час написання роботи.

1. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
2. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Там же. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
3. *Krugljak S. A., Samoilenko Yu. S.* On the complexity of description of representations of $*$-algebras generated by idempotents // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – **128**, No 6. – P. 1655–1664.
4. *Ostrovsky V. L., Samoilenko Yu. S.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. I. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – The Gordon and Breach Publ. Group, 1999. – **11**. – P. 163–172.
5. *Кругляк С. А., Самойленко Ю. С.* Унитарная эквивалентность наборов самосопряженных операторов // Функц. анализ и его приложения. – 1980. – **14**, № 1. – С. 60–62.
6. *Grushevoy R., Yusenko K.* On the unitarization of linear representations of primitive partially ordered sets // Oper. Theory: Adv. And Appl. – 2009. – **190**. – P. 279–294.
7. *Кругляк С. А., Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Ортоскалярные представления колчанов в категории гильбертовых пространств // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. Мат. ин-та АН. – 2006. – **338**. – С. 180–201.
8. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Функц. анализ и его приложения. – 2005. – **39**, № 2. – С. 13–30.
9. *Samoilenko Yu. S., Yakymenko D. Y.* n-subspaces in linear and unitary spaces // Methods Funct. Anal. Topology. – 2009. – **15**, No 1. – P. 48–60.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 16.03.2009

R. V. Grushevoy

On the unitarization of indecomposable representations of primitive partially ordered sets of finite type

Some collection of characters sufficient for the unitarization of all indecomposable linear representations of all primitive partially ordered sets of finite type is described.