УДК 510.64 https://doi.org/10.15407/pp2022.03-04.011

ПЕРШОПОРЯДКОВІ СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ЛОГІК КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ З РОЗШИРЕНИМИ РЕНОМІНАЦІЯМИ ТА РІВНІСТЮ

Оксана Шкільняк, Степан Шкільняк

У роботі досліджено нові класи програмно-орієнтованих логік – чисті першопорядкові логіки часткових квазіарних предикатів із розширеними реномінаціями та предикатами строгої рівності й слабкої рівності, названі відповідно $L_{\perp}^{Q\equiv}$ та $L_{\perp}^{Q=}$. Характерними особливостями цих логік є використання композиції розширеної реномінації та спеціальних 0-арних композицій – предикатів-індикаторів наявності значення для змінних та предикатів рівності. Виділено два різновиди предикатів рівності: слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$ та строгої рівності $\equiv_{xy}$. Наведено основні властивості композицій таких логік, описано їхні мови. Визначено відношення логічного наслідку в цих логіках. В $L_{\perp}^{Q=}$ маємо лише одне коректне відношення ${}^{P}{\models}_{IR}$, в $L_{\perp}^{Q\equiv}$ маємо відношення ${}^{P\equiv}{\models}_{IR}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{T}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{F}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{TF}$, ${}^{R\equiv}{\models}_{TF}$. Описано властивості цих відношень, особливу увагу приділено властивостям, пов'язаним із предикатами рівності. Секвенційні числення формалізують відношення логічного наслідку для множин формул, тому властивості цих відношень є семантичною основою побудови секвенційних числень. Для відношення ${}^{P=}{\models}_{IR}$ ми пропонуємо числення $C_{\perp}^{Q=IR}$, а для відношень ${}^{R\equiv}{\models}_{TF}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{TF}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{T}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{F}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{IR}$ – числення $C_{\perp}^{Q\equiv TFR}$, $C_{\perp}^{Q\equiv TF}$, $C_{\perp}^{Q\equiv T}$, $C_{\perp}^{Q\equiv F}$, $C_{\perp}^{Q\equiv IR}$. В роботі наведено базові секвенційні форми цих числень та умови замкненості секвенцій. Описано побудову виведення в таких численнях – секвенційного дерева, вказано особливості застосування форм, пов'язаних із предикатами рівності. Розглянуто теореми про існування контрмоделей на прикладі числення $C_{\perp}^{Q\equiv TFR}$ наведено побудову контрмоделей за незамкненим шляхом у секвенційному дереві. Для пропонованих числень доведено теореми коректності та повноти; водночас доведення теорем повноти спирається на побудову відповідних контрмоделей. У наступних роботах планується дослідити розширення логіки $L_{\perp}^{Q\equiv}$ композицією предикатного доповнення.

Ключові слова: логіка, частковий предикат, рівність, логічний наслідок, секвенційне числення, коректність, повнота.

The paper considers new classes of software-oriented logical formalisms – pure first-order logics of partial quasiary predicates with extended renominations and predicates of strong equality and of weak equality, denoted respectively $L_{\perp}^{Q\equiv}$ and $L_{\perp}^{Q=}$. The characteristic features of the studied logics are using of composition of extended renomination, and special 0-ary predicate compositions that detect if the subject variables or predicates of equality have assigned values. We specify two kinds of equality predicates: the predicate of weak (up to definedness) equality $=_{xy}$, and the predicate of strong equality $\equiv_{xy}$. For the considered logics, main properties of their compositions are given, their languages are described, and various variants of logical consequence relations are defined. For the language $L_{\perp}^{Q=}$ we obtain only one correct relation ${}^{P}{\models}_{IR}$, at the same time for $L_{\perp}^{Q\equiv}$ we have relations ${}^{P\equiv}{\models}_{IR}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{T}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{F}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{TF}$, ${}^{R\equiv}{\models}_{TF}$. We describe properties of the introduced relations, paying special attention to those connected with equality predicates. As sequent calculi formalise logical consequence relations for sets of formulas, properties of the latter become the semantic basis for construction of the respective calculi. Thus, for ${}^{P=}{\models}_{IR}$ we get calculus $C_{\perp}^{Q=IR}$; relations ${}^{R\equiv}{\models}_{TF}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{TF}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{T}$, ${}^{P\equiv}{\models}_{F}$, and ${}^{P\equiv}{\models}_{IR}$ induce calculi $C_{\perp}^{Q\equiv TFR}$, $C_{\perp}^{Q\equiv TF}$, $C_{\perp}^{Q\equiv T}$, $C_{\perp}^{Q\equiv F}$, and $C_{\perp}^{Q\equiv IR}$ respectively. We specify base sequent forms (rules) for the presented calculi, and conditions for sequent closedness. Description of the derivation procedure via sequent tree is given, using of rules concerning equality predicates explained. The counter-model existence theorems are considered; on the example of calculus $C_{\perp}^{Q\equiv TFR}$ we illustrate a counter-model construction by an unclosed path in the sequent tree. For the introduced calculi, the soundness and completeness theorems are proved; the proof of the completeness theorems is based on construction of the respective counter-models. In the future we plan to investigate extending of logic $L_{\perp}^{Q\equiv}$ with the composition of predicate complement.

Keywords: logic, partial predicate, equality, logical consequence, sequent calculus, soundness, completeness.

Вступ

Поняття і методи математичної логіки засвідчують ефективність у розв'язанні широкого кола задач штучного інтелекту, інформатики й програмування. Для цього розроблено багато різноманітних логічних систем (див., напр., [1,2]). Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів [3]. Водночас класична логіка має [4] низку обмежень, що ускладнює її використання. Тому набуває актуальності проблема побудови нових логічних формалізмів, орієнтованих на потреби інформатики й програмування. До таких формалізмів належать композиційно-номінативні логіки (КНЛ) часткових квазіарних предикатів. Різноманітні класи КНЛ описано, зокрема, в [4–10].Дана робота присвячена дослідженню нових класів КНЛ – першопорядкових логік квазіарних предикатів із розширеними реномінаціями та рівністю. Для таких логік запропоновано низку числень секвенційного типу. Секвенційні числення є потужним апаратом побудови виведень. Ефективний пошук виведень необхідний для розв'язання широкого кола задач, що виникають в інформатиці й програмуванні, тому розробка секвенційних числень у програмно-орієнтованих логіках є важливою і актуальною.

Чисті першопорядкові КНЛ (ЧКНЛ) також називаємо L^{Q} (logics of quantifier level). ЧКНЛ із розширеними реномінаціями назвемо $_{\perp}$ЧКНЛ, а також $L_{\perp}^{Q}$. ЧКНЛ з предикатами строгої рівності та слабкої рівності назвемо відповідно $L^{Q\equiv}$ та $L^{Q=}$; $_{\perp}$ЧКНЛ з предикатами строгої рівності та слабкої рівності назвемо $L_{\perp}^{Q\equiv}$ та $L_{\perp}^{Q=}$. ЧКНЛ та їх числення детально описано в низці робіт, зокрема, в [4, 5, 11]. $_{\perp}$ЧКНЛ розглянуто в [6], секвенційні числення таких логік описано в [12]. $L^{Q=}$ та $L^{Q\equiv}$ під назвами ЧКНЛР та ЧКНЛРС вивчались в [7], а також [8]. Безкванторні реномінативні логіки із розширеними реномінаціями та предикатами рівності розглядались у [9, 10].

Метою даної роботи є дослідження відношень логічного наслідку в $L_{\perp}^{Q=}$ і $L_{\perp}^{Q\equiv}$ та побудова для цих відношень секвенційних числень. Такі числення, з одного боку, узагальнюють описані в [12] числення $_{\perp}$ЧКНЛ, а з іншого – описані в [7] числення логік $L^{Q\equiv}$ та $L^{Q=}$. Наведено базові секвенційні форми будованих числень та умови замкненості секвенцій. Для пропонованих числень доведено теореми коректності та повноти. Для доведення теорем повноти використано теореми про існування контрмоделей.

1. Композиційні предикатні алгебри логік $L_{\perp}^{Q=}$ та $L_{\perp}^{Q}$

Для полегшення читання наведемо потрібні для подальшого викладу визначення. Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [5, 8, 12].

Під *V*-*A*-квазіарним предикатом розуміємо часткову неоднозначну функцію вигляду $Q : {}^{V}A \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, ${}^{V}A$ – множина всіх *V*-*A*-іменних множин. *V*-*A*-іменна множина (*V*-*A*-ІМ) визначається [4, 5] як однозначна функція вигляду $d : V \quad A$. Трактуємо V і A як множини предметних імен і предметних значень. Далі *V*-*A*-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$; тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для *V*-*A*-ІМ вводимо теоретико-множинні операції $\cap$ та \, а також [4, 5] операції $\| Z$ та $\|_{-Z}$, де $Z \subseteq V$:
$d \| Z = \{v \mapsto a \in d \mid v \in Z\}$; $d \|_{-Z} = \{v \mapsto a \in d \mid v \notin Z\}$.

Параметризовану за множиною пар імен операцію $\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp, ..., u_m \mapsto \perp]} : {}^{V}A \to {}^{V}A$ розширеної реномінації, де усі $v_i, x_i, u_j\ V$, а символ $\perp \notin V$ означає відсутність значення, задамо так:
$$\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp, ..., u_m \mapsto \perp]}(d) = d \|_{-\{v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m\}} \cup [v_1 \mapsto d(x_1), ..., v_n \mapsto d(x_n)].$$

Зокрема, $\mathrm{r}^{[u \mapsto \perp]}(d) = d \|_{-u}$. Якщо тут $d(x_i)\uparrow$, то компонента з іменем v_i відсутня.

Введемо для $y_1, ..., y_n$ позначення $\bar{y}$. Замість $\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp, ..., u_m \mapsto \perp]}$ стисло пишемо $\mathrm{r}^{v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m}_{x_1, ..., x_n, \perp, ..., \perp}$ та $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp}$.

За умови $d(z)\uparrow$ маємо $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}, y}_{\bar{x}, \perp, z}(d) = \mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}, y}_{\bar{x}, \perp, \perp}(d)$ та $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}, z}_{\bar{x}, \perp, \perp}(d) = \mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp}(d)$.

Послідовне застосування операцій $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{y}, \bar{c}, \perp, \perp}$ та $\mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}}_{\bar{x}, \bar{a}, \perp, \perp}$ можна подати [6] у вигляді однієї $\mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{y}, \perp, \perp, \perp}$, яку назвемо їх *згорткою* та позначимо $\mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}}_{\bar{x}, \bar{a}, \perp, \perp} \bullet^{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{y}, \bar{c}, \perp, \perp}$. Тоді $\mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}}_{\bar{x}, \bar{a}, \perp, \perp}(\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{y}, \bar{c}, \perp, \perp}(d)) = \mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}}_{\bar{x}, \bar{a}, \perp, \perp} \bullet^{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{y}, \bar{c}, \perp, \perp}(d) = \mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{y}, \perp, \perp, \perp}(d)$.

У цій роботі ми будуємо секвенційні числення в логіках неоднозначних (недетермінованих) предикатів *реляційного* типу, або *R*-предикатів. Трактуємо *R*-предикати як відношення (реляції) між множинами ${}^{V}A$ і $\{T, F\}$. Кожний *R*-предикат Q однозначно задається двома множинами: областями *істинності* $T(Q) = \{d \mid TQ(d)\}$ та *хибності* $F(Q) = \{d \mid FQ(d)\}$. Тут $Q(d)$ позначає множину всіх значень, які Q може приймати на аргументі $d \in {}^{V}A$.

Ім'я $x \in V$ *неістотне* для *R*-предиката Q, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^{V}A$ маємо: $d_1 \|_{-x} = d_2 \|_{-x} \Rightarrow Q(d_1) = Q(d_2)$.

V-*A*-квазіарний *R*-предикат Q:
– частковий однозначний, або *P*-предикат, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \varnothing$;
– тотальний, або *T*-предикат, якщо $T(Q) \cup F(Q) = {}^{V}A$;
– тотальний однозначний, або *TS*-предикат, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \varnothing$ та $T(Q) \cup F(Q) = {}^{V}A$;
– неспростовний (частково істинний), якщо $F(Q) = \varnothing$; усі неспростовні предикати є *P*-предикатами;
– тотожно істинний (позн. T), якщо $F(Q) = \varnothing$ та $T(Q) = {}^{V}A$;
– тотожно хибний (позн. F), якщо $T(Q) = \varnothing$ та $F(Q) = {}^{V}A$;
– тотожно (всюди) невизначений (позн. $\curlywedge$), якщо $T(Q) = F(Q) = \varnothing$;
– тотально амбівалентний (позн. Υ), якщо $T(P) = F(P) = {}^{V}A$;
– монотонний, якщо $d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q(d_1) \subseteq Q(d_2)$; антитонний, якщо $d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q(d_1) \supseteq Q(d_2)$.

Класи *V*-*A*-квазіарних *R*-предикатів, *P*-предикатів, *T*-предикатів *TS*-предикатів далі позначаємо $Pr^{V\text{–}A}$, $PrP^{V\text{–}A}$, $PrT^{V\text{–}A}$, $PrTS^{V\text{–}A}$. Клас $PrTS^{V\text{–}A}$ вироджений: усі *TS*-предикати, окрім константних T та F, немонотонні.

Враховуючи дуальність (див. [5]) класів $PrP^{V\text{–}A}$ та $PrT^{V\text{–}A}$ і виродженість $PrTS^{V\text{–}A}$, доцільно розглядати лише логіки *R*-предикатів та логіки *P*-предикатів. Це дає наступні різновиди $_{\perp}$ЧКНЛ:
– $L_{\perp}^{Q}$ та $L_{\perp}^{QP}$ – $_{\perp}$ЧКНЛ *R*-предикатів та $_{\perp}$ЧКНЛ *P*-предикатів;
– $L_{\perp}^{Q=}$ та $L_{\perp}^{Q=P}$ – $_{\perp}$ЧКНЛ *R*-предикатів зі слабкою рівністю та $_{\perp}$ЧКНЛ *P*-предикатів зі слабкою рівністю;
– $L_{\perp}^{Q}$ та $L_{\perp}^{Q\equiv P}$ – $_{\perp}$ЧКНЛ *R*-предикатів зі строгою рівністю та $_{\perp}$ЧКНЛ *P*-предикатів зі строгою рівністю.

Семантичною основою КНЛ є композиційні предикатні системи $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_B)$, де C_B – множина базових композицій. Кожна така система задає алгебру даних $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A})$ та композиційну предикатну алгебру $(Pr^{V\text{–}A}, C_B)$.

Для різновидів $_{\perp}$ЧКНЛ маємо такі множини базових композицій: $C_{\perp Q} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp}, \exists x, Ex\}$ для $L_{\perp}^{Q}$ та $L_{\perp}^{QP}$, $C_{\perp Q=} = C_{\perp Q} \cup \{=_{\{x,y\}}\}$ для $L_{\perp}^{Q=}$ та $L_{\perp}^{Q=P}$, $C_{\perp Q\equiv} = C_{\perp Q} \cup \{\equiv_{\{x,y\}}\}$ для $L_{\perp}^{Q\equiv}$ та $L_{\perp}^{Q\equiv P}$. Базові композиції задаємо так.

Пропозиційні композиції (логічні зв'язки) $\neg$ та $\vee$ задамо через області істинності й хибності предикатів:
$T(\neg P) = F(P)$; $F(P) = T(P)$; $T(P \vee Q) = T(P)T(Q)$; $F(P \vee Q) = F(P)F(Q)$.

Композиція розширеної реномінації $\mathrm{R}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp} : Pr^{V-A} \to Pr^{V-A}$ задається так: $\mathrm{R}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp}(P)(d) = P(\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp}(d))$.

Згортка композицій реномінації визначається через згортку відповідних операцій реномінації:
$$\mathrm{R}^{\bar{v}, \bar{z}}_{\bar{y}, \perp} \circ^{\bar{u}, \bar{t}}_{\bar{x}, \perp}(P)(d) = (\mathrm{R}^{\bar{v}, \bar{z}}_{\bar{y}, \perp}(\mathrm{R}^{\bar{u}, \bar{t}}_{\bar{x}, \perp}(P)))(d) = P(r^{\bar{u}, \bar{t}}_{\bar{x}, \perp} \bullet^{\bar{v}, \bar{z}}_{\bar{y}, \perp}(d)).$$

Композиція квантифікації (квантор) $\exists xP : Pr^{V-A} \to Pr^{V-A}$ задається так:
$$T(\exists xP) = \bigcup_{a \in A} \{d \mid d \|_{-x} \cup x \mapsto a \in T(P)\}; \quad F(\exists xP) = \bigcap_{a \in A} \{d \mid d \|_{-x} \cup x \mapsto a \in F(P)\}.$$

Спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори Ez – встановлюють наявність у вхідних даних компоненти з відповідним іменем $z \in V$. Предикати Ez задаємо [5] так: $T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\}$; $F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\}$.

Предикати Ez тотальні, однозначні, немонотонні. Кожне $x \in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для Ez.

Предикати слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{\{x,y\}}$ задаємо [7] так:
$T(=_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\}$;
$F(=_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)\}$.

Предикати строгої рівності $_{\{x,y\}}$ задаємо [7] так:
$T(\equiv_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\} \cup \{d \mid d(x)/$ та $d(y)\uparrow\}$;
$F(\equiv_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)\} \cup \{d \mid d(x)/,\ d(y)\uparrow$ або $d(x)\uparrow,\ d(y)\downarrow\}$.
Надалі предикати $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ скорочено позначаємо $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$; традиційними є позначення $x=y$ та $x\equiv y$.
Предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, немонотонні й неантитонні. Неістотним для $=_{\{x,y\}}$ є кожне $z\in V\backslash\{x,y\}$.
Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні, монотонні (еквітонні). Неістотним для та $\equiv_{\{x,y\}}$ є кожне $zV\backslash\{x,y\}$.
Окремим випадком $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$, якщо x та y – це одне і те ж предметне ім'я, є предикати $=_{\{x\}}$ та $\equiv_{\{x\}}$, які будемо позначати $=_{xx}$ та $\equiv_{xx}$, в традиційному вигляді $x=x$ та $x\equiv x$. Неістотним для $=_{xx}$ та $\equiv_{xx}$ є кожне $z\in V\backslash\{x\}$.
Для $\equiv_{xx}$ маємо $T(_{xx}) = {}^{V}\!A$ та $F(\equiv_{xx}) = \varnothing$, звідки $\equiv_{xx} = $ T. Для $\equiv_{xx}$ маємо $F(=_{xx}) = \varnothing$, звідки $=_{xx}$ неспростовний.
Таким чином, визначено наступні предикатні композиційні алгебри $_{\perp}$ЧКНЛ:
– $A_{\perp}{}^{Q} = ({}^{V}\!A,\ Pr^{V-A},\ C_{\perp Q})$ та $A_{\perp}{}^{QP} = ({}^{V}\!A,\ PrP^{V-A},\ C_{Q})$, при цьому $A_{\perp}{}^{QP}$ – підалгебра $A_{\perp}{}^{Q}$;
– $A_{\perp}{}^{Q=} = ({}^{V}\!A,\ Pr^{V-A},\ C_{\perp Q=})$ та $A_{\perp}{}^{Q=P} = ({}^{V}\!A,\ PrP^{V-A},\ C_{Q=})$, при цьому $A_{\perp}{}^{Q=P}$ – підалгебра $A_{\perp}{}^{Q=}$;
– $A_{\perp}{}^{Q\equiv} = ({}^{V}\!A,\ Pr^{V-A},\ C_{\perp Q=})$ та $A_{\perp}{}^{Q\equiv P} = ({}^{V}\!A,\ PrP^{V-A},\ C_{\perp Q\equiv})$, при цьому $A_{\perp}{}^{Q\equiv P}$ – підалгебра $A_{\perp}{}^{Q\equiv}$.

Основні властивості композицій $_{\perp}$ЧКНЛ. Властивості пропозиційних композицій та кванторів, не пов'язані з реномінаціями, аналогічні властивостям класичних логічних зв'язок та кванторів (див. [4, 5]).
Наведемо тут базові властивості спрощення, пов'язані з композицією розширеної реномінації:
$\mathrm{R}_{\perp}$I) $\mathrm{R}^{z,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)$ – згортка тотожної пари імен у реномінації;
$\mathrm{R}_{\perp}$U) $z\in V$ неістотне для предиката $P \Rightarrow \mathrm{R}^{z,\bar{v},\bar{u}}_{y,\bar{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)$;
R↑) за умови $d(z)\uparrow$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{x},\perp,z}(P)(d) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{x},\perp,\perp}(P)(d)$ та $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(P)(d) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)(d)$;
$\mathrm{R}_{\perp\mathrm{E}}$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(Ez) = Ey$; за умови $z \notin \{\bar{v},\bar{u}\}$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(Ez) = Ez$.
Властивості реномінації R, $\mathrm{R}_{\perp}$R, R¬, R∨ та властивості, пов'язані з кванторами, наведено в [6, 9, 12].
Розглянемо властивості предикатів рівності. Зауважимо, що симетричність рівності – фактично на рівні позначень, адже $\equiv_{xy}$ та $\equiv_{yx}$ – це один і той же предикат, $=_{xy}$ та $=_{yx}$ – один і той же предикат.
Властивості рефлексивності предикатів рівності можна подати так:
Rf=) кожний предикат $=_{xx}$ є неспростовним; понад те, для $=_{xx}$ маємо таке подання: $=_{xx} = Ex\vee$;
Rf≡) кожний предикат $\equiv_{xx}$ є тотожно істинним, тобто $\equiv_{xx} = $ T.
Властивості транзитивності предикатів рівності мають такий вигляд.
Tr=) Для всіх $d\in{}^{V}\!A$ маємо: $=_{xy}(d) = T$ та $=_{yz}(d) = T$ $=_{xz}(d) = T$; звідси $=_{xy}\ \&\ =_{yz} \to =_{xz}$ – неспростовний.
Tr≡) Для всіх $d^{V}\!A$ маємо: $_{xy}(d) = T$ та $\equiv_{yz}(d) = T$ $\equiv_{xz}(d) = T$; звідси $\equiv_{xy}\ \&\ \equiv_{yz} \to \equiv_{xz} = $ T.
Наведемо властивості реномінації предикатів слабкої рівності (це властивості типу $\mathrm{R}_{\perp}$=):

$\mathrm{R}_{\perp}{=}_{xx}$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(=_{xx}) = =_{zz}$; $\mathrm{R}_{\perp}{=}_{2}$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,s}(=_{xy}) = =_{zs}$;

$\mathrm{R}_{\perp}{=}_{1}$) за умови $y \notin \{\bar{u},\bar{v}\},\ x \neq y$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(=_{xy}) = =_{zy}$;

$\mathrm{R}_{\perp}{=}_{0}$) за умови $x, y \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(=_{xy}) = =_{xy}$; зокрема, за умови $x \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(=_{xx}) = =_{xx}$;

$\mathrm{R}_{\perp}{=}_{\perp}$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(=_{xy}) = 人$; зокрема, $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(=_{xx}) = 人$.

Для предикатів слабкої рівності маємо властивості заміни рівних та елімінації пари рівних в реномінації:
$=\mathrm{R}_{\perp}$r) для всіх $P\in PrP^{V-A}$ та $d\in{}^{V}\!A$ маємо: $=_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(P)(d) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(P)(d)$ – заміна рівних;
$=$el$\mathrm{R}_{\perp}$) для всіх $PPrP^{V-A}$ та $d\in{}^{V}\!A$ маємо: $=_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(P)(d) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(P)(d)$.
Тепер властивості реномінації предикатів строгої рівності (властивості типу $\mathrm{R}_{\perp}$≡):

$\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{xx}$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\equiv_{xx}) = \ \equiv_{zz}$; $\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{2}$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,s}(\equiv_{xy}) = \ \equiv_{zs}$; $\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{2\mathrm{E}}$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,\perp}(\equiv_{xy}) = \neg Ez$;

$\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1}$) за умови $y \notin \{\bar{u},\bar{v}\},\ x \neq y$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\equiv_{xy}) = \ \equiv_{zy}$;

$\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1\mathrm{E}}$) за умови $y \notin \{\bar{u},\bar{v}\},\ x \neq y$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(\equiv_{xy}) = \neg Ey$;

$\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{0}$) за умови $x, y \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}) = \ \equiv_{xy}$; зокрема, $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xx}) = \ \equiv_{xx}$ за умови $x \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$;

$\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{\perp}$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,\perp,\perp}(\equiv_{xy}) = $ T; зокрема, $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(\equiv_{xx}) = $ T.

Властивості заміни рівних та елімінації пари рівних в реномінації:
≡Rr) для всіх $PPrP^{V-A}$ та $d\in{}^{V}\!A$ маємо: $\equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(P)(d) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(P)(d)$ – заміна рівних;
el$\mathrm{R}_{\perp}$) для всіх $P\in PrP^{V-A}$ та $d\in{}^{V}\!A$ маємо: $\equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(P)(d) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(P)(d)$.

2. Відношення логічного наслідку в $L_{\perp}{}^{Q=}$ та $L_{\perp}{}^{Q\equiv}$

Опишемо мови $_{\perp}$ЧКНЛ. Акцент зробимо на мові $L^{Q\equiv}$, мови $L_{\perp}{}^{Q=}$ та $L_{\perp}{}^{Q}$ описуються аналогічно.
Алфавіт мови $L^{Q\equiv}$: множина V предметних імен (змінних), множина Ps предикатних символів, множина $Cs_{\equiv} = \{\neg, \vee, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}, \exists x, Ex, \equiv_{xy}\}$ символів базових композицій. Дамо індуктивне визначення множини Fr формул:

– кожний $p\in Ps$, кожний символ Ex та кожний символ $\equiv_{xy}$ є формулою; такі формули назвемо атомарними;

– нехай $\Phi, \Psi Fr$; тоді $\neg\Phi\in Fr$, $\vee\Phi\Psi\in Fr$, $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi \in Fr$, $\exists x\in Fr$.

Виділимо множину $V_T \subseteq V$ імен, неістотних для всіх $p\in Ps$ – множину тотально неістотних імен. Для визначення множин *гарантовано неістотних* для формул імен таку ν продовжуємо (див. [5, 6, 8]) до $\nu : Fr\rightarrow 2^V$.

Якщо $x\in\nu(\Phi)$, то [5, 6] ім'я x неістотне для Φ.

Формула примітивна, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}p$, де $p\in Ps$, $p\in Ps$, $\{\bar{v},\bar{u}\}\cap\nu(p)=\varnothing$ та $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ не має пар тотожних імен. Формули вигляду $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi$ назвемо R-формулами.

Множину всіх $x\in V$, які фігурують у формулі Φ, позначимо $nm(\Phi)$.

Для довільної $\Gamma\subseteq Fr$ вводимо позначення: $nm(\Gamma) = \bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} nm(\Phi)$; $\nu(\Gamma) = \bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} \nu(\Phi)$; $fu(\Gamma) = V_T \setminus nm(\Gamma)$.

Інтерпретуємо мову $L_\perp^{Q\equiv}$ на композиційних предикатних системах вигляду CS = $({}^VA, Pr^{V-A}, C_{\perp Q\equiv})$.

Символи базових композицій інтерпретуємо як відповідні композиції; символи Ex інтерпретуємо як відповідні предикати-індикатори Ex; символи $\equiv_{xy}$ інтерпретуємо як відповідні предикати строгої рівності $\equiv_{xy}$.

Задаємо тотальне однозначне I : $Ps\rightarrow Pr^{V-A}$, яке продовжимо до відображення інтерпретації I : $Fr\rightarrow Pr^{V-A}$:

$I(\neg\Phi) = \neg(I())$, $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$, $I(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(I(\Phi))$, $I(x\Phi) = \exists x(I())$.

Інтерпретацією мови $L_\perp^{Q\equiv}$ назвемо трійку $\boldsymbol{J}$ = (CS, Σ, I), де Σ = $(V, V_T, Cs_{\equiv}, Ps)$ – розширена сигнатура мови. Скорочено інтерпретації мови позначаємо (A, I).

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, будемо позначати Φ_J.

Ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо x неістотне для предиката Φ_J при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

Мова $L_\perp^{Q=}$ визначається аналогічно мові $L_\perp^{Q\equiv}$ лише замість символів $\equiv_{xy}$ пишемо $=_{xy}$.

Увипадку мови L^Q опускаємо пункти для символів $\equiv_{xy}$.

Класи інтерпретацій мови також називають *семантиками*. Виділення в алгебрах $A_\perp^Q$, $A_\perp^{Q=}$, $A_\perp^{Q\equiv}$ підалгебр P-предикатів дає змогу говорити про такі семантики: ${}_\perp\boldsymbol{R}$ та ${}_\perp\boldsymbol{P}$, ${}_\perp\boldsymbol{R}^{=}$ та ${}_\perp\boldsymbol{P}^{=}$, ${}_\perp\boldsymbol{R}^{\equiv}$ та ${}_\perp\boldsymbol{P}^{\equiv}$.

Формула Φ неспростовна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}|=$), якщо предикат Φ_J – неспростовний.

Формула Φ неспростовна в семантиці α (позн. ${}^\alpha|=\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}|=\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}|=_{id}\Phi$), якщо предикат Φ_J – тотожно істинний.

Формула Φ тотожно істинна в семантиці α (позн. ${}^\alpha|=_{id}\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}|=_{id}\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Формули, які завжди інтерпретуються як константні предикати T, F чи , назвемо *константними*.

Наприклад, $Ex\vee\neg Ex$, $\equiv_{xx}$, xEx, $R_{\perp,\perp}^{x,z}(\equiv_{xz})$ – ${}_{\mathrm{T}}$-формули; $R_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}(Ez)$ – ${}_{\mathrm{F}}$-формула, $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}(=_{zy})$ – ${}_\perp$-формула.

***Un*-еквівалентні формули.** Нехай $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{t},\perp,\perp}^{\bar{x},\bar{v},\bar{u},\bar{w},\bar{z}}(\Phi)$ – R-формула така, що $\{\bar{u},\bar{w}\}\subseteq\nu(\Phi)$. R-формулу $R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(\Phi)$, утворену із початкової R-формули всеможливими спрощенням зовнішньої реномінації на основі R, $\mathrm{R}_\perp$I, $\mathrm{R}_\perp$U, а також властивостей реномінації предикатів рівності типу $\mathrm{R}_\perp\equiv$, назвемо *Rs-формою* початкової R-формули.

Rs-форми R-формул назвемо Rs-формулами. Якщо ϑ – Rs-форма R-формули Ψ, то $\vartheta_J = {}_J$ для всіх $\boldsymbol{J}$.

Нехай $Un\subseteq V$ – множина імен, які трактуємо як неозначені.

Формули Ψ та ϑ *Un-еквівалентні* (позн. $\Psi\sim_{Un}\vartheta$), якщо для всіх $\boldsymbol{J}=(A, I)$ та $d\in{}^VA\|_{-Un}$ маємо $\Psi_J(d)=\vartheta_J(d)$.

Твердження 1 (випливає з R↑). Нехай $z\in Un$, тоді $R_{\bar{x},\perp,z}^{\bar{v},\bar{u},y}\Phi\sim_{Un} R_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},y}\Phi$ та $R_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}\Phi\sim_{Un} R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi$.

Кожну Rs-формулу можна подати у вигляді $R_{\bar{v},\bar{y},\bar{s},\perp,\perp}^{\bar{z},\bar{x},\bar{r},\bar{u},\bar{w}}\Phi$, де $\{\bar{y},\bar{r},\bar{s},\bar{u}\}\subseteq Un$, $\{\bar{v},\bar{x},\bar{w}\}\cap Un=\varnothing$.

Un-формою такої $R_{\bar{v},\bar{y},\bar{s},\perp,\perp}^{\bar{z},\bar{x},\bar{r},\bar{u},\bar{w}}\Phi$ назвемо Rs-формулу $R_{\bar{v},\perp,\perp}^{\bar{z},\bar{x},\bar{w}}\Phi$. Такі Un-форми називаємо Un-формулами.

Твердження 2. Якщо Ψ – Un-форма формули Φ, то $\Phi\sim_{Un}\Psi$.

Відношення логічного наслідку. Поширимо відомі [5] відношення логічного наслідку ${}^P|=_{IR}$, ${}^P|=_T$, ${}^P|=_F$, ${}^P|=_{TF}$, ${}^R|=_{TF}$, визначені на формулах мови L^Q, на формули мов $L_\perp^Q$, $L^{Q=}$ та $L_\perp^{Q\equiv}$.

Задаємо такі відношення наслідку для двох множин формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$:

– неспростовнісний, або IR-наслідок ${}_J|=_{IR}$: $\Phi\ {}_J|=_{IR}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J)=\varnothing$;

– істиннісний, або T-наслідок ${}_J|=_T$: $\Phi\ {}_J|=_T\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\subseteq T({}_J)$;

– хибнісний, або F-наслідок ${}_J|=_F$: $\Phi\ {}_J|=_F\Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J)\subseteq F({}_J)$;

– сильний, або TF-наслідок ${}_J|=_{TF}$: $\Phi\ {}_J|=_{TF}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_J|=_T\Psi$ та $\Phi\ {}_J|=_F\Psi$.

Відповідні відношення логічного τ-наслідку в семантиці α задаємо за схемою:

$\Phi\ {}^\alpha|=\tau\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|=\tau\ \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Відношення τ-еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ задаємо так: $\Phi\ {}_J\!\sim_\tau\Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|=_\tau\Psi$ та $\Psi\ {}_J|=_\tau\Phi$.

Відношення логічної τ-еквівалентності в семантиці α задаємо так: $\Phi\ {}^\alpha\!\sim_\tau\Psi$, якщо $\Phi\ {}^\alpha|=_\tau\Psi$ та $\Psi\ {}^\alpha|=_\tau\Phi$.

Особливе місце посідає відношення ${}_J\sim_{TF}$. Справді, $\Phi\ {}_J\!\sim_{TF}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)=T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J)=F(\Psi_J) \Leftrightarrow \Phi_J=\Psi_J$.

Відношення наслідку та логічного наслідку для двох формул поширюються на пари множин формул.

Нехай $\Sigma, \Gamma, \Delta\subseteq Fr$ – множини формул, $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація. Далі будемо позначати:

$\bigcap\limits_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^\cap(\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^\cup(\Sigma_J)$, $\bigcap\limits_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^\cap(\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^\cup(\Sigma_J)$.

Δ є IR-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|=_{IR}\Delta$), якщо $T^\cap(\Gamma_J)\cap F^\cap(\Delta_J)=\varnothing$.

Δ є T-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|=_T\Delta$), якщо $T^\cap(\Gamma_J)\subseteq T^\cup(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|=_F\Delta$), якщо $F^\cap(\Delta_J)\subseteq F^\cup(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\ {}_J|\!=_T \Delta$ та $\Gamma\ {}_J|\!=_F \Delta$.

Відповідні відношення логічного τ-наслідку в семантиці α визначаємо за схемою:

$\Gamma\ {}^{\alpha}|\!=_{\tau} \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_J|\!=_{\tau} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Якщо α – це одна із семантик ${}_{\perp}\boldsymbol{R}$, ${}_{\perp}\boldsymbol{P}$, ${}_{\perp}\boldsymbol{R}^{=}$, ${}_{\perp}\boldsymbol{P}^{=}$, ${}_{\perp}\boldsymbol{R}^{\equiv}$, ${}_{\perp}\boldsymbol{P}^{\equiv}$, то отримуємо 24 відношення логічного наслідку.

Деякі з цих відношень збігаються, деякі відношення вироджені, а відношення ${}^{P=}|\!=_T$, ${}^{P=}|\!=_F$, ${}^{P=}|\!=_{TF}$, ${}^{R=}|\!=_{TF}$ некоректні (див. [5, 7, 8]. Тому в логіках L^Q, $L_{\perp}{}^{Q=}$, $L_{\perp}{}^{Q\equiv}$ залишаються такі невироджені коректні відношення: ${}^{P}|\!=_{IR}$, ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{R}|\!=_{TF}$; ${}^{P=}|\!=_{IR}$; ${}^{P\equiv}|\!=_{IR}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{T}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{F}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{TF}$, ${}^{R\equiv}|\!=_{TF}$.

Тут і далі вживаємо такі позначення: $P\#$ – одне з P, $P=$, $P\equiv$; $R\#$ – одне з R, $R=$, $R\equiv$; $\sim_{TF}$ – одне з ${}^{R\#}{}_{TF}$, ${}^{P\#}\!\sim_{TF}$; $|\!=_*$ – це одне з ${}^{P\#}|\!=_{IR}$, ${}^{P\#}|\!=_{T}$, ${}^{P\#}|\!=_{F}$, ${}^{P\#}|\!=_{TF}$, ${}^{R\#}|\!=_{TF}$. Вживаємо також зрозумілі позначення ${}^{=}|\!=_*$ та ${}^{\equiv}|\!=_*$.

Властивості відношень логічного наслідку. Секвенційні числення формалізують відношення логічного наслідку, тому семантичною основою їх побудови є властивості відповідних відношень. Низку таких властивостей описано в [5–12]. Розглянемо лише характерні для $L_{\perp}{}^{Q=}$ та $L_{\perp}{}^{Q\equiv}$ властивості, необхідні для побудови числень.

Традиційними є властивості декомпозиції формул, вони детально описані в [5].

Для Ez та їх реномінацій маємо властивості зняття ¬ при перенесенні в іншу частину відношення:

$\neg_{EL})\ \neg Ez, \Gamma\,|\!=_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_* \Delta, Ez$; $\quad \neg_{ER})\ \Gamma\,|\!=_* \Delta, \neg Ez\ \ Ez, \Gamma\,|\!=_* \Delta$;

$\neg_{REL})\ \neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(Ez), \Gamma\,|\!=_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_* R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(Ez), \Delta$; $\qquad \neg_{RER})\ \Gamma\,|\!=_* \neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(Ez), \Delta \Leftrightarrow R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(Ez), \Gamma\,|\!=_* \Delta$.

Властивості еквівалентних перетворень, пов'язані з розширеними реномінаціями, виконуються для ${}^{P\#}|\!=_{IR}$, ${}^{P\#}|\!=_{T}$, ${}^{P\#}|\!=_{F}$, ${}^{P\#}|\!=_{TF}$, ${}^{R\#}|\!=_{TF}$, вони базуються на властивостях предикатів R, $R_{\perp}I$, RU, R↑, R¬, R∨, RR та $R_{\perp E}$. Кожна з R, $R_{\perp}I$, RU, $R_{\perp}\neg$, $R_{\perp}\vee$, $R_{\perp}R$ продукує 4 відповідні властивості для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення (див. [6, 10, 12]).

Властивість R↑ продукує дві четвірки відповідних властивостей відношення логічного наслідку:

$R{\uparrow}_{1L})\ R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,z}(\Phi), \Gamma\,|\!=_* \Delta, Ez \Leftrightarrow R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,\perp}(\Phi), \Gamma\,|\!=_* \Delta, Ez$;

$R{\uparrow}_{1R})\ \Gamma\,|\!=_* \Delta, R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,z}(\Phi), Ez \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_* \Delta, R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,\perp}(\Phi), Ez$;

$R{\uparrow}_{2L})\ R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(\Phi), \Gamma\,|\!=_* \Delta, Ez \Leftrightarrow R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi), \Gamma\,|\!=_* \Delta, Ez$;

$R{\uparrow}_{2R})\ \Gamma\,|\!=_* \Delta, R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(\Phi), Ez \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_* \Delta, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi), Ez$;

До них додаємо аналогічні властивості $\neg R{\uparrow}_{1L}$, $\neg R{\uparrow}_{1R}$, $\neg R{\uparrow}_{2L}$, $\neg R{\uparrow}_{2R}$ із запереченням виділеної формули.

Властивість $R_{\perp E}$ продукує 4 властивості спрощення при реномінації предикатів-індикаторів:

$R_{\perp EvL})\ R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,y}(Ez), \Gamma\,|\!=_* \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma\,|\!=_* \Delta$; $\quad R_{\perp EvR})\ \Gamma\,|\!=_* \Delta, R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,y}(Ez) \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_* \Delta, Ey$;

$R_{\perp EL})\ R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez), \Gamma\,|\!=_* \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma\,|\!=_* \Delta$, де $z\notin\{\bar v,\bar u\}$; $\ R_{\perp ER})\ \Gamma\,|\!=_* \Delta, R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez) \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_* \Delta, Ez$, де $z\notin\{\bar v,\bar u\}$.

Властивості елімінації кванторів, а також E-розподілу та первісного означення, описані в [5, 6, 12].

Опишемо властивості, які гарантують наявність відношення логічного наслідку. Для всіх розглянутих відношень маємо загальну властивість C та пов'язану з константними ${}_F$-формулами (див. $R_{\perp EF}$) властивість CF:

$C)\ \Phi, \Gamma\,|\!=_* \Delta, \Phi$; $\quad CF)\ R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(Ez), \Gamma\,|\!=_* \Delta$.

Додатково гарантують (див. також [5]) наявність відповідного відношення такі властивості:

$CL)\ \Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{P\#}|\!=_T \Delta$; $\quad CR)\ \Gamma\ {}^{P\#}|\!=_F \Delta, \Phi, \neg\Phi$; $\quad CLR)\ \Phi, \Phi,\ {}^{P\#}|\!=_{TF} \Delta, , \neg\Psi$.

На основі цих властивостей отримуємо умови *гарантованої наявності* того чи іншого відношення $\Gamma\,|\!=_*\Delta$..

C) існує Φ: $\in\Gamma$ та $\Phi\in\Delta$; $\quad$ CF) існує $R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(Ez)\in\Gamma$;

CL) існує Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\neg\Phi\in\Gamma$; CR) існує Φ: $\Phi\in\Delta$ та $\neg\Phi\in\Delta$; CLR) існують Φ, Ψ: $\Phi, \neg\Phi\in\Gamma$ та $\Psi, \neg\Psi\in\Delta$.

C та CF гарантують кожне $\Gamma\,|\!=_*\Delta$; $\quad$ CL гарантує $\Gamma\ {}^{P\#}|\!=_T \Delta$; $\quad$ CR гарантує $\Gamma\ {}^{P\#}|\!=_F \Delta$; $\quad$ CLR гарантує $\Gamma\ {}^{P\#}|\!=_{TF} \Delta$.

Розглянемо властивості відношень логічного наслідку, пов'язані з $=_{xy}$. Транзитивність слабкої рівності порушена [7, 8] для ${}^{P=}|\!=_F$ та ${}^{P=}|\!=_T$, тому й для ${}^{P=}|\!=_{TF}$ та ${}^{R=}|\!=_{TF}$. Отже, в $L_{\perp}{}^{Q=}$ коректним буде лише відношення ${}^{P=}|\!=_{IR}$.

Властивість транзитивності $=_{xy}$ набуває вигляду: Tr=) $=_{xy}, =_{yz}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow =_{xy}, =_{yz}, =_{xz}\ \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta$.

На основі властивостей $R_{\perp}{=}_{xx}$, $R_{\perp}{=}_2$, $R_{\perp}{=}_1$, $R_{\perp}{=}_0$ для предикатів отримуємо такі властивості:

$R_{\perp}{=}_{xxL})\ R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,z}(=_{xx}), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow\ =_{zz}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta$; $\qquad R_{\perp}{=}_{xxR})\ \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,z}(=_{xx}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, =_{zz}$;

$R_{\perp}{=}_{2L})\ R^{\bar v,\bar u,x,y}_{\bar w,\perp,z,s}(=_{xy}), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow\ =_{zs}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta$; $\qquad R_{\perp}{=}_{2R})\ \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, R^{\bar v,\bar u,x,y}_{\bar w,\perp,z,s}(=_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, =_{zs}$;

$R_{\perp}{=}_{1L})\ R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,z}(=_{xy}), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow\ =_{zy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta$ за умови $y\notin\{\bar u,\bar v\}$, $x\neq y$;

$R_{\perp}{=}_{1R})\ \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,z}(=_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, =_{zy}$ за умови $y\notin\{\bar u,\bar v\}$, $x\neq y$;

$R_{\perp}{=}_{0L})\ R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(=_{xy}), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow\ =_{xy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta$ за умови $x, y\notin\{\bar u,\bar v\}$;

$R_{\perp}{=}_{0R})\ \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(=_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, =_{xy}$ за умови $x, y\notin\{\bar u,\bar v\}$.

Властивість =Rr індукує властивості заміни рівних для відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$:

$=R_{\perp}r_L)\ =_{xy}, R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow\ =_{xy}, R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,y}(\Phi), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta$;

$=R_{\perp}r_R)\ =_{xy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\ R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow\ =_{xy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\ R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,y}(\Phi), \Delta$.

На основі властивості =elR$_\perp$ маємо властивості спрощення – елімінації пари рівних в реномінації:

=elR$_{\perp L}$) $=_{xy}, R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\Delta \Leftrightarrow =_{xy}, R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\Phi), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\Delta$;

=elR$_{\perp R}$) $=_{xy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow =_{xy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\Phi), \Delta$.

Властивості Rf= та R$_\perp$=$_\perp$ індукують властивості наявності відношення ${}^{P=}|\!=_{IR}$:

$C_{\mathrm{Rf=}}$) $\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} =_{xx}$, .

$C\perp_L$) $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(=_{xy}), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\Delta$ та $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(=_{xx}), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\Delta$; $C\perp_R$) $\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\Delta, R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(=_{xy})$ та $\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\Delta, R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(=_{xx})$.

Маємо $T(=_{xy})\cap F(Ex) = $ та $F(=_{xy})F(Ex) = $, звідси такі властивості наявності відношення ${}^{P=}|\!=_{IR}$:

$C_{E=L}$) $=_{xy}$, ${}^{P=}|\!=_{IR} Ex$, ; зокрема, $=_{xx}$, ${}^{P=}|\!=_{IR} Ex$, ; $C_{E=R}$) $\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} =_{xy}, Ex$, .

Властивості наявності ${}^{P=}|\!=_{IR}$ індукують спеціальні *умови* гарантованої наявності $\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR}\Delta$:

C$_{\mathrm{Rf=}}$) $=_{xx}\in\Delta$;

C$_{\perp L}$) $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(=_{xy})\in\Gamma$; зокрема, $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(=_{xx})\in\Gamma$; C$_{\perp R}$) $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(=_{xy})\in\Delta$; зокрема, $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(=_{xx})\in\Delta$;

C$_{E=L}$) $=_{xy}\Gamma$ та $Ex\Delta$; зокрема, $=_{xx}\in\Gamma$ та $Ex\in\Delta$; C$_{E=R}$) $=_{xy}\Delta$ та $Ex\in\Delta$.

Тепер укажемо властивості відношень логічного наслідку, пов'язані з $\equiv_{xy}$. Властивість транзитивності $\equiv_{xy}$:

Tr≡) $\equiv_{xy}, \equiv_{yz}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \equiv_{yz}, \equiv_{xz}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*}\Delta$.

Для $\equiv_{xy}$ та їх реномінацій маємо властивості зняття $\neg$ при перенесенні в іншу частину відношення:

$\neg\equiv_L$) $\neg\equiv_{xy}$, $|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_*\Delta, _{xy}$; $\neg\equiv_R$) $|\!=_*\Delta, \neg\equiv_{xy} \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma\,|\!=_*\Delta$;

$\neg$R≡$_L$) $\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma\,|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_* R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\equiv_{xy}), \Delta$; $\neg$R≡$_R$) $\Gamma\,|\!=_* \neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\equiv_{xy}), \Delta \Leftrightarrow R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma\,|\!=_*\Delta$.

На основі властивостей R$_\perp\equiv_{xx}$, R$_\perp\equiv_2$, R$_\perp\equiv_1$, R$\equiv_0$ отримуємо властивості спрощення – реномінації рівності:

R$_\perp$≡$_{xxL}$) $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,z}(\equiv_{xx}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \equiv_{zz}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$; R$_\perp$≡$_{xxR}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,z}(\equiv_{xx}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, \equiv_{zz}$;

R$_\perp$≡$_{2L}$) $R^{\bar v,\bar u,x,y}_{\bar w,\perp,z,s}(\equiv_{xy}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \equiv_{zs}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$; R$_\perp$≡$_{2R}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, R^{\bar v,\bar u,x,y}_{\bar w,\perp,z,s}(\equiv_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, \equiv_{zs}$;

R$_\perp$≡$_{2EL}$) $R^{\bar v,\bar u,x,y}_{\bar w,\perp,z,\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \neg Ez, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$; R$_\perp$≡$_{2ER}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, R^{\bar v,\bar u,x,y}_{\bar w,\perp,z,\perp}(\equiv_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, \neg Ez$;

R$_\perp$≡$_{1L}$) $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,z}(\equiv_{xy}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \equiv_{zy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$; R$_\perp$≡$_{1R}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,z}(\equiv_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, \equiv_{zy}$;

R$_\perp$≡$_{1EL}$) $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \neg Ey, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$; R$_\perp$≡$_{1ER}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(\equiv_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, \neg Ey$.

R$_\perp$≡$_{0L}$) $R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$; R$_\perp$≡$_{0R}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\equiv_{xy})\,|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, \equiv_{xy}$.

Для R$_\perp$≡$_{1L}$, R$_\perp$≡$_{1R}$, R$_\perp$≡$_{1EL}$, R$_\perp$≡$_{1ER}$ умова: $y\notin\{\bar u,\bar v\}$, $x\neq y$. Для R$_\perp$≡$_{0L}$, R$_\perp$≡$_{0R}$ умова: $x, y\notin\{\bar u,\bar v\}$

На основі властивості ≡elR$_\perp$ маємо властивості спрощення – елімінації пари рівних в реномінації:

≡elR$_{\perp L}$) $\equiv_{xy}, R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\Phi), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$;

≡elR$_{\perp R}$) $\equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\Phi), \Delta$; .

≡el$\neg$R$_{\perp L}$) $\equiv_{xy}, \neg R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Gamma\,|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\Phi), \Gamma\,|\!=_*\Delta$;

≡el$\neg$R$_{\perp R}$) $\equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* \neg R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* \neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(\Phi), \Delta$.

Властивості заміни рівних отримуємо на основі ≡R$_\perp$r:

≡R$_\perp$r$_L$) $\equiv_{xy}, R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,y}(\Phi), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$;

≡R$_\perp$r$_R$) $\equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,y}(\Phi), \Delta$.

≡$\neg$R$_\perp$r$_L$) $\equiv_{xy}, \neg R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Gamma\,|\!=_*\Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \neg R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \neg R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,y}(\Phi), \Gamma\,|\!=_*\Delta$;

≡$\neg$R$_\perp$r$_R$) $\equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* \neg R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* \neg R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,x}(\Phi), \neg R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar w,\perp,y}(\Phi), \Delta$.

Пов'язані з $\equiv_{xy}$ властивості наявності відношення ${}^{\equiv}|\!=_*$:

$C_{\mathrm{Rf\equiv}}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, \equiv_{xx}$; $C_{R\equiv}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, R^{\bar v,\bar u,x,z}_{\bar x,\perp,\perp,\perp}(\equiv_{xz})$; зокрема, $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta, R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar x,\perp,\perp}(\equiv_{xx})$;

$C_{E\equiv L}$) $\equiv_{xy}, Ex, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* Ey, \Delta$; $C_{E\equiv R}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_* \equiv_{xy}, Ex, Ey, \Delta$.

Зазначені властивості індукують спеціальні *умови* гарантованої наявності $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_*\Delta$:

C$_{\mathrm{Rf\equiv}}$) $\equiv_{xx}\in\Delta$; C$_{R\equiv}$) $R^{\bar v,\bar u,x,z}_{\bar x,\perp,\perp,\perp}(\equiv_{xz})\in\Delta$; зокрема, $R^{\bar v,\bar u,x}_{\bar w,\perp,\perp}(\equiv_{xx})\in\Delta$;

C$_{E\equiv L}$) $\equiv_{xy}\in\Gamma$, $Ex\in\Gamma$ та $Ey\in\Delta$; C$_{E\equiv R}$) $\equiv_{xy}\in\Delta$, $Ex\in\Delta$ та $Ey\in\Delta$.

3. Секвенційні числення в $L_\perp^{Q=}$ та $L_\perp^{Q\equiv}$

Побудуємо числення секвенційного типу, які формалізують відношення логічного наслідку для множин формул в $L_\perp^{Q=}$ та $L_\perp^{Q\equiv}$. Для відношення ${}^{P=}|\!=_{IR}$ в $L_\perp^{Q=}$ пропонуємо числення $C_\perp^{Q=IR}$, а для відношень ${}^{R\equiv}|\!=_{TF}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{TF}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{T}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{F}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{IR}$ в $L_\perp^{Q}$ – числення $C_\perp^{Q\equiv TFR}$, $C_\perp^{QTF}$, $C_\perp^{Q\equiv T}$, $C_\perp^{Q\equiv F}$, $C_\perp^{Q\equiv IR}$. Ці числення є розширеннями збудованих в [12] числень для відношень ${}^{P}|\!=_{IR}$, ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{R}|\!=_{TF}$ в $L_\perp^{Q}$, вони узагальнюють числення для відношень логічного наслідку в L^Q (див. [5, 11]). Ми трактуємо секвенції як множини формул, специфікованих символами $\vdash$ (T-формули) та $\dashv$ (F-формули). Позначаємо секвенції як $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$; тут Γ та Δ – це множини T-формул та F-формул.

Секвенційне числення задається базовими секвенційними формами і умовами замкненості секвенції. Замкнені секвенції є аксіомами секвенційного числення. Якщо $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ замкнена, то гарантовано $\Gamma\,|\!=\Delta$.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми, вони індукуються властивостями відношень логічного наслідку. Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція. Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ, яке називають виведенням секвенції Σ.

Для множини специфікованих формул $\Sigma = {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ задамо множини *означених* предметних імен, або *val*-змінних, та та *неозначених* предметних імен, або *unv*-змінних: $val({}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta) = \{xV \mid Ex\in\Gamma\}$; $unv({}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta) = \{x\in V \mid Ex\in\Delta\}$.

Задамо також множину *нерозподілених* для Σ імен: $ud(\Sigma) = nm(\Sigma)\setminus(val(\Sigma)\cup unv(\Sigma))$.

Умови з*амкненості* секвенції задаються умовами гарантованої наявності відношення логічного наслідку.

Згідно наведених вище умов гарантованої наявності $\Gamma \mid\!\!=\!\!\text{-}\ \Delta$ маємо такі умови замкненості секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Числення $C_{\perp}{}^{Q=IR}$: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CF}\ \mathrm{C}_{\mathrm{Rf=}} \vee \mathrm{C}_{\perp\mathrm{L}} \vee,\ \mathrm{C}_{\perp\mathrm{R}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E=L}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E=R}}$.

Числення $C_{\perp}{}^{Q\equiv IR}$: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CF} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{Rf\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{R\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv L}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv R}}$.

Числення $C_{\perp}{}^{Q\equiv T}$: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CF} \vee \mathrm{CL} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{Rf\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{R\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv L}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv R}}$.

Числення $C_{\perp}{}^{Q\equiv F}$: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CF} \vee \mathrm{CR} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{Rf\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{R\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv L}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv R}}$.

Числення $C_{\perp}{}^{Q\equiv TF}$: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CF} \vee \mathrm{CLR} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{Rf\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{R\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv L}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv R}}$.

Числення $C_{\perp}{}^{Q\equiv TFR}$: умова $\mathrm{C} \vee \mathrm{CF} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{Rf\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{R\equiv}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv L}} \vee \mathrm{C}_{\mathrm{E\equiv R}}$.

Базові секвенційні форми. Числення $C_{\perp}{}^{Q\equiv TFR}$, $C_{\perp}{}^{Q\equiv TF}$, $C_{\perp}{}^{Q\equiv T}$, $C_{\perp}{}^{Q\equiv F}$, мають однакові базові секвенційні форми, а відрізняються різними умовами замкненості секвенції. Базові секвенційні форми складаються з базових форм числення $C_{\perp}{}^{QTFR}$ (див. [12]), які доповнені формами для предикатів рівності $\equiv_{xy}$.

Базові секвенційні форми числень $C_{\perp}{}^{Q\equiv IR}$ та $C_{\perp}{}^{Q=IR}$ складаються з базових форм числення $C_{\perp}{}^{QIR}$ (див. [12]), які доповнені формами відповідно для предикатів $\equiv_{xy}$ та предикатів $=_{xy}$.

Базові секвенційні форми числень $C_{\perp}{}^{Q\equiv TFR}$, $C_{\perp}{}^{Q\equiv TF}$, $C_{\perp}{}^{Q\equiv T}$, $C_{\perp}{}^{Q\equiv F}$ можна розбити на такі групи.

Допоміжні форми спрощення; вони успадковані від числень $L_{\perp}{}^{Q}$:

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}\Phi,\Sigma}{{}_{\vdash}R(\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}\Phi,\Sigma}{{}_{\dashv}R(\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}\neg\Phi,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R(\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}\neg\Phi,\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R(\Phi),\Sigma};
$$

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{I}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{I}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{I}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{I}\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma};
$$

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{U}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{U}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{U}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{U}\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{y,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma};
$$

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}{\uparrow}1\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,z}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}{\uparrow}1\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,z}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\mathrm{R}{\uparrow}1\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,z}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{R}{\uparrow}1\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u,y}_{\bar x,\perp,z}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma};
$$

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}{\uparrow}2\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}{\uparrow}2\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\mathrm{R}{\uparrow}2\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{R}{\uparrow}2\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(p),\ {}_{\dashv}Ez,\Sigma}.
$$

Для форм типу $\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{U}$ умова: $y\in(\Phi)$; для форм типу $\mathrm{R}{\uparrow}1$ та $\mathrm{R}{\uparrow}2$ умова: $p\in Ps$.

Форми зняття ¬ та зняття реномінації предикатів-індикаторів (успадковані від числення $C_{\perp}{}^{QTFR}$):

$$
{}_{\vdash}\neg\mathrm{E}\ \frac{{}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg Ez,\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{E}\ \frac{{}_{\vdash}Ez,\Sigma}{{}_{\dashv}\neg Ez,\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\mathrm{RE}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez),\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{RE}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez),\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez),\Sigma};
$$

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{E}}\ \frac{{}_{\vdash}Ez,\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez),\Sigma},\ z\notin\{\bar v,\bar u\};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{E}}\ \frac{{}_{\dashv}Ez,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez),\Sigma},\ z\notin\{\bar v,\bar u\};\quad
{}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{EV}}\ \frac{{}_{\vdash}Ey,\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,y}(Ez),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{EV}}\ \frac{{}_{\dashv}Ey,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,y}(Ez),\Sigma}.
$$

Форми еквівалентних перетворень (успадковані від числень $L_{\perp}{}^{Q}$):

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}\circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}\circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)),\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}\circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}\circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(R^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(\Phi)),\Sigma};
$$

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\neg\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\neg\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\mathrm{R}_{\perp}\neg\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{R}_{\perp}\neg\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg\Phi),\Sigma};
$$

$$
{}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\vee\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)\vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\vee\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)\vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};
$$

$$
{}_{\vdash}\neg\mathrm{R}_{\perp}\vee\ \frac{{}_{\vdash}\neg(R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)\vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi)),\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\mathrm{R}_{\perp}\vee\ \frac{{}_{\dashv}\neg(R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi)\vee R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Psi)),\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\Phi\vee\Psi),\Sigma}.
$$

Форми декомпозиції формул (успадковані від числень $L_{\perp}{}^{Q}$):

$$
{}_{\vdash}\neg\neg\ \frac{{}_{\vdash}\Phi,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\neg\Phi,\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\neg\ \frac{{}_{\dashv}\Phi,\Sigma}{{}_{\dashv}\neg\neg\Phi,\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\vdash}\Phi,\Sigma\quad {}_{\vdash}\Psi,\Sigma}{{}_{\vdash}\Phi\vee\Psi,\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\dashv}\Phi,\ {}_{\dashv}\Psi,\Sigma}{{}_{\dashv}\Phi\vee\Psi,\Sigma};\quad
{}_{\vdash}\neg\vee\ \frac{{}_{\vdash}\neg\Phi,\ {}_{\vdash}\neg\Psi,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg(\Phi\vee\Psi),\Sigma};\quad
{}_{\dashv}\neg\vee\ \frac{{}_{\dashv}\neg\Phi,\Sigma\quad {}_{\dashv}\neg\Psi,\Sigma}{{}_{\dashv}\neg(\Phi\vee\Psi),\Sigma}.
$$

Форми елімінації кванторів, *E*-розподілу та первісного означення (успадковані від числень $L_{\perp}{}^{Q}$):

$${}_{\vdash}\exists\ \frac{{}_{\vdash}R^{x}_{z}(\Phi),\ {}_{\vdash}Ez,\ \Sigma}{{}_{\vdash}\exists x\Phi,\ \Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\exists\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{x}_{z}(\Phi),\ {}_{\vdash}Ez,\ \Sigma}{{}_{\dashv}\neg\exists x\Phi,\ \Sigma};\qquad {}_{\vdash}\exists\mathrm{R}_{\perp}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\Phi),\ {}_{\vdash}Ez,\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\exists\mathrm{R}_{\perp}\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\Phi),\ {}_{\vdash}Ez,\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{v}\ \frac{{}_{\vdash}\neg\exists x\Phi,\ {}_{\vdash}Ey,\ {}_{\vdash}\neg R^{x}_{y}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\vdash}\neg\exists x\Phi,\ {}_{\vdash}Ey,\ \Sigma};\qquad {}_{\dashv}\exists\mathrm{v}\ \frac{{}_{\dashv}\exists x\Phi,\ {}_{\vdash}Ey,\ {}_{\dashv}R^{x}_{y}(\Phi),\ \Sigma}{{}_{\dashv}\exists x\Phi,\ {}_{\vdash}Ey,\ \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{v}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\ {}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi),\ {}_{\vdash}Ey,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\ {}_{\vdash}Ey,\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\exists\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{v}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi),\ {}_{\vdash}Ey,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\ {}_{\vdash}Ey,\Sigma};$$

$$\mathrm{Ed}\ \frac{{}_{\vdash}Ex,\Sigma\quad {}_{\dashv}Ex,\Sigma}{\Sigma};\qquad \mathrm{Ev}\ \frac{{}_{\vdash}Ez,\ \Sigma}{\Sigma}\ \text{за умови: } z\in fu(\Sigma).$$

Форми ${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}_{\perp}$, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{R}_{\perp}$, ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\dashv}\neg\exists$ назвемо $\exists_{\mathrm{T}}$-формами; форми ${}_{\dashv}\exists$v, ${}_{\vdash}\neg\exists$v, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{R}_{\perp}$v, ${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{R}_{\perp}$v назвемо $\exists_{\mathrm{F}}$-формами. Для ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\dashv}\neg\exists$ умова: $z\in fu(\Sigma, \exists x\Phi)$; для ${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}_{\perp}$, ${}_{\dashv}\neg\exists\mathrm{R}_{\perp}$ умова: $z\in fu\,(\Sigma, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi))$; для $\exists_{\mathrm{F}}$-форм Ey не входить до Σ.

Спеціальною формою числень $L_{\perp}^{Q\equiv}$ є форма транзитивності $\equiv_{xy}$: $\mathrm{Tr}\equiv\ \dfrac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}\equiv_{yz},\ {}_{\vdash}\equiv_{xz},\ \Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}\equiv_{yz},\ \Sigma}$.

Форми зняття $\neg$ для рівності та реномінацій рівності:

$${}_{\vdash}\neg\equiv\ \frac{{}_{\dashv}\equiv_{xy},\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\equiv_{xy},\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\equiv\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\Sigma}{{}_{\dashv}\neg\equiv_{xy},\Sigma};\qquad {}_{\vdash}\neg\mathrm{R}\equiv\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\equiv\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma}{{}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma}.$$

. Допоміжні форми спрощення – елімінації пари рівних в реномінації:

$${}_{\vdash}{\equiv}\mathrm{elR}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi),\Sigma};\quad {}_{\dashv}{\equiv}\mathrm{elR}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi),\Sigma};\quad {}_{\vdash}{\equiv}\mathrm{el}\neg\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi),\Sigma};\quad {}_{\dashv}{\equiv}\mathrm{el}\neg\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi),\Sigma}.$$

Форми спрощення – реномінації рівності:

$${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{xx}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xz},\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\equiv_{xx}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{xx}\ \frac{{}_{\dashv}\equiv_{xz},\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\equiv_{xx}),\Sigma};\qquad {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{0}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{0}\ \frac{{}_{\dashv}\equiv_{xy},\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{2}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{zs},\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,s}(\equiv_{xy}),\Sigma};\ {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{2}\ \frac{{}_{\dashv}\equiv_{zs},\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,s}(\equiv_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{2\mathrm{E}}\ \frac{{}_{\vdash}\neg Ez,\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{2\mathrm{E}}\ \frac{{}_{\dashv}\neg Ez,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{zy},\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\equiv_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1}\ \frac{{}_{\dashv}\equiv_{zy},\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\equiv_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1\mathrm{E}}\ \frac{{}_{\vdash}\neg Ey,\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1\mathrm{E}}\ \frac{{}_{\dashv}\neg Ey,\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(\equiv_{xy}),\Sigma};$$

Для ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1}$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1}$, ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp 1\mathrm{E}}$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{1\mathrm{E}}$ умова $y\notin\{\bar{u},\bar{v}\}$ та $x\neq y$; для ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{0}$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{\equiv}_{0}$ умова $x, y\notin\{\bar{u},\bar{v}\}$

Спеціальні форми заміни рівних(для цих форм $p\in Ps$):

$${}_{\vdash}{\equiv}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(p),\Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}{\equiv}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(p),\Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}{\equiv}\neg\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\ {}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(p),\Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}{\equiv}\neg\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}\ \frac{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\ {}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(p),\Sigma}{{}_{\vdash}\equiv_{xy},\ {}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\Sigma}.$$

Форми типів R, RI, RU, R↑, ≡elR – *допоміжні*, виконуються кожен раз при появі відповідної ситуації.

Базові секвенційні форми числення $C_{\perp}^{Q\equiv IR}$ складаються із наведених вище секвенційних форм, із яких вилучено форми із запереченням зовнішньої реномінації та форми типів ¬E, ¬RE, ¬≡, ¬R≡, зате додано форми

$${}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\dashv}\Phi,\ \Sigma}{{}_{\vdash}\neg\Phi,\ \Sigma};\qquad {}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\vdash}\Phi,\ \Sigma}{{}_{\dashv}\neg\Phi,\ \Sigma}.$$

Базові секвенційні форми числення $C_{\perp}^{Q=IR}$ складаються із базових форм числення $C_{\perp}^{QIR}$ (форми ${}_{\vdash}$R, ${}_{\dashv}$R, $\mathrm{R}_{\perp}$I, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}$I, ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}$U, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}$U, ${}_{\vdash}$R↑1, ${}_{\dashv}$R↑1, ${}_{\vdash}$R↑2, ${}_{\dashv}$R↑2, ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{E}}$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{E}}$, ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{EV}}$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{EV}}$, ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}$R, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}$R, ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\neg$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}$, ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}\vee$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}\vee$, ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}_{\perp}$, ${}_{\dashv}\exists$v, ${}_{\dashv}\exists\mathrm{R}_{\perp}$v, Ed, Ev), до яких додано форми, пов’язані з предикатами $=_{xy}$.

Спеціальною формою числення $C_{\perp}^{Q=IR}$ є форма транзитивності $=_{xy}$:

$$\mathrm{Tr}{=}\ \frac{{}_{\vdash}=_{xy},\ {}_{\vdash}=_{yz},\ {}_{\vdash}=_{xz},\ \Sigma}{{}_{\vdash}=_{xy},\ {}_{\vdash}=_{yz},\ \Sigma}.$$

Форми спрощення – реномінації слабкої рівності:

$${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{x}\ \frac{{}_{\vdash}=_{xz},\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(=_{xx}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{xx}\ \frac{{}_{\dashv}=_{xz},\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(=_{xx}),\Sigma};\qquad {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{0}\ \frac{{}_{\vdash}=_{xy},\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(=_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{0}\ \frac{{}_{\dashv}=_{xy},\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(=_{xy}),\Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{2}\ \frac{{}_{\vdash}=_{zs},\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,s}(=_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{2}\ \frac{{}_{\dashv}=_{zs},\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,s}(=_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{1}\ \frac{{}_{\vdash}=_{zy},\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(=_{xy}),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{1}\ \frac{{}_{\dashv}=_{zy},\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(=_{xy}),\Sigma}.$$

Для ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{1}$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{1}$ умова $y\notin\{\bar{u},\bar{v}\}$ та $x\neq y$; для ${}_{\vdash}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{0}$, ${}_{\dashv}\mathrm{R}_{\perp}{=}_{0}$ умова $x, y\notin\{\bar{u},\bar{v}\}$.

Допоміжні форми спрощення – елімінації пари рівних в реномінації:

$${}_{\vdash}{=}\mathrm{elR}\ \frac{{}_{\vdash}=_{xy},\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}=_{xy},\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi),\Sigma};\qquad {}_{\dashv}{=}\mathrm{elR}\ \frac{{}_{\vdash}=_{xy},\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\Phi),\Sigma}{{}_{\vdash}=_{xy},\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},y}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi),\Sigma}.$$

Спеціальні форми заміни рівних(для цих форм $p\in Ps$):

$$ {}_{\vdash}{=}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}\ \frac{{}_{\vdash}{=}_{xy},\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(p),\Sigma}{{}_{\vdash}{=}_{xy},\ {}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\Sigma}; \qquad {}_{\dashv}{=}\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}\ \frac{{}_{\vdash}{=}_{xy},\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(p),\Sigma}{{}_{\vdash}{=}_{xy},\ {}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p),\Sigma}. $$

Для кожного з розглянутих секвенційних числень властивості відповідних відношень логічного наслідку для множин формул індукують основну властивість базових секвенційних форм:

Теорема 1. 1. Нехай $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\,{}_{\dashv}\mathrm{K}}{{}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta}$ – базова форма. Тоді: a) $\Lambda\,|{=}_{*}\,\mathrm{K}\ \ \Gamma\,|{=}_{*}\,\Delta$; b) $\Gamma\,|{\neq}_{*}\,\Delta\ \ \Lambda\,|{\neq}_{*}\,\mathrm{K}$.

2. Нехай $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\,{}_{\dashv}\mathrm{K}\qquad {}_{\vdash}\mathrm{X}\,{}_{\dashv}\mathrm{Z}}{{}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta}$ – базова форма. Тоді: a) $\Lambda\,|{=}_{*}\,\mathrm{K}$ та $\mathrm{X}\,|{=}_{*}\,\mathrm{Z}\ \ \Gamma\,|{=}_{*}\,\Delta$; b) $\Lambda\,|{\neq}_{*}\,\mathrm{K}$ або $\mathrm{X}\,|{\neq}_{*}\,\mathrm{Z}\ \ \Gamma\,|{\neq}_{*}\,\Delta$.

Побудова виведення. Стисло опишемо особливості побудови виведення – секвенційного дерева – для заданої **скінченної** секвенції Σ. Розгляд ведемо для числення $C_{\perp}^{Q\equiv TFR}$, для інших числень побудова аналогічна.

На початку виведення виконуємо *первісний розподіл* імен $ud(\Sigma)$: використовуючи Ed-форму, робимо всеможливі розподіли всіх імен із $ud(\Sigma)$ на означені та неозначені (детальніше див. [5, 12]).

Етап виведення для незамкненої листа-секвенції η полягає в наступній добудові скінченного піддерева з вершиною η. Активізуємо формули секвенції η, окрім примітивних. До кожної активної формули далі застосовується відповідна форма. Щоразу у відповідній ситуації виконуємо спрощення, застосовуючи належні *допоміжні* форми типів R, $\mathrm{R}_{\perp}$I, $\mathrm{R}_{\perp}$U, R↑, ≡elR. Форми типу R↑ застосовуємо до примітивних формул та їх заперечень. Після їх застосування усі примітивні формули секвенції та їх заперечення стають *Un*-формулами, де *Un* – множина всіх *unv*-змінних формул секвенцій на шляху від кореня до даної секвенції.

Форми типу $\equiv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}$ (заміни рівних) виконуються кожен раз із появою пари формул, одна з яких вигляду ${}_{\vdash}x\equiv y$, а друга – вигляду ${}_{\vdash}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p)$, ${}_{\dashv}R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p)$, ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p)$, ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(p)$, причому принаймні одна з них *нова* для секвенції. Форми Tr≡ виконуються раз по раз при появі пари формул ${}_{\vdash}{\equiv}_{xy}$ та ${}_{\vdash}{\equiv}_{yz}$, принаймні одна з яких *нова* для даної секвенції.

Застосування на етапі $\exists_{\mathrm{T}}$-форм передує застосуванню $\exists_{\mathrm{F}}$-форм. Із кожним застосуванням $\exists_{\mathrm{T}}$-форми беремо *нове* $z\in V_T$, яке відсутнє на шляху від кореня до даної секвенції. Кожна $\exists_{\mathrm{F}}$-форма виконується багатократно для кожного означеного *y* із формул на шляху від Σ до даної секвенції. Після застосування основної форми та виконання спрощень утворені нею формули на даному етапі *пасивні*, до таких формул на цьому етапі основні секвенційні форми не застосовуються. Після виконання форми перевіряємо отриману секвенцію на замкненість. Якщо секвенція незамкнена, то перевіряємо, чи буде Ω фінальною секвенцією.

Фінальність незамкненої вершини-секвенції означає, що до неї незастосовна жодна форма, або кожне застосування секвенційної форми до Ω не вводить *нових* формул, відмінних від формул на шляху ρ від кореня Σ до Ω. Це означає ситуацію повторення незамкненої секвенції на шляху ρ, тому всі вершини ρ – незамкнені секвенції. Поява в дереві такого *незамкненого* шляху засвідчує *негативне* завершення побудова виведення.

Отже, при побудові секвенційного дерева – виведення скінченної секвенції – можливі такі випадки:

1) Всі листи будованого дерева замкнені, ми отримали скінченне замкнене секвенційне дерево, побудова виведення завершена *позитивно*.

2) Маємо скінченне незамкнене дерево, в якому існує незамкнений шлях; побудову завершено негативно.

3) Побудова не завершується, тоді будоване дерево нескінченне. Нескінченне дерево зі скінченним розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях (лема Кеніга [3]). Такий шлях незамкнений, усі його вершини – незамкнені секвенції, адже поява замкненої секвенції обриває побудову дерева на цьому шляху.

Поетапна побудова секвенційного дерева для ***нескінченної*** зліченної секвенції Σ має таку особливість: кожне застосування секвенційної форми проводимо до скінченної множини *доступних* на даний момент формул. Детальний опис побудови секвенційного дерева див., напр., в [5, 11, 12].

При побудові дерева для зліченної секвенції можливі 2 випадки:

1) побудова завершена позитивно, отримано скінченне замкнене дерево;

2) побудова не завершується, тоді маємо нескінченне незамкнене дерево, а в такому дереві існує нескінченний незамкнений шлях. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Для кожного з пропонованих секвенційних числень справджується *теорема коректності.* Вона формулюється і доводиться однотипно для кожного з цих числень. У цьому формулюванні відношенням логічного наслідку ${}^{R\equiv}|{=}_{TF}$, ${}^{P\equiv}|{=}_{TF}$, ${}^{P\equiv}|{=}_{T}$, ${}^{P\equiv}|{=}_{F}$, ${}^{P\equiv}|{=}_{IR}$, ${}^{P=}|{=}_{IR}$ відповідають числення $C_{\perp}^{Q\equiv TFR}$, $C_{\perp}^{Q\equiv TF}$, $C_{\perp}^{Q\equiv T}$, $C_{\perp}^{Q\equiv F}$, $C_{\perp}^{Q\equiv IR}$, $C_{\perp}^{Q=IR}$.

Теорема 2. Нехай секвенція ${}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні $C^{\#}$, тоді $\Gamma\,|{=}_{*}\,\Delta$.

Якщо ${}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні $C^{\#}$, то для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Для кожної його вершини ${}_{\vdash}\Lambda\,{}_{\dashv}\mathrm{K}$ маємо $\Lambda\,|{=}_{*}\,\mathrm{K}$. Для листів дерева це випливає з визначення замкненої секвенції, а збереження секвенційними формами відношення логічного наслідку (від засновків до висновку) випливає з теореми 3. Тому для кореня дерева – секвенції ${}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta$ – теж маємо $\Gamma\,|{=}_{*}\,\Delta$.

Теореми про контрмоделі. Доведення теорем повноти секвенційних числень спирається на теореми про існування контрмоделі для множини формул незамкненого шляху. Для доведення теорем про контрмоделі використовують метод модельних множин. Доведення теорем про контрмоделі подібне до доведення в [5, 11] відповідних теорем для числень традиційних ЧКНЛ. Розглянемо теорему про контрмоделі для числення $C_{\perp}^{Q\equiv TFR\equiv}$.

Теорема 3. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху $\wp$. Тоді існують інтерпретації $\boldsymbol{A} = (S, I_A)$, $\boldsymbol{B} = (S, I_B)$ та $\delta\in{}^{V}S$:

H_T) $_{\vdash}\Phi\in H \Rightarrow \delta\in T(\Phi_A)$ та $_{\dashv}\Phi\in H \Rightarrow \delta\notin T(\Phi_A)$;

H_F) $_{\vdash}\Phi\in H \Rightarrow \delta\notin F(\Phi_B)$ та $_{\dashv}\Phi\in H \Rightarrow \delta\in F(\Phi_B)$.

Такі пари $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та $(\boldsymbol{B}, \delta)$ назвемо $T^{\equiv}$-контрмоделлю і $F^{\equiv}$-контрмоделлю для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

$Un = \{y\in nm(H)\,|\,_{\dashv}Ey\in H\}$ – це множина неозначених імен H. Задамо $W = nm(H)\setminus Un$. Наявність первісного означення дає умову $W = \{y\in nm(H)\,|\,_{\vdash}Ey\in H\}$. Множину W вважаємо множиною означених імен множини H.

Застосування секвенційних форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається доти, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула чи її заперечення на шляху $\wp$ рано чи пізно буде розкладена чи спрощена.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується умова $\mathrm{C}\vee\mathrm{CF}\vee\mathrm{C}_{\mathrm{Rf}\equiv}\vee\mathrm{C}_{\mathrm{R}\equiv}\vee\mathrm{C}_{\mathrm{E}\equiv\mathrm{L}}\vee\mathrm{C}_{\mathrm{E}\equiv\mathrm{R}}$. Тому для множини H виконуються такі умови коректності:

HC) не існує формули Φ такої, що $_{\vdash}\Phi\in H$ та $_{\dashv}\Phi\in H$;

HCF) не існує формули вигляду $R_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}(Ez)$ такої, що $_{\vdash}R_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}(Ez)\in H$;

$\mathrm{HC}_{\mathrm{Rf}\equiv}$) не існує $x\in V$ такого, що $_{\dashv}{\equiv_{xx}}\in H$;

$\mathrm{HC}_{\mathrm{R}\equiv}$) не існує формули вигляду $R_{\bar{x},\perp,\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},x,z}(\equiv_{xz})$ такої, що $_{\dashv}R_{\bar{x},\perp,\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},x,z}(\equiv_{xz})\in H$;

$\mathrm{HC}_{\mathrm{E}\equiv\mathrm{L}}$) не існує формул $\equiv_{xy}$, Ex, Ey таких, що $_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H$, $_{\vdash}Ex\in H$, $_{\dashv}Ey\in H$;

$\mathrm{HC}_{\mathrm{E}\equiv\mathrm{R}}$) не існує формул $\equiv_{xy}$, Ex, Ey таких, що $_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H$, $_{\dashv}Ex\in H$, $_{\dashv}Ey\in H$.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої відбуваються згідно з певною секвенційною формою, тому для H виконуються відповідні умови переходу. Наведемо для прикладу наступні умови переходу:

HTr≡) $_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H$ та $_{\vdash}{\equiv_{yz}}\in H \Rightarrow {}_{\vdash}{\equiv_{xz}}\in H$;

H≡R⊥r) $_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H,\ _{\vdash}R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H \ \Rightarrow\ _{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H,\ _{\vdash}R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H,\ _{\vdash}R_{\bar{w},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H$;

$$_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H,\ _{\dashv}R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H \ \Rightarrow\ _{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H,\ _{\dashv}R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H,\ _{\dashv}R_{\bar{w},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H;$$

H¬≡R⊥r) $_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H,\ _{\vdash}\neg R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H \ \Rightarrow\ _{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H,\ _{\vdash}\neg R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H,\ _{\vdash}\neg R_{\bar{w},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H$;

$$_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H,\ _{\dashv}\neg R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H \ \Rightarrow\ _{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H,\ _{\dashv}\neg R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H,\ _{\dashv}\neg R_{\bar{w},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(p)\in H.$$

Множину специфікованих формул H, для якої виконуються такі умови, назвемо $R_{TF\equiv}$-*модельною*.

Побудуємо контрмодель за $R_{TF\equiv}$-модельною множиною H.

Предикати рівності індукують на множині W відношення еквівалентності: $x\sim y \Leftrightarrow {}_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H$.

Нехай $S = W/_{\sim}$ – фактор-множина множини W за відношенням $\sim$. Позначимо як $\langle v\rangle$ клас еквівалентності з представником v. Визначимо $\delta = [v\mapsto\langle v\rangle \mid v\in W]$. Таке відображення δ є сюр'єкцією W S.

Для предикатів-індикаторів та предикатів рівності в інтерпретаціях $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ маємо:

– $_{\vdash}Ex\in H$ дає $x\in W$, тому $Ex_A(\delta) = T$ та $Ex_B(\delta) = T \Rightarrow \delta\in T(Ex_A)$ та $\delta\notin F(Ex_B)$;

– $_{\dashv}Ex\in H$ дає $x\notin W$, тому $\delta(x)\uparrow$, звідки $Ex_A(\delta) = Ex_B(\delta) = F \Rightarrow \delta\notin T(Ex_A)$ та $\delta\in F(Ex_B)$;

– якщо $_{\vdash}{\equiv_{xy}}\in H$, то $x\sim y$, тому за побудовою δ $\equiv_{xy\,A}(\delta) = T$ та $\equiv_{xy\,B}(\delta) = T \Rightarrow \delta\in T(\equiv_{xy\,A})$ та $\delta\notin F(\equiv_{xy\,B})$;

– якщо $_{\dashv}{\equiv_{xy}}\in H$, то невірно $x\sim y$, тому за побудовою δ $\equiv_{xy\,A}(\delta) = F$ та $\equiv_{xy\,B}(\delta) = T \Rightarrow \delta\in F(\equiv_{xy\,A})$ та $\delta\notin T(\equiv_{xy\,B})$.

Задамо на δ в інтерпретаціях $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ значення предикатів, поданих предикатними символами та їх запереченнями, і поданих примітивними Un-формулами та їх запереченнями. Це робимо так:

– $_{\vdash}p\in H \Rightarrow \delta\in T(p_A)$ та $\delta\notin F(p_B)$; $_{\dashv}p\in H \Rightarrow \notin T(p_A)$ та $\in F(p_B)$;

– $_{\vdash}\neg p\in H \Rightarrow \delta\in T(\neg p_A)$ та $\delta\notin F(\neg p_B)$; $_{\dashv}\neg p\in H \Rightarrow \delta\notin T(\neg p_A)$ та $\delta\in F(\neg p_B)$;

– $_{\vdash}R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)\in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\delta)\in T(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\delta)\notin F(p_B)$, тобто $\delta\in T(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)_A)$ та $\delta\notin F(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)_B)$;

– $_{\vdash}R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)\in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\delta)\notin T(p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\delta)\in F(p_B)$, тобто $\delta\notin T(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)_A)$ та $\delta\in F(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)_B)$;

– $_{\vdash}\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)\in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\delta)\in T(\neg p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\delta)\notin F(\neg p_B)$, тобто $\delta\in T(\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)_A)$ та $\delta\notin F(\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)_B)$;

– $_{\vdash}\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)\in H \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\delta)\notin T(\neg p_A)$ та $\mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\delta)\in F(\neg p_B)$, тобто $\delta\notin T(\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)_A)$ та $\delta\in F(\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(p)_B)$.

Для атомарних формул і примітивних Un-формул та їх заперечень твердження теореми випливає з наведеного вище визначення значень відповідних предикатів. Для пунктів, індукованих формами Tr≡ та типу $\equiv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}$, твердження теореми випливає з визначення значень предикатів рівності та значень базових предикатів і їх заперечень. Так само доводимо для інших пунктів, пов'язаних з Ez та з предикатами рівності.

Для решти пунктів доводимо індукцією за складністю формули згідно з визначенням H.

Подібно формулюються і доводяться теореми про контрмоделі для числень $C_{\perp}^{Q\equiv T}$, $C_{\perp}^{Q\equiv F}$, $C_{\perp}^{Q\equiv TF}$, $C_{\perp}^{Q\equiv IR}$, $C^{Q\equiv IR}$. Наведемо формулювання цих теорем для $C_{\perp}^{Q\equiv TF}$та $C_{\perp}^{Q\equiv IR}$.

Теорема 4. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому в $C_{\perp}^{Q\equiv TF}$ для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху $\wp$. Тоді існують $\boldsymbol{A} = (S, I_A)$, $\boldsymbol{B} = (S, I_B)$ та $\delta\in{}^{V}S$ такі:

H_T^S) $_{\vdash}\Phi\in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $_{\dashv}\Phi\in H \Rightarrow {}_A(\delta) \neq T$;

H_F^S) $_{\vdash}\Phi H \Rightarrow \Phi_B(\delta) \neq F$ та $_{\dashv}\Phi\in H \Rightarrow \Phi_B(\delta) = F$.

Пари (A, δ) та (B, δ) назвемо $T^{P\equiv}$-контрмоделлю і $F^{P\equiv}$-контрмоделлю для ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

У формулюванні теореми про контрмоделі для $C_{\perp}^{Q\equiv T}$ залишається інтерпретація $\boldsymbol{A} = (S, I_A)$ та п. H_T^S, а в формулюванні для $C_{\perp}^{Q\equiv T}$ залишається інтерпретація $\boldsymbol{B} = (S, I_B)$ та п. H_F^S.

Теорема 5. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому в $C_{\perp}^{Q\equiv IR}$ для ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху $\wp$. Тоді існують інтерпретація $\boldsymbol{A} = (S, I)$ та $\delta \in {}^{V}S$ такі:

H_C) ${}_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A() = T$ та ${}_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A() = F$.

Пару (A, δ) назвемо $IR\equiv$-контрмоделлю для секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Для числення $C^{Q=IR}$ теорема про контрмоделі формулюється аналогічно теоремі 5.

Теореми повноти. На основі теорем про контрмоделі для кожного з пропонованих числень отримуємо теорему повноти. Вона формулюється однотипно для кожного з цих числень. У цьому формулюванні відношенням ${}^{R\equiv}|\!=_{TF}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{TF}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{T}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{F}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{IR}$, ${}^{P=}|\!=_{IR}$ відповідають числення $C_{\perp}^{Q\equiv TFR}$, $C_{\perp}^{Q\equiv TF}$, $C_{\perp}^{Q\equiv T}$, $C_{\perp}^{Q\equiv F}$, $C_{\perp}^{Q\equiv IR}$, $C_{\perp}^{Q=IR}$.

Теорема 6. Нехай $\Gamma\, |\!=_{*} \Delta$, тоді секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в численні $C^{\#}$.

Доведемо для прикладу для ${}^{R\equiv}|\!=_{TF}$ та $C_{\perp}^{Q\equiv TFR}$. Подібні доведення теорем повноти див. [5, 12].

Нехай маємо супротивне: $\Gamma\, {}^{R\equiv}|\!=_{TF} \Delta$ та секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна. Тоді секвенційне дерево для ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ незамкнене, тому в цьому дереві існує незамкнений шлях. Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. За теоремою 3 існують $T^{\equiv}$-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та $F^{\equiv}$-контрмодель $(\boldsymbol{B}, \delta)$ такі:

${}_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$ та ${}_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin T(\Phi_A)$; ${}_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin F(\Phi_B)$ та ${}_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in F(\Phi_B)$.

Для $T^{\equiv}$-контрмоделі згідно з ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\delta \in T(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\Delta$ маємо $\delta \notin T(\Psi_A)$. Звідси $\delta \in T(\Gamma_A)$ та $\delta \notin T(\Delta_A)$, тому невірно $T(\Gamma_A) \subseteq T(_A)$. Це заперечує $\Gamma_A |\!=_T \Delta$, тому й заперечує $\Gamma\, {}^{R\equiv}|\!=_{TF} \Delta$.

Для $F^{\equiv}$-контрмоделі згідно з ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \subseteq H$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\delta F(\Phi_B)$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\delta \in F(\Psi_B)$. Звідси $\delta F(\Gamma_B)$ та $\delta \in F(\Delta_B)$, тому невірно $F(_B) \subseteq F(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma_B |\!=_F \Delta$, тому й заперечує $\Gamma\, {}^{R\equiv}|\!=_{TF} \Delta$.

Висновки

Досліджено нові класи програмно-орієнтованих логік – чисті першопорядкові логіки часткових квазіарних предикатів із розширеними реномінаціями та предикатами строгої рівності й слабкої рівності, названі відповідно $L_{\perp}^{Q\equiv}$ та $L_{\perp}^{Q=}$. Наведено властивості композицій таких логік, описано їхні мови. Розглянуто відношення логічного наслідку в цих логіках, описано властивості цих відношень. Особливу увагу приділено властивостям, пов'язаним із предикатами рівності. Для відношень логічного наслідку побудовано відповідні числення секвенційного типу. Наведено базові секвенційні форми цих числень та умови замкненості секвенцій, описано побудову секвенційного дерева – виведення в цих численнях. Розглянуто теореми про існування контрмоделей, наведено побудову контрмоделей за незамкненим шляхом у секвенційному дереві. Для пропонованих числень доведено теореми коректності та повноти; доведення теорем повноти спирається на теореми про контрмоделі.

Література

1. *Handbook* of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. Gallier J. Logic for computer science: foundations of automatic theorem proving. Second edition, Dover, New York, 2015.
3. Kleene S.C. Mathematical Logic. New York, 1967.
4. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. Київ: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. Проблеми програмування. 2016. № 2–3. С. 73–86.
6. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки із узагальненими реномінаціями. Проблеми програмування. 2014. № 2–3. С. 17–28.
7. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові квазіарні логіки з предикатами рівності. Проблеми програмування. 2017. № 2. С. 3–23.
8. Шкільняк С.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки з предикатами слабкої та строгої рівності. Проблеми програмування. 2019. № 3. С. 28–44.
9. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С., Мамедов Т.А. Реномінативні логіки з розширеними реномінаціями, рівністю та предикатним доповненням. Штучний інтелект. 2019. № 1–2. С. 34–48.
10. Nikitchenko M., O. Shkilniak O., Shkilniak S. Program-Oriented Logics of Renominative Level with Extended Renomination and Equality. ICTERI 2019, Kherson, Ukraine, 2019. In: Communications in Computer and Information Science, 2020, 1175 CCIS. P. 68-88.
11. Шкільняк С.С. Спектр секвенційних числень першопорядкових композиційно-номінативних логік. Проблеми програмування. 2013. № 3. С. 22–37.
12. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Секвенційні числення першопорядкових логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями та композицією предикатного доповнення. Проблеми програмування. 2020. № 2–3. С. 182–197.

References

1. ABRAMSKY, S., GABBAY, D. and MAIBAUM, T. (editors). (1993–2000). *Handbook of Logic in Computer Science.* Oxford University Press.
2. GALLIER, J. (2015) *Logic for computer science: foundations of automatic theorem proving.* Second edition. Dover. New York.
3. KLEENE, S. (1967) *Mathematical Logic.* New York.
4. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
5. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. Problems in Progamming. No 2–3. P. 73–86 (in ukr).

6. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2014). First-order composition-nominative logics with generalized renominations. Problems in Progamming. No 2–3. P. 17–28 (in ukr).
7. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2017). Pure first-order quasiary logics with equality predicates. Problems in Progamming. No 2. P. 17–28 (in ukr).
8. SHKILNIAK, S. (2019). First-order composition-nominative logics with predicates of weak equality and of strong equality. Problems in Progamming. No 3. P. 3–23 (in ukr).
9. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O., SHKILNIAK, S. and MAMEDOV, T. (2019). Renominative logics with extended renomination, equality and predicate complement. Artificial Intelligtnce. No 1–2. P. 34–48 (in ukr).
10. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2020). Program-Oriented Logics of Renominative Level with Extended Renomination and Equality. ICTERI 2019. Kherson, Ukraine. Communications in Computer and Information Science. 1175 CCIS. P. 68-88.
11. SHKILNIAK, S. (2013). Spectrum of sequent calculi of first-order composition-nominative logics. Problems in Progamming. No 3. P. 22–37 (in ukr).
12. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2020). Sequent calculi of first-order logics of partial predicates with extended renominations and composition of predicate complement. Problems in Progamming. No 2–3. P. 182–197 (in ukr).

Одержано 17.08.2022

Про авторів:

Шкільняк Оксана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри інтелектуальних програмних систем;
кількість наукових публікацій в українських виданнях – понад 85,
в т.ч. понад 40 у фахових виданнях;
кількість зарубіжних публікацій – 18.
ORCID iD: 0000-0003-4139-2525;
Scopus Author ID: 57190873266;
h-індекс (Google Scholar): 6 (5 з 2017)

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри теорії та технології програмування;
кількість наукових публікацій в українських виданнях – понад 210,
в т.ч. понад 110 у фахових виданнях;
кількість зарубіжних публікацій – 37.
ORCID iD: 0000-0001-8624-5778;
Scopus Author ID: 36646762300;
h-індекс (Google Scholar): 8 (7 з 2017)

Місце роботи авторів:

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60;
тел.: (044) 5213345; E-mail: oksana.sh@knu.ua, ss.sh@knu.ua.

Прізвища та ініціали авторів і назва доповіді українською мовою:
Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.
Першопорядкові секвенційні числення логік квазіарних предикатів
з розширеними реномінаціями та рівністю

Прізвища та ініціали авторів і назва доповіді англійською мовою:
Shkilniak O.S., Stepan Shkilniak S.S.
First-order sequent calculi of logics of quasiary predicates
with extended renominations and equality

Контакти для редактора: тел.: 050 8000121.
E-mail: oksana.sh@knu.ua, ss.sh@knu.ua.