Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2009

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.3(0758)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О переходном процессе в $\boldsymbol{RL}$ цепи при однополупериодном выпрямленном входном напряжении

Визначено перехідний процес в RL ланці при вхідному Фур'є-сингуларисному напруженні.

Входные цепи многих устройств, машин представляют собой RL, RC электрические цепи. К таким устройствам, машинам относятся электродвигатели, электромагнитные контакторы, реле, виброударные возбудители и др. В определенных сигналах на вход этих устройств подаются однополупериодные выпрямленные косинусоидальные напряжения, вид которых изображен на рис. 1.

Согласно работе [1], периодическая функция $f(\omega t)$ (см. рис. 1) разлагается в следующий ряд Фурье:

$$f(\omega t) = \frac{2a_m}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\cos\omega t + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \cdots\right), \tag{1}$$

где ω — круговая частота; t — время.

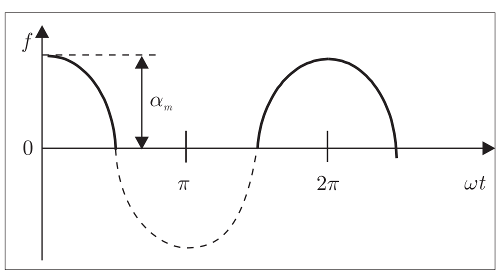

Рис. 1

Как видно из (1), данное Фурье-разложение функции $f(\omega t)$ имеет постоянную составляющую a_m/π. А это значит, что входное напряжение электрической RL цепи, выраженное соотношением (1), включает в себя скачкообразную функцию

$$\frac{a_m}{\pi}1(t), \qquad \text{где} \qquad 1(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{при} & t \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} & t < 0 \end{array} \right\}.$$

В таком случае, согласно работе [2],

$$\frac{a_m}{\pi}1(t) = \frac{a_m}{\pi}\left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\sum_{m=1}^{\infty} U_{ak}\cos\omega_k t\right), \tag{2}$$

где α — коэффициент затухания; $U_{a1} = 1/\pi$, $k = \omega_k/\omega_1$, $U_{ak} = U_{a1}/k$, $n = 12$, $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = 1$.

Правая часть выражения (2) представляет собой сингуларисное разложение скачкообразной функции $\dfrac{a_m}{\pi}1(t)$ [2]. Используя (2) в Фурье-разложении (1), получим

$$f(\omega t) = \frac{a_m}{\pi}\left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\sum_{m=1}^{\infty} U_{ak}\cos\omega_k t\right) + \\ + \frac{2a_m}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\cos\omega t + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \cdots\right). \tag{3}$$

Выражение (3) представляет собой комбинационное разложение функции $f(\omega t)$ и, по моему предложению, оно названо как Фурье-сингуларисное разложение несинусоидальной функции $f(\omega t)$. Известно [2], что латинское слово singularisnal в русском языке эквивалентно словам особый, отдельный. В связи с этим особое (отдельное) разложение (2) автор назвал сингуларисным. Использование этого разложения в Фурье-разложении (1) предопределяет название разложения (3) как Фурье-сингуларисное разложение, т. е. особое Фурье-разложение.

Таким образом, с учетом (3) на вход электрической цепи (RL или RC) подается напряжение (см. рис. 1) в виде Фурье-сингуларисного разложения. На наш взгляд, следует решить задачу о переходном процессе в рассматриваемой электроцепи, подключаемой к напряжению вида (3). Для этого запишем дифференциальное уравнение, например, RL цепи в виде

$$f(\omega t) = \frac{a_m}{\pi}\left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\sum_{m=1}^{\infty} U_{ak}\cos\omega_k t\right) + \frac{2a_m}{\pi} \times \\ \times\left(\frac{\pi}{4}\cos\omega t + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \cdots\right) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}. \tag{4}$$

Здесь R — активное сопротивление; L — индуктивность.

Решение будем осуществлять с помощью операционного метода Карсона [4], пользуясь таблицами изображений Карсона, соответствующих определенным оригиналам. Представим (4) в операционном виде

$$F(p) = \frac{a_m}{\pi}\left[\frac{\alpha}{p+\alpha} + \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\frac{p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \omega_k^2}\right] + \frac{2a_m}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\frac{p^2}{p^2+\omega^2} + \frac{1}{1\cdot 3}\frac{p^2}{p^2+4\omega^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3\cdot 5}\frac{p^2}{p^2+16\omega^2} + \frac{1}{5\cdot 7}\frac{p^2}{p^2+36\omega^2} - \cdots\right) = L\left(p + \frac{\delta}{L}\right)I(p), \tag{5}$$

где $p = d/dt$ — оператор; $F(p)$ — изображение Карсона, соответствующее $f(\omega t)$; $I(p)$ — изображение Карсона тока $i(t)$; $\delta = R/L$ — коэффициент затухания в RL цепи.

Из (5) получаем

$$I(p) = \frac{a_m}{\pi L}\frac{1}{p+\delta}\left[\frac{\alpha}{p+\alpha} + \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\frac{p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega_k^2}\right] +$$

$$+ \frac{2a_m}{\pi L}\frac{1}{p+\delta}\left(\frac{\pi}{4}\frac{p^2}{p^2+\omega^2} + \frac{1}{1\cdot 3}\frac{p^2}{p^2+4\omega^2} - \frac{1}{3\cdot 5}\frac{p^2}{p^2+16\omega^2} + \frac{1}{5\cdot 7}\frac{p^2}{p^2+36\omega^2} - \cdots\right). \quad (6)$$

На основании таблиц 13, 35, 36 [3] оригинал $i(t)$, соответствующий выражению (6), следующий:

$$i(t) = i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) + i_3(t), \quad (7)$$

где

$$i_0 = \frac{a_m}{\pi L\delta} = \frac{a_m}{\pi R};$$

$$i_1(t) = -\frac{a_m}{\pi R}e^{-\delta t} + \frac{a_m}{\pi(R-\alpha L)}(e^{-\delta t} - e^{-\alpha t});$$

$$i_2(t) = -\frac{a_m}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{U_{ka}}{(R-\alpha L)^2 + (\omega_k L)^2} \times$$

$$\times \left\{(R-\alpha L)e^{-\delta t} + e^{-\alpha t}\left[(R-\alpha L)\sin\left(\omega_k t - \frac{\pi}{2}\right) - \omega_k L\cos\left(\omega_k t - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\};$$

$$i_3(t) = \frac{2a_m}{\pi L}\left[\frac{\pi}{4}\frac{1}{\delta^2+\omega^2}(\delta e^{-\delta t} + \delta\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\delta^2+4\omega^2} \times\right.$$

$$\times (\delta e^{-\delta t} + \delta\cos 2\omega t + 2\omega\sin 2\omega t) - \frac{1}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{\delta^2+16\omega^2}(\delta e^{-\delta t} + \delta\cos 4\omega t + 4\omega\sin 4\omega t) +$$

$$\left.+ \frac{1}{5\cdot 7}\cdot\frac{1}{\delta^2+36\omega^2}(\delta e^{-\delta t} + \delta\cos 6\omega t + 6\omega\sin 6\omega t) - \cdots\right].$$

Анализируя (7) и его составляющие $i_l(t)$, $l = \overline{0,3}$, видим, что переходный процесс тока $i(t)$ в RL цепи представляет собой сумму постоянной составляющей i_0, экспоненциально быстро затухающей составляющей $i_1(t)$, экспоненциально-затухающей с коэффициентом затухания δ составляющей $i_2(t)$ и полигармонической составляющей $i_3(t)$. В принципе, $i_0 + i_1(t) + i_2(t)$ — это экспоненциально нарастающая составляющая, а $i_3(t)$ — это установившаяся составляющая тока $i(t)$. Получается, что максимум при $t = \infty$ $[i_0 + i_1(t) + i_2(t)]_{\max} = i_3(t)$. А это означает, что на всем протяжении временного интервала функционирования RL цепи из-за полигармонических $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ в этой цепи возникает явление автоматической реструктуризации [4], которое обусловливает изменение структуры цепи в связи с наличием реактивных сопротивлений $\omega_s L$, где s — индекс входящих в $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ гармоник. В связи с этим при определении величины входного напряжения $U_{\text{вх}}(t)$ этой цепи, ее мощности во время функционирования необходимо учитывать изменение реактивных сопротивлений в связи с явлением автоматической реструктуризации. Заметим, что в RC

электроцепи переходный процесс напряжения U_c не емкости C при Фурье-сингуларисном входном напряжении описывается подобным выражением (7) с учетом его составляющих. Здесь только вместо $\delta = R/L$ необходимо использовать $\delta = RC$. В цепи RC при таком входном напряжении также присутствует явление автоматической реструктуризации.

1. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
2. *Божко А. Е.* О сингуларисном разложении скачкообразной функции // Доп. НАН України. – 2008. – № 2. – С. 42–47.
3. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.
4. *Божко А. Е.* Об автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при полигармонических входных сигналах // Доп. НАН України. – 2002. – № 11. – С. 101–103.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 28.05.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On the transient process in an RL circuit with single-half-periodic rectified input voltage

The transient process in an RL circuit with input Fourier-singularisnal voltage is defined.