УДК 539.3

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про варіаційний вивід однієї змішаної системи рівнянь теорії пружності

Змішана система шести рівнянь теорії пружності подана у формі операторної гамільтонової (канонічної) системи за однією з просторових координат. Показано, що ця система є рівняннями Ейлера для варіаційного принципу Хеллінгера–Рейсснера з модифікованою відповідним чином підінтегральною функцією.

У класичній теорії пружності система трьох рівнянь рівноваги разом з шістьма матеріальними залежностями, в яких враховані формули Коші для деформацій, зводиться до трьох рівнянь Ламе відносно переміщень. При постановці задачі в напруженнях, використовуючи умови сумісності деформацій Сен-Венана і зв'язок деформацій з напруженнями для ізотропного тіла, одержують шість рівнянь Бельтрамі–Мітчела, тільки певні три з яких є незалежними. Використовується також [1–4 та ін.], особливо при використанні чисельних методів за однією просторовою координатою, змішана форма шести рівнянь відносно трьох переміщень і трьох визначених напружень. Ці рівняння записуються в операторній формі Коші відносно перших похідних за цією ж координатою. В роботі [7] вперше було показано, що змішану форму можна подати в операторній гамільтоновій формі за просторовою координатою, тобто в операторній канонічній формі. Таке представлення має фундаментальне значення в теорії коливань і хвиль в неоднорідно-періодичних середовищах [1, 7, 8 та ін.].

Три рівняння рівноваги

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+X_1=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+X_2=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+X_3=0
\end{aligned}\tag{1}$$

разом з шістьма матеріальними залежностями, в яких враховані формули Коші $2K_{rs} = u_{r,s} + u_{s,r}$ для деформацій, утворюють замкнуту систему рівнянь теорії пружності відносно шести напружень σ_{ik} і трьох переміщень u_i. При використанні чисельних методів розв'язання задач теорії пружності використовується також змішана форма рівнянь [1–4 та ін.]. Якщо матеріальні залежності для ортотропного тіла, в яких враховані формули Коші для деформацій, взяти у вигляді

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=s_{11}\sigma_{11}+s_{12}\sigma_{22}+s_{13}\sigma_{33},\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}=s_{21}\sigma_{11}+s_{22}\sigma_{22}+s_{23}\sigma_{33},\\
&\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=s_{31}\sigma_{11}+s_{32}\sigma_{22}+s_{33}\sigma_{33},\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=s_{44}\sigma_{23},\qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=s_{55}\sigma_{31},\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=s_{66}\sigma_{12},
\end{aligned}\tag{2}$$

то систему рівнянь (1), (2) можна записати в такому змішаному вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} = -\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} - X_1,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + s_{66}\sigma_{12},\\
&\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + s_{55}\sigma_{13},\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = a_{11}\sigma_{11} + a_{21}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + a_{31}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} = a_{21}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_2} - s_{33*}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{s_{44}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \left(s_{23*} - \frac{1}{s_{44}}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3} - X_2,\\
&\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} = a_{31}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_3} + \left(s_{23*} - \frac{1}{s_{44}}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{1}{s_{44}}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - s_{22*}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - X_3.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned}
&s_{22*} = \frac{s_{22}}{a_{23}}, \qquad s_{23*} = \frac{s_{22}}{a_{23}}, \qquad s_{33*} = \frac{s_{33}}{a_{23}},\\
&a_{21} = \frac{s_{21}s_{33} - s_{13}s_{23}}{a_{23}}, \qquad a_{31} = \frac{s_{13}s_{22} - s_{12}s_{23}}{a_{23}},\\
&a_{11} = s_{11} - s_{12}a_{21} - s_{13}a_{31}, \qquad a_{23} = s_{22}s_{33} - s_{23}^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Решта рівнянь системи (1), (2) служать для визначення напружень

$$\begin{aligned}
&\sigma_{22} = s_{33*}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - s_{23*}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - a_{21}\sigma_{11},\\
&\sigma_{33} = -s_{23*}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + s_{22*}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - a_{31}\sigma_{11},\\
&\sigma_{23} = \frac{1}{s_{44}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

які не ввійшли в систему (3), через розв'язуючі функції σ_{1i}, u_i.

Система (3) записана у вигляді нормальної операторної форми Коші за просторовою координатою x_1, коли розв'язуючими функціями вибрані σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}, u_1, u_2, u_3, які при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на площинах $x_1 = \mathrm{const}$.

Аналогічним чином можна одержати нормальні операторні форми Коші за просторовою змінною x_2, коли за розв'язуючі функції вибрати σ_{21}, σ_{22}, σ_{23}, u_1, u_2, u_3 і за просторовою змінною x_3, коли за розв'язуючі функції вибрати σ_{31}, σ_{32}, σ_{33}, u_1, u_2, u_3.

Коефіцієнти (4) системи (3), а значить і податливості s_{ik}, через які вони виражаються, можуть бути довільними функціями координати x_1 з розривами першого роду.

Якщо ввести канонічні змінні

$$(\widehat{q}_1, \widehat{q}_2, \widehat{q}_3) = (\sigma_{11}, u_2, u_3), \qquad (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3) = (u_1, \sigma_{12}, \sigma_{13}),$$

то система (3) буде записана у вигляді неоднорідної операторної гамільтонової системи за просторовою координатою x_1

$$\frac{\partial \widehat{q}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{p}_i} - \delta_{i1} X_1, \qquad \frac{\partial \widehat{p}_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{q}_i} - \delta_{i2} X_2 - \delta_{i3} X_3 \tag{6}$$

з операторною функцією Гамільтона

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\widehat{q}_i \widehat{P}_{ik} \widehat{q}_k + \frac{1}{2}\widehat{p}_i \widehat{Q}_{ik} \widehat{p}_k. \tag{7}$$

Ненульові елементи симетричних операторних матриць $\widehat{P}_{ik}$, $\widehat{Q}_{ik}$ такі:

$$\widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \widehat{Q}_{13} = \widehat{Q}_{31} = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad \widehat{Q}_{22} = s_{66}, \qquad \widehat{Q}_{33} = s_{55},$$

$$\widehat{P}_{11} = -a_{11}, \qquad \widehat{P}_{12} = \widehat{P}_{21} = -a_{21}\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \widehat{P}_{13} = \widehat{P}_{31} = -a_{31}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\widehat{P}_{22} = s_{33*}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{s_{44}}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \qquad \widehat{P}_{33} = \frac{1}{s_{44}}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + s_{22*}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$\widehat{P}_{23} = \widehat{P}_{32} = \left(s_{23*} - \frac{1}{s_{44}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Систему (6), а значить і систему (3), прийнято називати канонічною системою.

Зображення змішаної системи рівнянь теорії пружності (1), (2) у формі операторної канонічної гамільтонової системи (3) вперше в науковій літературі було здійснено в роботі [7].

Якщо залежності σ_{1i}, u_i від координат x_2, x_3 відомі, що притаманно певним задачам теорії пружності, то система (3) переходить у канонічну гамільтонову систему звичайних диференціальних рівнянь за просторовою кординатою x_1.

Система рівнянь (1), (2) і відповідні граничні умови можна одержати [6, 9] з умови стаціонарності за напруженнями і переміщеннями функціонала Хеллінгера–Рейсснера

$$\Phi_{HR} = \iiint\limits_V \left[\frac{1}{2}\sigma_{ik}(u_{i,k} + u_{k,i}) + H_{\text{мех}}(\sigma_{mn}) - X_i u_i\right] dV -$$
$$- \iint\limits_{S_\sigma} p_i u_i dS - \iint\limits_{S_n} \sigma_{nx_i}(u_i - a_i)\, dS, \tag{8}$$

в якому X_i, p_i — відомі об'ємні і поверхневі (на S_σ) навантаження; a_i — відомі (на S_n) переміщення, механічна ентальпія (додаткова робота з протилежним знаком)

$$H_{\text{мех}} = -\frac{1}{2}(s_{11}\sigma_{11}^2 + s_{22}\sigma_{22}^2 + s_{33}\sigma_{33}^2 + s_{23}\sigma_{23}^2 + s_{31}\sigma_{31}^2 + s_{12}\sigma_{12}^2) -$$
$$- s_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{31}\sigma_{33}\sigma_{11}.$$

Якщо допустимі переміщення апріорі задовольняють граничні умови $u_i = a_i$ на S_n, то останній доданок в (8) треба опустити.

З функціонала Φ_{HR} одержимо функціонал $\Phi_{HR}^{\text{ЗМ}}$, якому будуть відповідати змішані рівняння (3), якщо, користуючись формулами (5), в (8) виключимо напруження σ_{22}, σ_{33}, σ_{23}

$$\Phi_{HR}^{\text{ЗМ}} = \iiint\limits_V \Bigg[\sigma_{11}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - a_{21}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - a_{31}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \sigma_{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \sigma_{13}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}s_{33*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 - s_{23*}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}s_{22*}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{1}{2s_{44}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{2}(a_{11}\sigma_{11}^2 + s_{55}\sigma_{13}^2 + s_{66}\sigma_{12}^2 - X_i u_i)\Bigg] dV - \iint\limits_{S_\sigma} p_i u_i dS - \iint\limits_{S_n} \sigma_{nx_i}(u_i - a_i)\, dS. \quad (9)$$

Умовами стаціонарності функціонала $\Phi_{HR}^{\text{ЗМ}}$ будуть шість рівнянь Ейлера, які повністю збігаються з рівняннями змішаного типу (3), і відповідні граничні умови.

У роботі [5] зроблена спроба одержати змішану систему рівнянь в нормальній операторній формі Коші типу (3) на основі стаціонарності функціонала Ху–Вашідзу. Очевидно, що одержати таким шляхом шість рівнянь типу (3) неможливо (система (32) [5] складається з дев'яти рівнянь). Слід також зауважити, що в [5] використовується неадекватна загальноприйнятій термінологія.

1. *Механика* композитов. В 12-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 2. Динамика и устойчивость материалов / Под ред. Н. А. Шульги. – Киев: Наук. думка, 1993. – 430 с.
2. *Механика* композитов. В 12-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 6. Технологические напряжения и деформации в материалах / Под ред. Н. А. Шульги, В. Т. Томашевского. – Киев: ПТОО "А. С. К. ", 1997. – 394 с.
3. *Механика* композитов. В 12-ти т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 8. Статика элементов конструкций / Под ред. Я. М. Григоренко. – Киев: ПТОО "А. С. К. ", 1999. – 379 с.
4. *Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А.* Теория и расчет слоистых ортотропных оболочек и пластин. – Киев: Выща шк., 1986. – 191 с.
5. *Семенюк М. П., Трач В. М., Жукова Н. Б.* Модифікація принципу Ху-Васидзу стосовно одного методу розв'язання задач теорії пружності // Доп. НАН України. – 2006. – № 12. – С. 52–59.
6. *Тонти Э.* Вариационные принципы в теории упругости // Механика. Периодич. сб. перевед. иностр. статей. – 1969. – **5**, № 117. – С. 124–138.
7. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
8. *Шульга Н. А.* Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 7. – С. 15–56.
9. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезокерамических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 12.02.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shul'ga**

About the variation development of one mixed system of equations of elasticity theory

A mixed system of six equations of elasticity theory is presented in the operator Hamilton (canonical) form for one of the spatial coordinates. It is shown that this system represents the Euler equations of the Hellinger–Reissner variation principle with a correspondingly modified integrand.