УДК 519.21

І. В. Малик, В. К. Ясинський

Асимптотична поведінка в середньому квадратичному розв'язків систем стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Одержано умови стійкості в середньому квадратичному систем лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу.

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, P, \Im)$, де $\Im = \{F_t, t \geqslant 0\}$ — фільтрація, задано випадковий процес $x(t) = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$, стохастичний диференціал якого задовольняє систему лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (НСДФС) [1]

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}dt + \{Gx_t\}dw(t) + \int\limits_Z P(z)x_t\widetilde{v}(dz, dt) \tag{1}$$

за початковою умовою

$$x_0 = \varphi, \tag{2}$$

де $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leqslant s \leqslant 0\} \in S_{[-h,0]}$ — простір Скорохода [2] неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі; $\varphi \in S_{[-h,0]}$ — F_0-вимірний випадковий процес; $w(t) = w(t, \omega)$ — одновимірний випадковий вінерів процес, що узгоджений з $\Im = \{F_t, t \geqslant 0\}$; $\widetilde{v}(dz, dt) \equiv v(dz, dt) - \Pi(dz)\,dt$ — центрована пуассонова міра, яка узгоджена з $\Im$ і незалежна від $w(t)$. D, L, G — функціонали [3], що задані для $\psi \in S_{[-h,0]}$ співвідношеннями

$$\begin{aligned} D\psi &\equiv \int\limits_{-h}^{0}[dr_1(t)]\psi(t), \qquad L\psi \equiv \int\limits_{-h}^{0}[dr_2(t)]\psi(t), \\ G\psi &\equiv \int\limits_{-h}^{0}[dr_3(t)]\psi(t), \qquad P(z)\psi = \int\limits_{-h}^{0}[dr_4(z,t)]\psi(t), \end{aligned} \tag{3}$$

де $r_i(t)$, $i = 1, \ldots, 4,$ — матричні функції з простору $\mathbb{R}^{n*n}$, елементи яких належать $S_{[-h,0]}$ та мають обмежену варіацію на відрізку $[-h, 0]$.

Для лінійного НСДФС (1), (2) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in \mathbb{R}^n$, для якого існує скінченний другий момент $E|x(t)|^2 < \infty$ за умови, що другий момент початкової функції обмежений $E\|\varphi\|^2 < \infty$.

Поряд із системою (1) розглянемо відповідну детерміновану систему

$$dDx_t = Lx_t dt. \tag{4}$$

Якщо позначити через

$$V(z) = z\int\limits_{-h}^{0} dr_1(s)e^{zs} - \int\limits_{-h}^{0} dr_2(s)e^{zs} \tag{5}$$

характеристичну матрицю системи (4), то $\det(V(z))$ є характеристичним квазіполіномом [4].

Надалі діють такі припущення:

1) усі корені $z \in \mathbf{C}$ рівняння

$$\det\left(z\int\limits_{-h}^{0} dr_1(s)e^{zs}\right) = 0 \tag{6}$$

мають від'ємні дійсні частини;

2) усі корені $z \in \mathbf{C}$ характеристичного рівняння

$$\det V(z) = 0 \tag{7}$$

мають від'ємні дійсні частини.

Відомо [3], що при виконанні припущень 1, 2 рівняння (4), (2) має асимптотично стійкий тривіальний розв'язок $y(t) \equiv 0$. Через $X(t)$ позначимо матрицю Коші, тобто матричний розв'язок рівняння (4) за початковою умовою

$$X(t) \equiv \mathbf{1}(t) = \begin{cases} \mathbf{0}^n, & -h \leqslant t < 0, \\ \mathbf{1}^n, & t = 0, \end{cases}$$

де $\mathbf{1}^n$, $\mathbf{0}^n$ — відповідно одинична та нульова матриця в просторі $\mathbb{R}^{n*n}$.

Лема 1 [1]**.** *Сильний розв'язок НСДФС* (1), (2) *можна подати у вигляді*

$$x(t) = y(t) + \int\limits_{0}^{t} X(t-s)\int\limits_{-h}^{0} dr_3(s_1)x(s+s_1)\,dw(s) +$$

$$+ \int\limits_{Z}\int\limits_{0}^{t} X(t-s)\int\limits_{-h}^{0} dr_4(z,s_1)x(s+s_1)\widetilde{v}(dz,dt), \tag{8}$$

де $y(t)$ — *розв'язок задачі* (4), (2).

Теорема 1. *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega, F, P, \Im)$ *задано НСДФС* (1) *за початковою умовою* (2) *та виконуються припущення 1, 2. Тоді тривіальний розв'язок задачі Коші* (1), (2) *асимптотично стійкий у середньому квадратичному тоді і лише тоді, коли всі власні значення матриці*

$$D = \int\limits_{0}^{\infty} X_1(t) \otimes X_1^T(t)\,dt + \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{Z} X_2(z_1,t) \otimes X_2^T(z_1,t)\Pi(dz_1)\,dt \tag{9}$$

менші 1 *за модулем, де* X_i *задані рівностями*

$$X_1(t) \equiv GX_t; \qquad X_2(z,t) \equiv P(z)x_t.$$

Доведення. Розглянемо матрицю $S(t) = x(t)x^T(t)$ [5] розмірності $n \times n$, яку розглядатимемо на асимптотичну стійкість у середньому квадратичному [6] поелементно. Зрозуміло, що з асимптотичної стійкості в $l.i.m.$ матриці $S(t)$ випливає асимптотична стійкість тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2). А також з нестійкості в $l.i.m.$ матриці $S(t)$ випливає нестійкість $x(t) \equiv 0$ задачі Коші (1), (2).

Обчислимо $Q(t) \equiv E\{S(t)\}$:

$$E(x(t)x^T(t)) = E(y(t)y^T(t)) + \int\limits_0^t X(t-s)E\left\{\int\limits_{-h}^0 dr_3(s_1)x(s+s_1)\int\limits_{-h}^0 x^T(s+s_2)(dr_3(s_2))^T + \right.$$

$$\left. + \int\limits_Z \int\limits_{-h}^0 dr_4(z,s_1)x(s+s_1)\int\limits_{-h}^0 x^T(s+s_1)(dr_3(z,s_1))^T\Pi(dz)\right\}X^T(t-s)\,ds. \tag{10}$$

Введемо до розгляду деякий лінійний функціонал R [3] і обчислимо

$$E\{Rx_t(Rx_t)^T\}, \tag{11}$$

де як R узято по черзі функціонали G та $P(z)$:

$$E(Gx_t(Gx_t)^T) = E(Gy_t(Gy_t)^T) +$$

$$+ \int\limits_0^t GX_{t-s}E\left\{Gx_s(Gx_s)^T + \int\limits_Z P(z)x_s(P(z)x_s)^T\Pi(dz)\right\}(GX_{t-s})^T ds,$$

$$E(P(z)x_t(P(z)x_t)^T) = E(P(z)y_t(P(z)y_t)^T) +$$

$$+ \int\limits_0^t P(z)X_{t-s}E\left\{Gx_s(Gx_s)^T + \int\limits_Z P(z)x_s(P(z)x_s)^T\Pi(dz)\right\}(P(z)X_{t-s})^T ds.$$

Додавши дві останні рівності, отримаємо

$$E(Gx_t(Gx_t)^T) + \int\limits_Z E(P(z_1)x_t(P(z_1)x_t)^T)\Pi(dz_1) =$$

$$= E(Gy_t(Ry_t)^T) + \int\limits_Z E(P(z_1)y_t(P(z_1)y_t)^T)\Pi(dz_1) +$$

$$+ \int\limits_0^t GX_{t-s}E\left\{Gx_s(Gx_s)^T + \int\limits_Z P(z)x_s(P(z)x_s)^T\Pi(dz)\right\}(GX_{t-s})^T ds +$$

$$+ \int\limits_Z\int\limits_0^t P(z_1)X_{t-s}E\left\{Gx_s(Gx_s)^T + \int\limits_Z P(z)x_s(P(z)x_s)^T\Pi(dz)\right\}(P(z_1)X_{t-s})^T\Pi(dz_1)ds.$$

Введемо такі позначення:

$$u_1(t) \equiv Gx_t; \qquad u_2(z,t) \equiv P(z)x_t; \qquad y^{(1)}(t) \equiv Gy_t; \qquad y^{(2)}(z,t) \equiv P(z)y_t;$$

$$u(t) \equiv u_1(t)u_1^T(t) + \int\limits_Z u_2(z_1,t)u_1^T(z_1,t)\Pi(dz_1); \qquad G(z) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-zt}u(t)\,dt;$$
$$Y(z) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-zt}\left(y^{(1)}(t)(y^{(1)}(t))^T + \int\limits_Z y^{(2)}(z_1,t)(y^{(2)}(z_1,t))^T\Pi(dz_1)\right)dt. \tag{12}$$

Враховуючи позначення (12), легко отримати рівність

$$Eu(t) = E\left\{y^{(1)}(t)(y^{(1)}(t))^T + \int\limits_Z y^{(2)}(z_1,t)(y^{(2)}(z_1,t))^T\Pi(dz_1)\right\} +$$
$$+ \int\limits_0^t X_1(t-s)Eu(s)(X_1(t-s))^T ds +$$
$$+ \int\limits_Z \int\limits_0^t X_2(z_1,t-s)Eu(s)(X_2(z_1,t-s))^T\Pi(dz_1)\,ds. \tag{13}$$

Застосуємо перетворення Лапласа [7] до лівої та правої частин матричного рівняння відновлення (13), одержимо рівняння для зображень

$$G(z) = Y(z) + \int\limits_0^\infty e^{-zt}X_1(t)G(z)X_1^T(t)\,dt + \int\limits_0^\infty e^{-zt}\int\limits_Z X_2(z_1,t)G(z)X_2^T(z_1,t)\Pi(dz_1)\,dt. \tag{14}$$

Очевидно, що зображення $G(z)$, як функція дійсної змінної, є спадною і невід'ємною [7].

Зауважимо, що з асимптотичної стійкості в $l.i.m.$ елементів матриці $Rx_t(Rx_t)^T$ випливає асимптотична стійкість в $l.i.m.$ елементів матриці $Q(t)$, а отже, і асимптотична стійкість в $l.i.m.$ розв'язку задачі Коші для НСДФС (1), (2). Очевидно, що має місце і протилежне твердження відносно нестійкості даних рівнянь.

Рівняння (14) при $G = G(0)$ набуде вигляду

$$G = Y(0) + \int\limits_0^\infty X_1(t)GX_1^T(t)\,dt + \int\limits_0^\infty e^{-zt}\int\limits_Z X_2(z_1,t)GX_2^T(z_1,t)\Pi(dz_1)\,dt. \tag{15}$$

Зауважимо, що розв'язки $y(t)$, $X_1(t)$ та $X_2(t)$ є експоненціально обмеженими [1] внаслідок виконання припущень 1, 2 щодо від'ємності дійсних частин коренів характеристичних рівнянь (6), (7).

Для подальших міркувань щодо досліджень асимптотичної стійкості в $l.i.m.$ розв'язків НСДФС (1), (2) обчислимо спочатку добуток матриць $X = (X_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $G = (G_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, тобто

$$XGX^T = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n X_{i,k}X_{j,l}G_{k,l}\right). \tag{16}$$

Для спрощення викладок скористаємось поняттям тензорного добутку матриць [5]:

$$X \otimes X^T = \begin{pmatrix} X_{11}X^T & X_{12}X^T & X_{13}X^T & \dots & X_{1n}X^T \\ X_{21}X^T & X_{22}X^T & X_{23}X^T & \dots & X_{2n}X^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1}X^T & X_{n2}X^T & X_{n3}X^T & \dots & X_{1n}X^T \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Отже, матричне рівняння (15), враховуючи (17), набуде вигляду

$$\widetilde{G} = \widetilde{M} + \left(\int\limits_0^\infty X_1(t) \otimes X_1^T(t)\, dt + \int\limits_0^\infty \int\limits_Z X_2(z_1,t) \otimes X_2^T(z_1,t) \Pi(dz_1)\, dt \right) \widetilde{G}, \tag{18}$$

де для матриці $A = A_{n,n}$ визначена матриця прямого добутку

$$\widetilde{A} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_n, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})^T.$$

Тоді (18) перепишемо таким чином:

$$\left(I_{n^2} - \int\limits_0^\infty X_1(t) \otimes X_1^T(t)\, dt - \int\limits_0^\infty \int\limits_Z X_2(z_1,t) \otimes X_2^T(z_1,t) \Pi(dz_1)\, dt \right) \widetilde{G} = \widetilde{M}. \tag{19}$$

Оскільки $\widetilde{G}$ є деяке перетворене ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n*n}$) перетворення Лапласа від $E\{x(t)x^T(t)\}$ і $\widetilde{M}$ — перетворення Лапласа для y, яке є скінченне для $\mathrm{Re}\, z > -\rho$ (можна стверджувати на основі припущень 1 та 2), то асимптотична поведінка $E\{x(t)x^T(t)\}$ еквівалентна $Ke^{z_0 t}$, де z_0 — полюс з максимальною дійсною частиною для $\widetilde{G}$ (або G). Тоді для асимптотичної стійкості $x(t)$, як сильного розв'язку НСДФС (1), (2), необхідно і достатньо, щоб $z_0 < 0$. А це означає [7], що перетворення Лапласа $\widetilde{G}$ (або G) не повинно мати полюсів при $z \geqslant 0$. Тобто матричне рівняння

$$\left(I_{n^2} - \int\limits_0^\infty X_1(t) \otimes X_1^T(t)\, dt - \int\limits_0^\infty \int\limits_Z X_2(z_1,t) \otimes X_2^T(z_1,t) \Pi(dz_1)\, dt \right) \widehat{G} = \widehat{M}$$

має розв'язок при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$. Таким чином, усі власні значення матриці

$$D = \int\limits_0^\infty X_1(t) \otimes X_1^T(t)\, dt + \int\limits_0^\infty \int\limits_Z X_2(z_1,t) \otimes X_2^T(z_1,t) \Pi(dz_1)\, dt$$

повинні бути менші 1 за модулем [7].

Необхідність і достатність асимптотичної стійкості в $l.i.m.$ тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ НСДФС (1), (2) гарантується еквівалентними перетвореннями теореми 1 і властивостями оригіналів $E\{x(t)x^T(t)\}$ для відповідних перетворень Лапласа. Теорему доведено.

1. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
2. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер – Москва: Наука, 1977. – 352 с.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 420 с.

4. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – Москва: Мир, 1967. – 545 с.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1996. – 655 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
7. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – Москва: Наука, 1971. – 288 с.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 20.03.2009

I. V. Malyk, V. K. Yasynski

Asymptotic behavior in mean square of the solution of stochastic functional differential equations of the neutral type

The conditions of the stability in mean square are obtained for stochastic functional differential equations of the neutral type.