

П.З.Луговой, В.Ф.Мейш, С.П.Орленко

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРЕХСЛОЙНЫХ
СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ДИСКРЕТНЫМ РЕБРИСТЫМ
ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ;
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e – mail: plugovyy@inmech.kiev.ua*

Abstract. The equations of oscillations of a three-layer spherical shell with a discrete ribbed filler under the unsteady loading are obtained. In analyzing the elements of the elastic structure, the models of the nonlinear theory of shells and Timoshenko rods are used in the quadratic approximation for each layer. The numerical method for solving the obtained equations is based on the application of the integro-interpolation method for constructing the finite-difference schemes for equations with the discontinuous coefficients. The problem of the dynamic behavior of a three-layer spherical shell under unsteady loading is solved taking into account the discreteness of the ribbed filler.

Key words: three-layered spherical shell, discrete placeholder, the Timoshenko – type theory, forced vibrations, numerical solution.

Введение.

Впервые трехслойная конструкция была применена в 1845 г. английским инженером Г. Стефенсоном при строительстве железнодорожного моста. Широкое использование слоистых конструкций в строительстве современных сверхзвуковых / гиперзвуковых летательных аппаратов и многоразовых космических транспортных систем наблюдается в последние годы и активизируется в настоящее время. Сегодня трехслойные конструкции находят все более и более широкое применение в промышленности и в народном хозяйстве. Эффективная несущая способность трехслойных оболочечных конструкций делает их очень полезными в различных инженерных приложениях. Непрерывная разработка новых конструкционных материалов приводит ко все более сложным структурным конструкциям, требующих тщательного анализа. Хотя аналитические методы очень важны, использование численных методов для решения математических моделей оболочек сложных структур стало важным компонентом процесса проектирования. В литературе имеется достаточное количество работ по исследованию различными методами динамики слоистых оболочек с подкреплениями и техническими особенностями [1 – 5, 7, 14, 15 – 22]. Однако, в последнее время, создание прогрессивных технологий, объектов специального назначения и т.д. часто приводит к необходимости разработки конструктивных трехслойных оболочечных элементов с заполнителем усложненной геометрической структуры. Вопросы динамического поведения таких оболочек изучены недостаточно.

При этом указанные элементы поддаются динамическим нагрузкам различного вида, в том числе нестационарным нагрузкам. Подобные вопросы динамики трехслойных оболочек рассмотрены в работах [1, 14 – 17]. Одной из первых работ по исследованию нестационарного поведения трехслойных оболочек с дискретным заполнителем была работа [4]. Дальнейшее развитие указанные исследования нашли свое продолжение в работах [1, 15, 19, 20]. В данной статье рассмотрены постановка и решения динамических задач поведения сферических оболочек с дискретным ребри-

стым заполнителем (с соответствующими граничными и начальными условиями). Также построены численные алгоритмы, решения соответствующих задач математической физики. Проведено численное моделирование динамического поведения трехслойного сферического купола с дискретно-симметричным заполнителем при внутреннем импульсном нагружении. При этом применены кинематические и статические гипотезы к каждому слою [13, 20], что дает возможность более адекватно описать динамическое поведение трехслойной оболочки.

§1. Постановка задачи и исходные соотношения.

Дискретно-неоднородная по толщине упругая структура сферического типа представляет собой систему, которая состоит из внутренней и внешней гладких сферических оболочек (внутренняя и внешняя обшивки) с соответствующими толщинами и радиусами срединных поверхностей. Оболочки жестко соединены между собой дискретными ребрами. Предполагается, что рассматриваемая трехслойная конструкция подвергается действию внешней нестационарной распределенной нормальной нагрузки $P_3(s, t)$, где s, t – пространственная и временная координаты.

Математической моделью процесса динамического деформирования трехслойной упругой структуры с дискретным заполнителем является гиперболическая система нелинейных дифференциальных уравнений типа Тимошенко. При выводе уравнений движения рассматриваемой структуры используется вариант геометрически нелинейной теории тонких оболочек в квадратичном приближении [6]. Деформированное состояние внутренней и внешней сплошных сферических оболочек определяется соответствующими составляющими обобщенных векторов перемещений $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ и $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$. Внутренний заполнитель моделируется системой дискретных ребер. При этом полагается, что деформированное состояние j -го ребра определяется обобщенным вектором перемещения центра тяжести его поперечного сечения $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{3j}, \varphi_{1j})^T$. Исходя из предположений жесткого соединения дискретных ребер со сферическими обшивками, записываются условия контакта центров тяжести ребер с обшивками

$$u_{1j} = u_1^i(s_j) \pm h_j^i \varphi_1^i(s_j); \quad (1.1)$$

$$u_{3j} = u_3^i(s_j); \quad \varphi_{1j} = \varphi_1^i(s_j); \quad i = 1, 2; \quad j = \overline{1, J},$$

где s_j – координата линии точек проекций центров тяжести поперечного сечения j -го ребра с соответственной срединной поверхностью; $h_j^i = 0,5h_i + H_j$, h_i ($i = 1, 2$) – толщины сферических внутренней и внешней оболочек; H_j – расстояние от оси j -го ребра до поверхностей гладких оболочек.

Для вывода уравнений колебаний трехслойной неоднородной по толщине структуры используется вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского, согласно которому

$$\int_0^{t_2} [\delta(\Pi - K) - \delta A] dt = 0, \quad (1.2)$$

где Π – потенциальная энергия упругой системы; K – кинетическая энергия; A – работа внешних сил.

Выражения для величин $\delta\Pi$ и δK записываются следующим образом:

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^2 \delta\Pi_{0i} + \sum_{j=1}^J \delta\Pi_j; \quad \delta K = \sum_{i=1}^2 \delta K_{0i} + \sum_{j=1}^J \delta K_j;$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{0i} &= \int_{s_i} (T_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta \varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta \kappa_{22}^i) ds_i; \quad \delta \Pi_j = T_{22j} \delta \varepsilon_{22j}; \\ \delta K_{0i} &= \rho_i h_i \int_{s_i} \left[\left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \right) \delta u_1^i + \left(\frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \right) \delta u_3^i + \frac{h_i^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_1^i \right] d s_i; \\ \delta K_j &= \rho_j F_j \left[\left(\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{1j} + \left(\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{3j} + \frac{I_{kpj}}{F_j} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \right)^2 \delta \varphi_{1j} \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $s_i = \alpha_1 R^i$, t – пространственная (для каждой обшивки) и временная координаты, соответственно; R^i ($i = 1, 2$) – радиусы срединных поверхностей внутренней и внешней оболочек; ρ_i, ρ_j – плотности обшивок и ребра; F_j, I_{kpj} – геометрические параметры j -го ребра.

В соотношениях (1.3) выражения для усилий – моментов вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{11}^i &= B_{11}^i (\varepsilon_{11}^i + \nu_2^i \varepsilon_{22}^i); \quad T_{22}^i = B_{11}^i (\varepsilon_{22}^i + \nu_1^i \varepsilon_{11}^i); \quad T_{13}^i = B_{13}^i \varepsilon_{13}^i; \\ M_{11}^i &= D_{11}^i (\kappa_{11}^i + \nu_2^i \kappa_{22}^i); \quad M_{22}^i = D_{22}^i (\kappa_{22}^i + \nu_1^i \kappa_{11}^i); \quad T_{22j} = B_{22j} \varepsilon_{22j}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial u_1^i}{\partial s_i} + \frac{1}{2} [\theta_1^i]^2 + \frac{u_3^i}{R^i}; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{u_1^i}{R^i} \operatorname{ctg} \alpha_1 + \frac{u_3^i}{R^i}; \quad \varepsilon_{13}^i = \varphi_1^i + \theta_1^i; \\ \theta_1^i &= \frac{\partial u_3^i}{\partial s_i} - \frac{u_1^i}{R^i}; \quad \kappa_{11}^i = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial s_i}; \quad \kappa_{22}^i = \frac{\varphi_1^i}{R_1} \operatorname{ctg} \alpha_1; \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}; \\ B_{11}^i &= \frac{E_1^i h_i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}; \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i h_i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}; \quad B_{13}^i = G_{13} K_i^2; \\ D_{11}^i &= \frac{E_1^i h_i^3}{12(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}; \quad D_{11}^i = \frac{E_2^i h_i^3}{12(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}; \quad B_{22j} = E_j F_j. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В соотношениях (1.4) величины $E_1^i, E_2^i, G_{13}^i, \nu_1^i, \nu_2^i, E_j$ – физико-механические характеристики материалов обшивок и соответствующих ребер; K_i^2 – коэффициент поперечного сдвига в теории оболочек типа Тимошенко.

С учетом условий контакта (1.1), вариационное уравнение (1.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 T_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{R^i} T_{22}^i + \frac{\bar{T}_{13}^i}{R^i} - \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \right] \delta u_1^i + \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i) - \frac{T_{11}^i}{R^i} - \frac{T_{22}^i}{R^i} + P_3^i - \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \right] \delta u_3^i + \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 M_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{R^i} M_{22}^i - \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \right] \delta \varphi_1^i \right\} d s_{ij} + \\ & \quad + \sum_{j=1}^J \left\{ \left(\sum_{i=1}^2 T_{11}^{i\pm} - \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{1j} + \left(\sum_{i=1}^2 \bar{T}_{13}^{i\pm} - \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{3j} + \right. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) - \rho_j I_{kpj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \right] \delta \varphi_{1j} \Big|_{\alpha_1 = \alpha_{1j}} = 0.$$

В уравнениях (1.6) величины $T_{11}^{i\pm}$, $\bar{T}_{13}^{i\pm} = T_{11}^{i\pm} + \theta_{11}^{i\pm}$, $M_{11}^{i\pm}$ ($i=1, 2$) соответствуют усилиям-моментам, которые действуют на j -й дискретный элемент на линии разрыва $\alpha_1 = \alpha_{1j}$.

Из уравнения (1.6), в силу произвольности вариаций $\delta u_1^i, \delta u_3^i, \delta \varphi_1^i, \delta u_{1j}, \delta u_{3j}, \delta \varphi_{1j}$, следуют уравнения движения трехслойной оболочки:

гладкой области между ребрами при $s_{ij} < s_i < s_{ij+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 T_{11}^i) - \frac{\text{ctg } \alpha_1}{R^i} T_{22}^i + \frac{\bar{T}_{13}^i}{R^i} &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i) - \frac{T_{11}^i}{R^i} - \frac{T_{22}^i}{R^i} + P_3 &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha_1 M_{11}^i) - \frac{\text{ctg } \alpha_1}{R^i} M_{22}^i - T_{13}^i &= \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.7)$$

на линии разрыва $\alpha_1 = \alpha_{1j}$

$$\sum_{i=1}^2 T_{11}^{i\pm} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad \sum_{i=1}^2 \bar{T}_{13}^{i\pm} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) = \rho_j I_{kpj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}. \quad (1.8)$$

Уравнения движения (1.7), (1.8) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

§2. Численный алгоритм решения задачи.

Численный алгоритм решения (1.7), (1.8) основан на конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений с применением явной конечно-разностной схемы типа «крест» [3, 7]. Решение ищется в гладкой области – уравнения (1.7) и склеивается на линиях разрывов – уравнения (1.8). При построении численного решения в гладкой области используется интегро-интерполяционный метод построения разностных уравнений [7]. При этом компоненты обобщенных векторов перемещений соотносят к целым точкам разностной сетки, а соответствующие величины деформаций и усилий к полущелым точкам. Разностные уравнения, которые аппроксимируют исходные уравнения (1.7), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} \left[(\sin \alpha_1 T_{11}^i)_{k-1/2}^n \right]_{s_i} - \frac{\text{ctg } \alpha_{1k}}{R^i} (T_{22}^i)_k^n + \frac{1}{R^i} (\bar{T}_{13}^i)_k^n &= \rho_i h_i \left[(u_1^i)_k^n \right]_{\bar{u}}; \\ \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} \left[(\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}^i)_{k-1/2}^n \right]_{s_i} - \frac{1}{R^i} \left[(T_{11}^i)_k^n + (T_{22}^i)_k^n \right] + P_{3k}^n &= \rho_i h_i \left[(u_3^i)_k^n \right]_{\bar{u}}; \\ \frac{1}{\sin \alpha_{1k}} \left[(\sin \alpha_1 M_{11}^i)_{k-1/2}^n \right]_{s_i} - \frac{\text{ctg } \alpha_{1k}}{R^i} (M_{22}^i)_k^n - (T_{13}^i)_k^n &= \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left[(\varphi_1^i)_k^n \right]_{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначения разностных производных введено согласно [7].

Разностные выражения для усилий-моментов и соответствующих величин деформаций имеют вид

$$(T_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n = B_{11}^i \left[(\varepsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_2^i (\varepsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n \right]; \quad (T_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n = B_{22}^i \left[(\varepsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_1^i (\varepsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n \right];$$

$$(T_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n = B_{13}^i (\varepsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n; \quad (M_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n = D_{11}^i \left[(\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_2^i (\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n \right]; \quad (2.2)$$

$$(M_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n = D_{22}^i \left[(\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n + \nu_1^i (\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n \right]; \quad (\bar{T}_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n = (T_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n + (T_{11}^i \theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n,$$

где

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n &= \left[(u_1^i)_k^n \right]_{s_i} + \frac{1}{2} (\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n + \frac{(u_3^i)_k^n + (u_3^i)_{k+1}^n}{2R^i}; \\ (\varepsilon_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n &= \frac{(u_1^i)_k^n + (u_1^i)_{k+1}^n}{2R^i} \operatorname{ctg} \alpha_{1k+1/2} + \frac{(u_3^i)_k^n + (u_3^i)_{k+1}^n}{2R^i}; \\ (\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n &= \left[(u_3^i)_k^n \right]_{s_i} - \frac{(u_1^i)_k^n + (u_1^i)_{k+1}^n}{2R^i}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(\varepsilon_{13}^i)_{k\pm 1/2}^n = \frac{(\varphi_1^i)_k^n + (\varphi_1^i)_{k+1}^n}{2} + (\theta_1^i)_{k\pm 1/2}^n;$$

$$(\kappa_{11}^i)_{k\pm 1/2}^n = \left[(\varphi_1^i)_k^n \right]_{s_i}; \quad (\kappa_{22}^i)_{k\pm 1/2}^n = \frac{(\varphi_1^i)_k^n + (\varphi_1^i)_{k+1}^n}{2R^i} \operatorname{ctg} \alpha_{1k+1/2}.$$

В соотношениях (2.1) – (2.3) нижние индексы $k, k \pm 1/2$ соответствуют обозначениям разностной сетки по пространственной координате s_i ($i = 1, 2$), а верхние индексы n определяют временной слой. Обозначения разностных производных по пространственной и временной координатам в соотношениях (2.1), (2.3) введены согласно [3]. Соотношения для величин деформаций с индексом $k - 1/2$ записываются аналогично формулам (2.3) с учетом сдвига на единицу.

Разностные соотношения на линиях разрывов $\alpha = \alpha_j$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (T_{11}^{i\pm})_j^n &= \rho_j F_j \left[(u_{1j})_j^n \right]_{\bar{ii}}; \quad \sum_{i=1}^2 (\bar{T}_{13}^{i\pm})_j^n = \rho_j F_j \left[(u_{3j})_j^n \right]_{\bar{ii}}; \\ \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm})_j^n &= \rho_j I_{\kappa pj} \left[(\varphi_{1j})_j^n \right]_{\bar{ii}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Учитывая, что применяется явная конечно-разностная схема, при расчетах разностные шаги выбраны исходя из условия $\Delta t \leq K \Delta s / c_{11}$, где $c_{11}^2 = E_1 / [\rho(1 - \nu_1 \nu_2)]$, K – число Куранта. При расчетах полагалось $K = 0,3 - 0,5$, исходя из практической сходимости результатов.

В уравнениях (2.4) в квадратных скобках в обозначения $[\dots]_j^n$ входят величины согласно уравнений (2.2), соответственно, к каждому слою.

Определение величины компонент на линиях разрыва для дискретных элементов, согласно формулам (2.4), выполняем пересчет на внутреннюю и внешнюю поверхность гладких обшивок

$$\begin{aligned} u_{1j}^n &= u_1^{kn}(s_j) \pm H_j^k \varphi_1^{kn}(s_j); \\ u_{3j}^n &= u_3^{kn}(s_j); \quad \varphi_1^n = \varphi_1^{kn}(s_j), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Исходя из выше полученных формул, численный алгоритм решения поставленной задачи заключается в последовательности выполнения следующих формул:

– на n -м временном слое в гладкой области по пространственной координате вычисляются величины соответствующих деформаций и усилий-моментов по формулам (2.4);

– по вычисленным величинам деформаций и усилий-моментов вычисляются величины компонент обобщенного вектора перемещений обшивок в гладкой области на $n+1$ временном слое;

– согласно формул (1.6) вычисляются величины компонент обобщенного вектора перемещений для j -го дискретного элемента на линиях разрыва;

– по формулам (1.7) выполняется пересчет величин обобщенного вектора перемещений центра тяжести поперечного среза j -го дискретного элемента заполнителя на соответствующие поверхности обшивок на линиях разрыва.

Полученная разностная схема, согласно формулам (2.1) – (2.4), явная по временной координате, и исходя из этого, является условно устойчивой по пространственной и временной координатам. В последующем, при численном решении задач осесимметричных колебаний, будем исходить из соответствующих формул для величин разностных шагов Δx и τ .

В матрично-векторном виде разностные уравнения (2.1) – (2.4) можно представить следующим образом:

$$[C]\bar{U} + [M]\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t),$$

где $[M]$ и $[C]$ – матрицы масс и жесткости дискретной разностной системы; $\bar{U}, \bar{F}(t)$ – векторы дискретных перемещений и внешней нагрузки.

Считая, что матрица $[M]$ невырожденная, запишем последнее уравнение в виде

$$[D]\bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1}\bar{F}(t),$$

где матрица $[D] = [M]^{-1}[C]$.

В работах [1, 7, 20] установлено, что при использовании явной конечно-разностной схемы для интегрирования уравнений необходимым условием устойчивости разностных уравнений является условие следующего вида:

$$\tau \leq 2 / \Omega_{\max} = 2\sqrt{\beta(D)},$$

где Ω_{\max} – максимальная частота собственных колебаний разностной системы; $\beta(D)$ – верхний предел спектра матрицы $[D]$.

Используя для оценки значения $\beta(D)$ сверху теорему Гершгорина, получаем

$$\beta = \Omega_{\max}^2 \leq \max \sum_j |d_{ij}|,$$

где d_{ij} – элементы матрицы $[D]$.

Согласно обозначениям в уравнениях (2.1) – (2.4) условие устойчивости разностных уравнений имеет вид

$$\tau \leq 2 / \Omega_{\max},$$

где Ω_{\max} определяется, исходя со следующих неравенств:

$$\Omega_{\max}^2 \leq \max(\Omega_{\max 0}^2, \Omega_{\max j}^2);$$

$$\Omega_{\max 0}^2 \leq \max([\Omega_1^k]^2, [\Omega_2^k]^2, [\Omega_3^k]^2), \quad k = 1, 2;$$

$$\Omega_{\max j}^2 \leq \max \Omega_{1j}^2, \quad j = \overline{1, J}.$$

Величины $[\Omega_1^k]^2, [\Omega_2^k]^2, [\Omega_3^k]^2, \Omega_{1j}^2$ определяются согласно соотношений

$$[\Omega_1^k]^2 = \frac{E_1^k}{\rho_k(1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)} \left[\frac{4}{(\Delta S_k)^2} + \nu_{21}^k \left(\frac{1}{R^k \Delta S_k} \right) \right];$$

$$[\Omega_2^k]^2 = \frac{E_1^k}{\rho_k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)} \left\{ \frac{G_{13}^k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{\Delta s_k h_k} + \frac{4}{(\Delta s_k)^2} \right] + \frac{E_2^k}{E_1^k} \left[\frac{1}{(R^k)^2} + \nu_{12}^k \frac{1}{R^k \Delta s_k} \right] \right\};$$

$$[\Omega_3^k]^2 = \frac{E_1^k}{\rho_k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)} \left\{ \frac{4}{(\Delta s_k)^2} + \frac{12G_{13}^k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{\Delta x s_k h_k} + \frac{1}{h_k^2} \right] \right\};$$

$$\rho_j F_j \Omega_{1j}^2 = \frac{E_j F_j}{R_j^2}.$$

§3. Численные результаты.

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойной полусферы с дискретным ребристым наполнителем (параллелями) при падении на ее вершину ударной волны проводилось численными методами. Для решения приведенных уравнений использовался интегро-интерполяционный метод построения конечно-разностных схем по пространственной координате α_1 и явная схема интегрирования по временной координате t - разностные уравнения [7].

Дискретно-неоднородная по толщине упругая структура сферического типа является собой систему, которая состоит из внутренней и внешней гладких сферических оболочек (внутренняя и внешняя обшивки) с соответствующими толщинами и радиусами срединных поверхностей. Оболочки жестко соединены между собой системой ребер (параллелей). В работе [20] рассмотрена полусфера с отверстием со свободными кромками в ее вершине. В данном случае задача решалась на пространственном интервале $[-\pi/2; \pi/2]$. В силу симметрии относительно вершины сферы при $\alpha_1 = 0$ рассматривался интервал $[0; \pi/2]$. Расчет проводился при количестве дискретных интервалов $N = 160$, т.е. $\Delta\alpha_1 = (\pi/2)/N$.

Дискретные подкрепляющие ребра (параллели) находились в точках

$$\alpha_k = [41 + 40(k-1)]\Delta\alpha_1, \quad k = \overline{1, 3}.$$

В вершине сферы имеется особенность, необходимость раскрытия которой позволила записать граничные условия при $\alpha_1 = 0$ в следующем виде:

$$u_1^k = \varphi_1^k = 0; \quad 2 \frac{\partial T_{13}^k}{\partial s} - P_3(s_0, t) \delta_{2k} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}; \quad (3.1)$$

при $\alpha_1 = \pi/2$ - жесткое защемление:

$$u_1^k = u_3^k = \varphi_1^k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (3.2)$$

В формулах (3.1) δ_{2k} - символ Кронекера.

Внешняя нагрузка $P_3(s, t)$ задавалась в виде [19]

$$P_3(s, t) = \begin{cases} A(1-t/T) + P_0, & 0 \leq t \leq T; \\ P_0, & t > T, \end{cases}$$

где $A = 10^6$ Па; $P_0 = 10^5$ Па; $T = R_1/c$; $c^2 = E_1/[\rho(1-\nu_1^2)]$.

Расчеты проводились при следующих геометрических и физико-механических параметрах: $E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0,3$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $h_1 = h_2$; $h_j = 2h_2$; $R_1 = 0,3$ м; $R_1/h_1 = 60$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м².

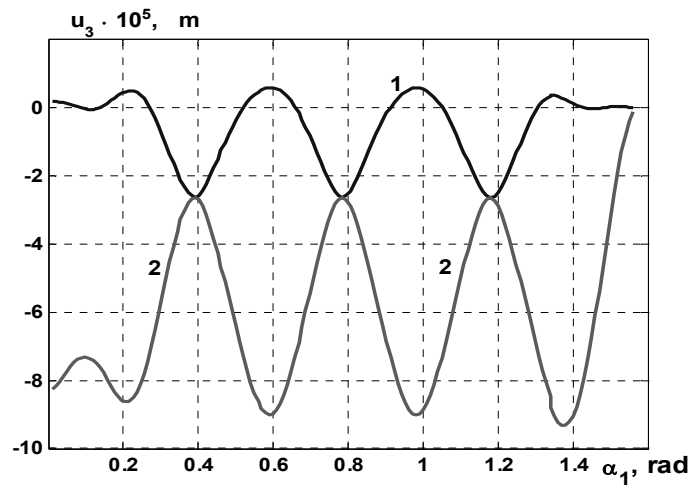


Fig. 1

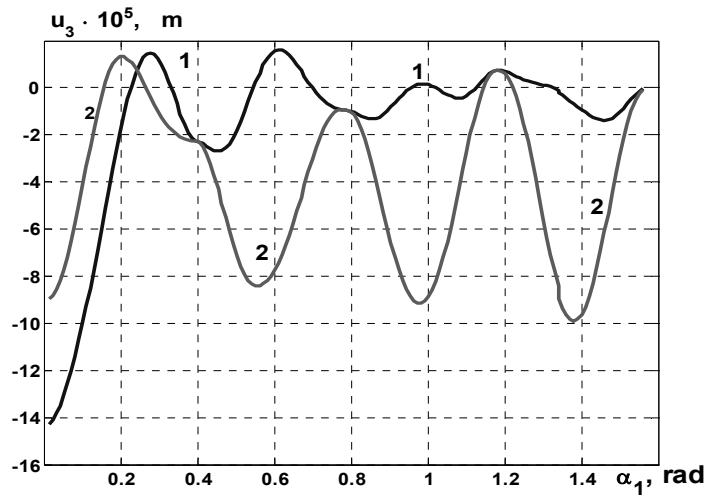


Fig. 2

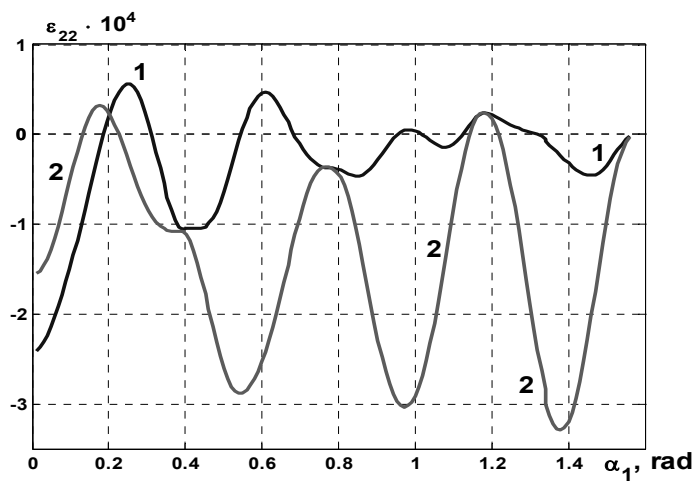
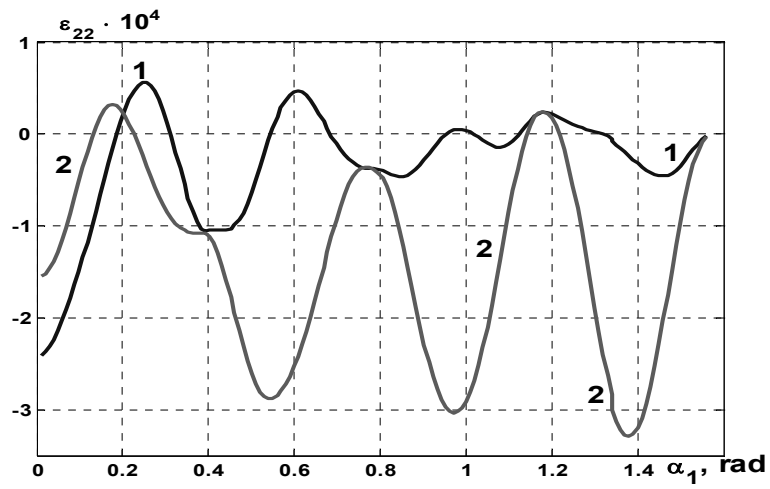
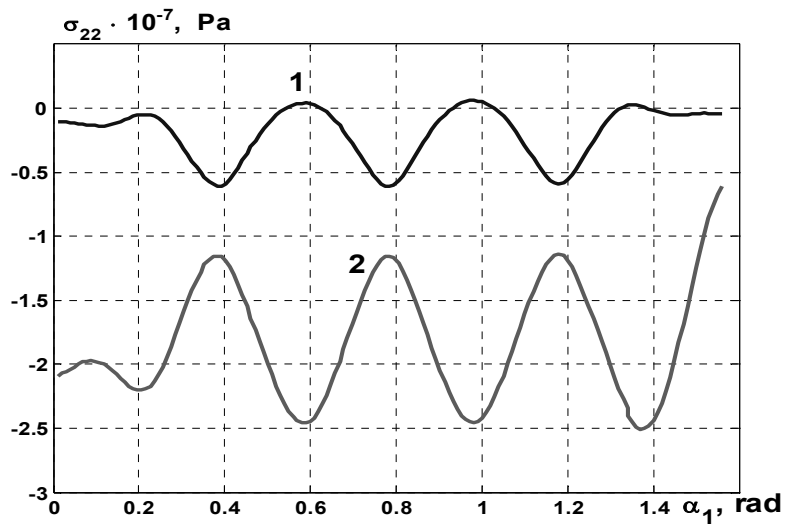


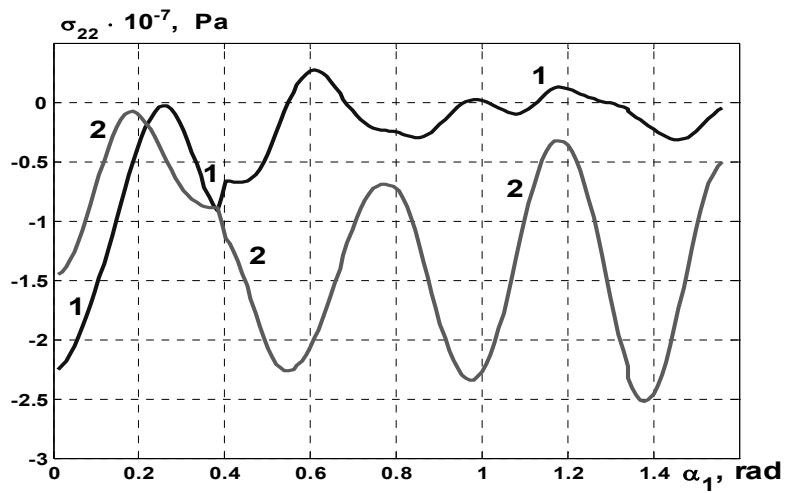
Fig. 3



Puc. 4



Puc. 5



Puc. 6

На рис. 1 – 6 в приведенном масштабе показаны результаты расчетов. Кривые на рис. 1, 2 соответствуют зависимостям величин u_3 от пространственной координаты α_1 в моменты времени $t = T$ (рис. 1) и $t = 9T$ (рис. 2). Индексом 1 обозначены величины u_3 внутренней оболочки, индексом 2 – внешней оболочки. На рис. 3, 4 представлены зависимости величин ε_{22} от пространственной координаты для времен $t = T$, $t = 9T$. На рис. 5, 6 представлены аналогичные зависимости для величин σ_{22} . Обозначения кривых на рис. 3 – 6 такие же, как и на рис. 1, 2.

Полученные численные результаты позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния трехслойной упругой структуры сферического вида в произвольный момент времени (расчеты проводились на временном интервале $0 \leq t \leq 40T$) согласно приведенной постановке задачи. Исходя из представленного графического материала, можно визуальным образом определить места расположения ребер. Для величин u_3 и ε_{22} это точки соприкосновения кривых 1, 2. Максимальные по модулю значения величин u_3 наблюдаются в полюсе оболочек при $\alpha_1 = 0$ (граничные условия (3.1)). Для величин ε_{22} , σ_{22} максимальные по модулю значения наблюдаются ближе к точке $\alpha_1 = \pi / 2$ (граничные условия (3.2)).

Заключение.

В работе, исходя из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, получены уравнения колебаний трехслойных сферических оболочек с дискретным заполнителем. При рассмотрении элементов упругой структуры используются модели оболочек и стержней, согласно гипотез Тимошенко. Для решения полученных уравнений развит эффективный численный метод, который основан на применении интегро-интерполяционных соотношений по пространственным координатам и явной конечно-разностной схеме по временной координате. Получено решение задачи о динамическом поведении трехслойной сферической оболочки с дискретным заполнителем при действии импульсного нагружения. Приведен анализ полученных результатов.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК).

РЕЗЮМЕ. Отримано рівняння коливань тришарових сферичних оболонок із дискретним заповнювачем при нестационарному навантаженні. При розгляді елементів пружної структури використано моделі теорії оболонок і стержнів згідно з теорією Тимошенка. Чисельний метод розв'язування динамічних рівнянь базується на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінченно-різницевої схем для рівнянь з розривними коефіцієнтами. Отримано розв'язок задачі про динамічну поведінку тришарової сферичної оболонки з врахуванням дискретності ребристого заповнювача при нестационарному навантаженні. Числові результати наведено у вигляді графіків та проведений їх аналіз.

1. Головка К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – Киев: Изд.-полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
2. Луговой П.З., Михайлова М.И., Мейш В.Ф., и др. Взаимодействие ударных волн с объектами сложной геометрии // Пробл. прочности. – 2003. – № 6. – С. 56 – 66.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – Москва: Наука, 1977. – 536 с.
4. Мейш В.Ф., Стрюк В.К., Кот Л.В. Нестационарна поведінка тришарових дискретно підкріплених оболонок обертання при повздовжньому імпульсному навантаженні // Вісн. Київського ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія «Фіз.-матем. науки». – 1999. – 3. – С. 171 – 175.
5. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.3. Прикладные исследования / Под общ. ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1983. – 264 с.

6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Ленинград – Москва.: Гостехиздат, 1948. – 212с.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1977. – 656с.
8. Цыпкин В.И., Иванов А.Г., Минеев В.И., Шитов А.Н. Влияние масштаба, геометрии и заполняющей среды на прочность стальных сосудов при внутреннем импульсном нагружении // Атомная энергия. – 1976. – **41**, № 5. – С. 303 – 308.
9. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций / Под ред. А.Н.Гузя и В.А. Заруцкого. – Киев: Наук. думка, 1984. – 240 с.
10. Anik'ev I.I., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A. Dynamic loading of Cylindrical and Spherical Bodies Interacting with a Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 12 – P. 1405 – 1410.
11. Carrera E. On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells // Computers and Structures. – 2004. – **82**, N 7 – 8, – P. 541–554.
12. Li R., Kardomateas A., Simitzes G.J. Nonlinear Response of a Shallow Sandwich Shell with Compressible Core to Blast Loading // J. of Appl. Mech. – 2008. – **75**, N 6: 061023 (10 pages).
13. Librescu L., Oh S.Yo., Hohe J. Dynamic response of anisotropic sandwich flat panels to underwater and in-air explosions // Int. J. of Solids and Struct. – 2006. – **43**. – P. 3794 – 3816.
14. Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems under Nonstationary Loading (survey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 481 – 537.
15. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P. Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2020, **56**, N 1. – P. 22 – 32.
16. Lugovoi P.Z., Shugailo A.P., Kruglyiy Ya. D., Kolutpaev A.V. Effect of Sludge on the Stress-Strain State of Heat-Exchange Tubes of a Steam Generator // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 1. – P. 86 – 94.
17. Lugovoi P.Z., Skosarenko Yu.V., Orlenko S.P., Shugailo A.P. Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 5. – P. 524 – 533.
18. Maturi D.A., Ferreira A.J.M., Zenkour A.M., Mashat D.S. Analysis of Laminated Shells by Murakami's Zig-Zag Theory and Radial Basis Functions Collocation // J. of Appl. Mathematics. – 2013. – Article ID 123465 – 14 p.
19. Meish V.F., Meish Ya.A., Arnaut N.V. Numerical Analysis of Nonstationary Vibrations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Different Geometry // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 426 – 433.
20. Meish V.F., Shtantsel' S.É. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 12. – P. 1501 – 1507.
21. Qatu M.S. Vibration of Laminated Shells and Plates. – New York: Academic Press, 2004. – 426 p.
22. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000 – 2010 // Open J. of Composite Materials. – 2012. – **2**, N 3. – 16 p.

Поступила 29.05.2019

Утверждена в печать 09.07.2020