

И. Ю. Хома¹, О. А. Стрыгина²

**О КРУЧЕНИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ
С НЕКРУГОВЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ**

¹ *Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: reolog@ukr.net*

² *Белоцерковский национальный аграрный университет,
пл. Соборная, 8/1, 09117 г. Белая Церковь, Киевская обл., Украина;
e-mail: oksana9269@ukr.net*

Abstract. A solution of the problem the stress state of a transversely isotropic plate with a non-circular cylindrical hole under a given torque at infinity is found. The solution is based on the method of expanding the functions into the Fourier series in the Legendre polynomials and the method of perturbing the shape of the boundary. An analysis of the stress distribution around the hole with elliptical and triangular contours in plane is carried out.

Key words: infinite transversely isotropic plate, torsion of the plate, stress state, noncircular hole (hole with an elliptical, triangular contour in plan).

Введение.

Исследованию концентрации напряжений около отверстий и полостей в упругих телах посвящено много публикаций [6 – 9, 13, 16 – 19]. Используются разные способы при решении краевых задач для пластин, ослабленных некруговыми (криволинейными) полостями и отверстиями. На основе однородных решений в [7, 12] предложен способ сведения граничных задач к разрешающей системе сингулярных интегральных уравнений. В работе [14] проведен анализ напряженного состояния эллиптической цилиндрической оболочки переменной толщины в зависимости от геометрических параметров. Влияние ортотропии материала на напряженное состояние четырехугольной пластины разной формы исследовано в [15]. В [20, 21] конечноэлементная дискретизация области применяется к исследованию концентрации напряжений в плите с круговым и эллиптическим отверстием. Для определения напряженного состояния трансверсально-изотропной пластины в [3, 17] используется метод разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра [1, 11] совместно с методом возмущения формы границы [2, 5]. Изложенным способом в [17] проведен анализ распределения напряжений около некругового отверстия (с квадратным и треугольным контуром на срединной плоскости) при заданной на граничной поверхности расщепляющей силы, т.е. пары сил, стремящихся растянуть или сжать пластину по толщине.

В данной работе изложено решение задачи определения напряженного состояния неограниченной трансверсально-изотропной пластины с некруговым цилиндрическим отверстием при заданном крутящем моменте на бесконечности.

§1. Постановка задачи и основные уравнения.

Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину постоянной толщины $2h$, срединная плоскость S которой совпадает с плоскостью изотропии. Введем декартову систему координат Ox_1, x_2, x_3 и будем считать, что координаты x_1, x_2 расположе-

ны на плоскости S , а $x_3 \in [-h, h]$. Пластина ослаблена некруговым цилиндрическим отверстием $L \times [-h, h]$, кривая L которой незначительно отличается от окружности радиуса R . Поверхность отверстия свободна от внешних усилий, а на бесконечности пластина находится под действием постоянных крутящих моментов $\sigma_{12}^{(1)\infty} = \sigma_{21}^{(1)\infty} = H (H = \text{const})$.

Для решения задачи воспользуемся методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра и методом возмущения формы границы. Представим, следуя [1, 11, 14] компоненты вектора перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x) h^{-1}, \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi),$$

где $x = (x_1, x_2) \in S$; $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$; $u_j^{(k)}(x)$; $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые ниже моментами; N – натуральное число, которое будем считать нечетным, $N = 2n + 1$ ($n = 0, 1, \dots < \infty$).

Относительно моментов напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$, как функций двух независимых переменных, имеем [1, 14] систему уравнений

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k + 1) h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)} + F_j^{(k)} = 0; \quad (1.1)$$

$$(j = 1, 2, 3; k = 0, 1, \dots, N),$$

в которой $\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$), $K = (k - 1) / 2$. Символ $[K]$ обозначает целую часть числа K ; $F_j^{(k)}$ – свободные члены

$$F_j^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \left[\sigma_{3j}^+ - (-1)^k \sigma_{3j}^- \right];$$

σ_{3j}^+ и σ_{3j}^- – значения напряжений на плоских гранях $x_3 = h$ и $x_3 = -h$ соответственно: по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, причем латинские буквы принимают значение 1, 2, 3, а греческие – 1, 2.

Соотношения упругости, связывающие моменты напряжений и деформаций следуют из обобщенного закона Гука. Для анизотропного тела они имеют вид [17]

$$\sigma_{ij}^{(k)} = h c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}, \quad (1.2)$$

где c_{ijlm} – упругие постоянные, удовлетворяющие [10] условиям симметрии: $c_{ijlm} = c_{jilm} = c_{lmij}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – моменты деформаций, выражающиеся через моменты вектора перемещений $u_j^{(k)}$ формулами

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)}; \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = (2k + 1) h^{-1} \sum_{l=0}^{[N_k]} u_j^{(k+2l+1)} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Здесь $N_k = (N - k - 1) / 2$.

Для трансверсально-изотропного тела приведенные уравнения распадаются на две группы уравнений, описывающие симметричное и кососимметричное (по отношению к плоскости S) деформирование пластины. При кососимметричном деформировании уравнения равновесия (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2k+1)} - (4k+3)h^{-1} \sum_{s=0}^k \sigma_{3\beta}^{(2s)} + F_\beta^{(2k+1)} &= 0 \quad (\beta = 1, 2); \\ \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^{(2k)} - (4k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{33}^{(2s+1)} + F_3^{(2k)} &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n),\end{aligned}\quad (1.3)$$

а соотношения упругости (1.2) записываются таким образом

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(2k+1)} &= h(c_{11}\varepsilon_{11}^{(2k+1)} + c_{12}\varepsilon_{22}^{(2k+1)} + c_{13}\varepsilon_{33}^{(2k+1)}); \quad \sigma_{12}^{(2k+1)} = c_{66}h(\varepsilon_{12}^{(2k+1)} + \varepsilon_{21}^{(2k+1)}); \\ \sigma_{13}^{(2k)} &= c_{44}h(\varepsilon_{13}^{(2k)} + \varepsilon_{31}^{(2k)}); \\ \sigma_{22}^{(2k+1)} &= h(c_{12}\varepsilon_{11}^{(2k+1)} + c_{11}\varepsilon_{22}^{(2k+1)} + c_{13}\varepsilon_{33}^{(2k+1)}); \\ \sigma_{33}^{(2k+1)} &= h(c_{13}\varepsilon_{11}^{(2k+1)} + c_{33}\varepsilon_{33}^{(2k+1)}); \quad \sigma_{23}^{(2k)} = c_{44}h(\varepsilon_{23}^{(2k)} + \varepsilon_{32}^{(2k)}),\end{aligned}\quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{3\alpha}^{(2k)} &= (4k+1)h^{-1} \sum_{s=k}^n u_\alpha^{(2s+1)} \quad (\alpha = 1, 2); \quad \varepsilon_{33}^{(2k+1)} = (4k+3)h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s)}; \\ e^{(2k+1)} &= \varepsilon_{11}^{(2k+1)} + \varepsilon_{22}^{(2k+1)} = \partial_\alpha u_\alpha^{(2k+1)},\end{aligned}\quad (1.5)$$

c_{ij} , c_{44} , c_{66} – упругие постоянные.

Подставляя (1.4) в равенства (1.3) и предполагая, что плоские грани $x_3 = \pm h$ свободны от внешних усилий ($\sigma_{3j}^+ = \sigma_{3j}^- = 0$), получим однородную систему уравнений вида

$$\begin{aligned}c_{66}\Delta u_\alpha^{(2k+1)} + (c_{12} + c_{66})\partial_\alpha e^{(2k+1)} + \\ + (4k+3)h^{-1} \sum_{s=0}^n (\lambda_{2s}^{(k)} \partial_\alpha u_3^{(2s)} - c_{44}h^{-1} \alpha_{2s+1}^{(k)} u_\alpha^{(2s+1)}) = 0;\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$(\alpha = 1, 2; \quad k = 0, 1, \dots, n),$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^n (\lambda_{2s+1}^{(k)} e^{(2s+1)} - c_{33}h^{-1} \beta_{2s}^{(k)} u_3^{(2s)}) = 0,\quad (1.7)$$

где Δ – оператор Лапласа;

$$\lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 0 \leq s \leq k; \\ c_{13}, & k < s \leq n; \end{cases} \quad \lambda_{2s+1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k; \\ c_{44}, & k \leq s \leq n; \end{cases}$$

$\alpha_{2s+1}^{(k)}$ и $\beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы

$$\beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 0 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \alpha_{2s+1}^{(k)} = \begin{cases} (s+1)(2s+1), & 0 \leq s \leq k; \\ (k+1)(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

§2. Общее аналитическое решение.

Изложим метод представления общего аналитического решения системы уравнений (1.6), (1.7). Из (1.7) при $k = 0$ определяем

$$\Delta u_3^{(0)} = -h^{-1} \sum_{s=0}^n e^{(2s+1)}.\quad (2.1)$$

Продифференцируем первое ($\alpha = 1$) уравнение (1.6) по x_1 , а второе ($\alpha = 2$) – по x_2 и найденные равенства сложим. Учитывая при этом (2.1), будем иметь

$$c_{11}\Delta e^{(1)} + 3c_{13}h^{-1} \sum_{s=1}^n \Delta u_3^{(2s)} = 0, \quad (k=0); \quad (2.2)$$

$$c_{11}\Delta e^{(2k+1)} + (4k+3)h^{-1} \sum_{s=1}^n (\lambda_{2s}^{(k)} \Delta u_3^{(2s)} - c_{44}h^{-1} \underline{\alpha}_{2s+1}^{(k)} e^{(2s+1)}) = 0, \quad (2.3)$$

$$(k=1, 2, \dots, n).$$

Из (2.2) находим

$$e^{(1)} = -\frac{3c_{13}}{c_{11}h} \sum_{s=1}^n u_3^{(2s)} - \frac{4c}{c_{66}} u, \quad (2.4)$$

где u – произвольная гармоническая функция: $c = 1 - c_{13}^2 / c_{11}c_{33}$.

Согласно (2.4) уравнение (1.7) принимает вид

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \sum_{s=1}^n \left[\lambda_{2s+1}^{(k)} e^{(2s+1)} - c_{33}(\beta_{2s}^{(k)} + 3c)h^{-1} u_3^{(2s)} \right] = -\frac{4(4k+1)cc_{13}}{c_{66}} u, \quad (2.5)$$

$$(k=1, 2, \dots, n).$$

Здесь

$$\underline{\beta}_{2s}^{(k)} = \begin{cases} (s-1)(2s+3), & 1 \leq s \leq k; \\ (k-1)(2k+3), & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \underline{\alpha}_{2s+1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+3), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k+3), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

Равенства (2.3), (2.5) образуют систему уравнений $4n$ -го порядка для определения моментов компонент вектора перемещений $u_3^{(2k)}$ и деформаций $e^{(2k+1)}$. Полагая

$$c_{66}he^{(2k+1)} = v_{2k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n); \quad (2.6)$$

$$c_{66}u_3^{(2)} = v_2^* h^2 u + v_2; \quad c_{66}u_3^{(2k)} = v_{2k} \quad (k=2, 3, \dots, n),$$

преобразуем ее к виду

$$\sum_{l=1}^{2n} (\alpha_{kl} - \beta_{kl} h^2 \Delta) v_l = 0 \quad (k=1, 2, \dots, 2n),$$

где $v_2^* = 4c_{13} / 3c_{33}$, α_{kl} и β_{kl} – безразмерные константы, явные выражения которых нетрудно выписать. Очевидно, первое слагаемое в равенствах (2.6) выражает частное решение неоднородной системы. Ниже будем считать его известным.

Возможна иная форма представления разрешающей системы. Предполагая частное решение найденным, определим из однородных равенств (2.5) моменты деформаций

$$c^* e^{(2k+1)} = h \left[\frac{1}{4k+5} \Delta u_3^{(2k+2)} - \frac{1}{4k+1} \Delta u_3^{(2k)} - \frac{(4k+3)c_{33}}{c_{44}h^2} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s)} \right] \quad (k=1, 2, \dots, n-1);$$

$$c^* e^{(2n+1)} = -h \left[\frac{c_{13}}{5c_{44}} \Delta u_3^{(2)} + \frac{1}{4n+1} \Delta u_3^{(2n)} - \frac{c_{33}}{c_{44}h^2} \sum_{s=1}^n (\beta_{2s}^{(k)} + 3cc^*) u_3^{(2s)} \right] \quad (2.7)$$

и внесем их значения в уравнения (2.3). В результате получим такую систему уравнений

$$\frac{1}{4k+1} \Delta \Delta u_3^{(2k)} - \frac{1}{4k+5} \Delta \Delta u_3^{(2k+2)} + \frac{4k+3}{h^2} \sum_{s=1}^n (A_{2s}^{(k)} \Delta u_3^{(2s)} + h^{-2} B_{2s}^{(k)} u_3^{(2s)}) \equiv 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1); \quad (2.8)$$

$$\frac{c_{13}}{5c_{44}} \Delta \Delta u_3^{(2)} + \frac{1}{4n+1} \Delta \Delta u_3^{(2n)} + \frac{4n+3}{h^2} \sum_{s=1}^n (A_{2s}^{(n)} \Delta u_3^{(2s)} + h^{-2} B_{2s}^{(n)} u_3^{(2s)}) = 0 \quad (k = n).$$

Здесь $c^* = 1 + c_{13} / c_{44}$, $A_{2s}^{(k)}$, $B_{2s}^{(k)}$ – безразмерные константы, например

$$B_{2s}^{(k)} = \frac{c_{33}}{c_{11}} \left\{ \left[(s-1)(2s+3) + 3cc^* \right] \alpha_{2n+1}^{(k)} - \sum_{l=1}^{s-1} (4l+3) \alpha_{2l+1}^{(k)} \right\}.$$

Вводя обозначения

$$c_{66} u_3^{(2k)} = u_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.9)$$

представим ее в стандартной форме

$$\sum_{p=1}^n L_{kp}(\Delta) u_p = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.10)$$

где $L_{kp}(\Delta)$ – дифференциальные операторы вида

$$L_{kp}(\Delta) = a_{kp} h^4 \Delta \Delta + b_{kp} h^2 \Delta + d_{kp},$$

a_{kp} , b_{kp} , d_{kp} – постоянные.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det \| a_{kp} k^2 + b_{kp} k + d_{kp} \| = 0 \quad (2.11)$$

и будем считать, что оно имеет простые, не равные нулю корни k_m ($m = 1, 2, \dots, 2n$). Тогда из (2.10) аналогичным [17] способом находим

$$u_k = \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k)} w_m, \quad (2.12)$$

где w_m – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta w_m - k_m h^{-2} w_m = 0, \quad (2.13)$$

а $c_m^{(2k)}$ – постоянные, определяемые алгебраическими дополнениями элементов какой-нибудь строки определителя $\left| a_{kp} k_m^2 + b_{kp} k_m + d_{kp} \right|_{n \times n}$. Согласно (2.9), (2.12) имеем

$$c_{66} u_3^{(2)} = v_2^* h^2 u + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2)} w_m;$$

$$c_{66} u_3^{(2k)} = \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k)} w_m \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (2.14)$$

Учитывая значения функций (2.14), определим из формул (2.4), (2.7) моменты деформаций

$$c_{66} h e^{(1)} = -4h^2 u + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(1)} w_m;$$

$$c_{66} h e^{(2k+1)} = \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k+1)} w_m \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.15)$$

где $c_m^{(2k+1)}$ – безразмерные константы, в частности

$$c_m^{(1)} = -\frac{3c_{13}}{c_{11}} \sum_{s=1}^n c_m^{(2s)}.$$

Пользуясь равенствами (2.15), запишем уравнение (2.1) в виде

$$c_{66} \Delta u_3^{(0)} = 4u + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(0)} \Delta w_m \quad (2.16)$$

и, вводя бигармоническую функцию u^B согласно формуле

$$4u = \Delta u^B, \quad (2.17)$$

определим перемещение

$$c_{66} u_3^{(0)} = u^B + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(0)} w_m, \quad (2.18)$$

где

$$c_m^{(0)} = -\sum_{s=0}^n k_m^{-1} c_m^{(2s+1)}.$$

С другой стороны, равенства (2.15) с учетом формул (1.5), (2.17) можно представить так:

$$c_{66} \partial_\alpha u_\alpha^{(1)} = -h \Delta u^B + h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(1)} \Delta w_m; \quad c_{66} \partial_\alpha u_\alpha^{(2k+1)} = h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(2k+1)} \Delta w_m \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Отсюда находим моменты перемещений

$$\begin{aligned} c_{66} u_\alpha^{(1)} &= -h \partial_\alpha u^B + h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(1)} \partial_\alpha w_m + (-1)^\alpha h \partial_\beta Y_1, \quad (\alpha, \beta=1, 2; \alpha \neq \beta); \\ c_{66} u_\alpha^{(2k+1)} &= h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(2k+1)} \partial_\alpha w_m + (-1)^\alpha h \partial_\beta Y_{2k+1}, \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь $\tilde{a}_m^{(2k+1)} = k_m^{-1} c_m^{(2k+1)}$; Y_{2k+1} – произвольные достаточно гладкие вещественные функции. Их необходимо выбрать такими, чтобы выполнялись равенства (1.6). Следовательно, если внести в (1.6) значения функций (2.14) – (2.19), то получим такие уравнения

$$\begin{aligned} (-1)^\alpha \partial_\beta G_1 + \sum_{m=1}^{2n} O_m^{(1)} \partial_\alpha w_m &= \frac{4cc_{11}}{c_{66}} \partial_\alpha u; \\ (-1)^\alpha \partial_\beta G_{2k+1} + \sum_{m=1}^{2n} O_m^{(2k+1)} \partial_\alpha w_m &= \frac{4(4k+3)c_{13}c_{44}}{3c_{33}c_{66}} \partial_\alpha u \quad (k=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где через G_{2k+1} обозначены дифференциальные выражения

$$G_{2k+1} = \Delta Y_{2k+1} - \frac{(4k+3)c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=0}^n \alpha_{2s+1}^{(k)} Y_{2s+1}. \quad (2.21)$$

$O_m^{(2k+1)}$ – константы

$$O_m^{(2k+1)} = \frac{c_{11}}{c_{66}h} \left\{ \tilde{a}_m^{(2k+1)} k_m + \frac{4k+3}{c_{11}} \sum_{s=0}^n \left(\lambda_{2s}^{(k)} c_m^{(2s)} - c_{44} \alpha_{2s+1}^{(k)} a_m^{(2s+1)} \right) \right\} = 0.$$

Необходимо отметить, что константы $O_m^{(2k+1)}$ для $\forall k \in [0, n]$ тождественно равны нулю. Это следует из выполнения равенств (2.2), (2.3) и линейной независимости метагармонических функций.

Для решения уравнений (2.20) воспользуемся сопряженной гармонической функцией v , связанной с u условиями Коши – Римана [4]

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}. \quad (2.22)$$

Учитывая при этом тождества $O_m^{(2k+1)} = 0$, получим равенства

$$\begin{aligned} \partial_\beta G_1 &= -\frac{4cc_{11}}{c_{66}} \partial_\beta v \quad (\beta = 1, 2); \\ \partial_\beta G_{2k+1} &= -\frac{4(4k+3)c_{13}c_{44}}{3c_{33}c_{66}} \partial_\beta v \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

которые после интегрирования по переменной x_β и учета значений (2.21) примут такой вид

$$\begin{aligned} \Delta Y_1 - \frac{3c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=0}^n Y_{2s+1} &= -\frac{4cc_{11}}{c_{66}} v + c_1; \\ \Delta Y_{2k+1} - \frac{(4k+3)c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=0}^n \alpha_{2s+1}^{(k)} Y_{2s+1} &= -\frac{4(4k+3)c_{12}c_{44}}{3c_{33}c_{66}} v + c_{2k+1}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Так как функции Y_{2k+1} определяются с точностью до постоянных слагаемых, то константы c_{2k+1} без ущерба общности можно принять равными нулю.

Примем решение уравнений (2.23) в виде суммы частного

$$\hat{Y}_1 = v_1^* h^2 v; \quad \hat{Y}_3 = v_3^* h^2 v; \quad \hat{Y}_{2k+1} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (2.24)$$

и общего решения

$$\hat{Y}_{2k+1} = y_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (2.25)$$

однородной системы уравнений, представленной в следующей нормальной форме

$$\sum_{l=1}^{n+1} (q_{kl} - \delta_{kl} h^2 \Delta) y_l = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.26)$$

Здесь δ_{kl} – символ Кронекера,

$$q_{kl} = \frac{(4k+3)c_{44}}{c_{66}} \alpha_{2l+1}^{(k)},$$

v_1^* и v_3^* – безразмерные константы

$$v_1^* = \frac{4c_{11}(5c + c_2)}{15c_{44}}; \quad v_3^* = \frac{4c_{11}c_2}{15c_{44}} \quad \left(c_2 = c - \frac{c_{11}c_{44}}{c_{11}c_{33}} \right).$$

Из (2.26) при условии, что характеристическое уравнение

$$\det \|q_{kl} - \lambda \delta_{kl}\| = 0 \quad (2.27)$$

имеет простые, неравные нулю корни λ_s ($s = 1, 2, \dots, n+1$), аналогичным выше способом находим

$$y_k = \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{b}_s^{(2k+1)} \Omega_s X_1, \dots, X_n, \quad (2.28)$$

где Ω_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta \Omega_s - \lambda_s h^{-2} \Omega_s = 0; \quad (2.29)$$

$\tilde{b}_s^{(2k+1)}$ – постоянные, определяемые алгебраическими дополнениями элементов какой-нибудь строки определителя $|q_{kl} - \lambda_s \delta_{kl}|_{(n+1) \times (n+1)}$. Отсюда, принимая во внимание формулы (2.24), (2.25) и (2.28), получаем

$$\begin{aligned} Y_1 &= \nu_1^* h^2 \nu + \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{b}_s^{(1)} \Omega_s; \quad Y_3 = -\nu_3^* h^2 \nu + \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{b}_s^{(3)} \Omega_s; \\ Y_{2k+1} &= \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{b}_s^{(2k+1)} \Omega_s \quad (k = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Подставляя значения функции (2.30) в равенства (2.19) и учитывая условия Коши – Римана (2.22), будем иметь

$$\begin{aligned} c_{66} u_\alpha^{(1)} &= -h \partial_\alpha (u^\beta + \nu_1^* h^2 u) + h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(1)} \partial_\alpha w_m + h \sum_{s=1}^{n+1} (-1)^\alpha \tilde{b}_s^{(1)} \partial_\beta \Omega_s; \\ c_{66} u_\alpha^{(3)} &= \nu_3^* h^3 \partial_\alpha u + h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(3)} \partial_\alpha w_m + h \sum_{s=1}^{n+1} (-1)^\alpha \tilde{b}_s^{(3)} \partial_\beta \Omega_s \quad [\alpha \neq \beta]; \\ c_{66} u_\alpha^{(2k+1)} &= h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(2k+1)} \partial_\alpha w_m + h \sum_{s=1}^{n+1} (-1)^\alpha \tilde{b}_s^{(2k+1)} \partial_\beta \Omega_s \\ & \quad (k = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Таким образом, значения функций (2.14), (2.15), (2.18) и (2.31) представляют общее аналитическое решение системы уравнений (1.6), (1.7).

§3. Комплексная форма решения.

При решении сформулированной краевой задачи удобно иметь комплексную форму данного решения. Следовательно, вводя комплексные переменные $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$, запишем равенства (2.31) таким образом

$$\begin{aligned} c_{66} (u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}) &= -2h \partial_{\bar{z}} (u^\beta + \nu_1^* h^2 u) + h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(1)} \partial_{\bar{z}} w_m + ih \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{b}_s^{(1)} \partial_{\bar{z}} \Omega_s; \\ c_{66} (u_1^{(3)} + iu_2^{(3)}) &= 2\nu_3^* h^3 \partial_{\bar{z}} u + h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(3)} \partial_{\bar{z}} w_m + ih \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{b}_s^{(3)} \partial_{\bar{z}} \Omega_s; \\ c_{66} (u_1^{(2k+1)} + iu_2^{(2k+1)}) &= h \sum_{m=1}^{2n} \tilde{a}_m^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} w_m + ih \sum_{s=1}^{n+1} \tilde{b}_s^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} \Omega_s. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая гармоническую u и бигармоническую u^β функции в виде

$$\begin{aligned} 4u &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)}; \\ u^\beta &= \bar{z} \phi(z) + z \overline{\phi(z)} + \chi_*(z) + \overline{\chi_*(z)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\phi(z), \chi_*(z)$ – произвольные голоморфные функции, получим такие выражения

$$\begin{aligned} c_{66}u_+^{(1)} &= -2h[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + v_1^*h^2\overline{\phi''(z)} + \overline{\chi(z)}] + \\ &+ h\sum_{m=1}^{2n} a_m^{(1)}\partial_{\bar{z}}w_m + ih\sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(1)}\partial_{\bar{z}}\Omega_s; \\ c_{66}u_+^{(3)} &= 2v_3^*h^3\overline{\phi''(z)} + h\sum_{m=1}^{2n} a_m^{(3)}\partial_{\bar{z}}w_m + ih\sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(3)}\partial_{\bar{z}}\Omega_s; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$c_{66}u_+^{(2k+1)} = h\sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k+1)}\partial_{\bar{z}}w_m + ih\sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(2k+1)}\partial_{\bar{z}}\Omega_s \quad (k=2,3,\dots,n).$$

Здесь $\chi(z) = \chi'_*(z)$; $u_+^{(2k+1)} = u_1^{(2k+1)} + iu_2^{(2k+1)}$; $2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$; $a_m^{(2k+1)} = 2\tilde{a}_m^{(2k+1)}$; $b_s^{(2k+1)} = 2\tilde{b}_s^{(2k+1)}$.

Согласно (3.1) из формул (2.14), (2.15) и (2.18) легко определяем выражения для моментов вектора перемещений

$$\begin{aligned} c_{66}u_3^{(0)} &= \bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \chi_*(z) + \overline{\chi_*(z)} + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(0)}w_m; \\ c_{66}u_3^{(2)} &= v_2^*h^2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2)}w_m; \\ c_{66}u_3^{(2k)} &= \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k)}w_m \quad (k=2,3,\dots,n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

и тензора деформаций

$$\begin{aligned} c_{66}he^{(1)} &= -4h^2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(1)}w_m; \\ c_{66}he^{(2k+1)} &= \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k+1)}w_m \quad (k=1,2,\dots,n). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения состояния (1.4) в комплексной форме представляются таким образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k+1)} + \sigma_{22}^{(2k+1)} &= 2h\left[(c_{12} + c_{66})e^{(2k+1)} + (4k+3)c_{13}h^{-1}\sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s)}\right]; \\ \sigma_{11}^{(2k+1)} - \sigma_{22}^{(2k+1)} + 2i\sigma_{12}^{(2k+1)} &= 4c_{66}h\partial_{\bar{z}}u_+^{(2k+1)}; \\ \sigma_{33}^{(2k+1)} &= h\left[c_{13}e^{(2k+1)} + (4k+3)c_{33}h^{-1}\sum_{s=k+1}^n u_3^{2s}\right]; \\ \sigma_{13}^{(2k)} + i\sigma_{23}^{(2k)} &= c_{44}h\left[2\partial_{\bar{z}}u_3^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}\sum_{s=k}^n u_3^{(2s+1)}\right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В полярной системе координат r, θ моменты напряжений определяются согласно формул преобразования

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(2k+1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k+1)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k+1)} &= e^{-2i\theta} (\sigma_{11}^{(2k+1)} - \sigma_{22}^{(2k+1)} + 2i\sigma_{12}^{(2k+1)}); \\ \sigma_{rr}^{(2k+1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k+1)} &= \sigma_{11}^{(2k+1)} + \sigma_{22}^{(2k+1)}; \quad \sigma_{r3}^{(2k)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k)} = e^{-i\theta} (\sigma_{13}^{(2k)} + i\sigma_{23}^{(2k)}).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Подставляя в (3.5) значения функций (3.2) – (3.4) и учитывая формулы (3.6), будем иметь такие равенства:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= -8\nu^* h^2 \left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] + 2 \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(0)} w_m; \\ \sigma_{rr}^{(3)} - \sigma_{\theta\theta}^{(3)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(3)} &= 4h^2 e^{-2i\theta} \left[\nu_3^* h^2 \overline{\phi''(z)} + \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(3)} \partial_{\bar{z}}^2 w_m + i \sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(1)} \partial_{\bar{z}}^2 \Omega_s \right]; \\ \sigma_{rr}^{(2k+1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k+1)} &= 2 \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(2k+1)} w_m; \quad \sigma_{33}^{(2k+1)} = \sum_{m=1}^{2n} d_{3m}^{(2k+1)} w_m \\ &(k = 1, 2, \dots, n); \\ \sigma_{rr}^{(2k)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k)} &= 2he^{-i\theta} \left[\mu^{(2k)} h^2 \overline{\phi''(z)} + \sum_{m=1}^{2n} p_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} w_m + i \sum_{s=1}^{n+1} q_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} \Omega_s \right],\end{aligned}\quad (3.7)$$

где $d_m^{(2k+1)}$, $d_{3m}^{(2k+1)}$, $p_m^{(2k)}$, $q_s^{(2k)}$ – постоянные, определяемые формулами

$$\begin{aligned}d_m^{(2k+1)} &= \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{66}} c_m^{(2k+1)} + \frac{(4k+3)c_{13}}{c_{66}} \sum_{l=k+1}^n c_m^{(2l)}; \quad d_{3m}^{(2k+1)} = \frac{c_{13}}{c_{66}} c_m^{(2k+1)} + \frac{(4k+3)c_{33}}{c_{66}} \sum_{l=k+1}^n c_m^{(2l)}; \\ p_m^{(2k)} &= \frac{c_{44}}{2c_{66}} \left[2c_m^{(2k)} + (4k+1) \sum_{l=k}^n a_m^{(2l+1)} \right]; \quad q_s^{(2k)} = \frac{(4k+1)c_{44}}{2c_{66}} \sum_{l=k}^n b_s^{(2l+1)};\end{aligned}$$

ν^* , ν_{02}^* – безразмерные константы

$$\nu^* = c_1 c_{11} / c_{66}; \quad c_1 = c - c_{66} / c_{11}; \quad \nu_{02}^* = 4c c_{11} / 3c_{66};$$

$$\mu^{(0)} = -\nu_{02}^*; \quad \mu^{(2)} = \nu_{02}^*; \quad \mu^{(2k)} = 0 \quad (k > 1).$$

Из соотношений (3.7) получаем выражения для граничных условий при решении внутренней и внешней краевых задач.

Для бесконечной области с круговой границей радиуса R голоморфные функции $\phi'(z) = \Phi(z)$, $\chi'(z) = X(z)$ примем в виде

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}; \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^{-n}, \quad (3.8)$$

где α_n , β_n ($n > 0$) – произвольные постоянные, α_0 и β_0 – константы, определяемые значениями напряжений, заданными на бесконечности, т.е.

$$\alpha_0 + \bar{\alpha}_0 = -\frac{1}{8\nu^* h^2} (\sigma_{11}^{(1)\infty} + \sigma_{22}^{(1)\infty}); \quad \bar{\beta}_0 = -\frac{1}{8h^2} (\sigma_{11}^{(1)\infty} - \sigma_{22}^{(1)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(1)\infty}).$$

При заданном крутящем моменте $\sigma_{12}^{(1)\infty} = H$ ($H = \text{const}$) следует, что $\alpha_0 + \bar{\alpha}_0 = 0$, $\beta_0 = iH / 4h^2$.

В зависимости от значений корней характеристического уравнения (2.11), которые могут быть действительными положительными и комплексно-сопряженными, метагармонические функции w_m представляются таким образом

$$\begin{aligned} w_l &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l)} K_n(\bar{r}x_l) e^{in\theta}, \quad l \in [1, 2n_1]; \\ w_{2l+1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} H_n^{(1)}(\bar{r}x_{2l+1}) e^{in\theta}, \quad l \in [n_1, n-1]; \\ w_{2l+2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(l)} H_n^{(2)}(\bar{r}x_{2l+2}) e^{in\theta}, \quad (n_1 \leq n), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $K_n(\bar{r}x_l)$ – модифицированные функции Бесселя; $H_n^{(1)}(\bar{r}x_{2l+1})$ и $H_n^{(2)}(\bar{r}x_{2l+2})$ – цилиндрические функции Ханкеля первого и второго рода; $\bar{r} = r/R$, $x_l = Rh^{-1}\sqrt{k_l}$, $x_{2l+1} = Rh^{-1}\sqrt{-k_{2l+1}}$, $x_{2l+2} = \overline{x_{2l+1}}$, $B_n^{(l)}$, $C_n^{(l)}$, $D_n^{(l)}$ – произвольные постоянные.

Корни характеристического уравнения (2.27) вещественные положительные, поэтому

$$\Omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n^{(s)} K_n(rh^{-1}\sqrt{\lambda_s}) e^{in\theta}. \quad (3.10)$$

Для однородных граничных условий имеем равенства

$$\left| \sigma_{rr}^{(2k+1)}(r, \theta) + i\sigma_{r\theta}^{(2k+1)}(r, \theta) \right|_{r=R} = 0; \quad \sigma_{r\theta}^{(2k+1)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Отсюда, учитывая формулы (3.7) и значения функций (3.8) – (3.10) получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных констант.

§4 Пластина с некруговой цилиндрической полостью.

Предположим, что пластина ослаблена некруговым цилиндрическим отверстием $\partial\Omega = L \times [-h, h]$, кривая L которой на срединной плоскости S незначительно отличается от окружности радиуса R и описывается уравнениями [3]

$$x_1 = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos m\vartheta); \quad x_2 = R(\sin \vartheta - \varepsilon \sin m\vartheta), \quad (4.1)$$

где m – целое положительное число; ε – малый параметр. При решении задачи для пластины с некруговым отверстием целесообразно перейти к безразмерным декартовым x, y и полярным r, θ координатам. Тогда конформное отображение внешней области единичного круга на бесконечную область, ограниченную кривой (4.1), определяется функцией [2]

$$z = x + iy = R^{-1}\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta), \quad (4.2)$$

в которой $x = x_1/R$, $y = x_2/R$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, $f(\zeta) = \zeta^{-m}$; x, y – декартовы координаты; ρ, ϑ – ортогональные криволинейные координаты. Из (4.2) получаем

$$r = |\zeta + \varepsilon f(\zeta)|; \quad \theta = \arctg \frac{\operatorname{Im}[\zeta + \varepsilon f(\zeta)]}{\operatorname{Re}[\zeta + \varepsilon f(\zeta)]}.$$

Криволинейная система координат (ρ, ϑ, ξ) повернута относительно полярной (r, θ, x_3) вокруг общей оси $\xi = h^{-1}x_3$ на некоторый угол β . Экспонента этого угла определяется формулой [2]

$$e^{i\beta} = \frac{\zeta \omega'(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}}{|\zeta| |\omega'(\zeta)| |\omega(\zeta)|}.$$

В обеих системах имеют место разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра. Тогда на основании формул преобразования получаем соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k+1)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1)} &= \sigma_{rr}^{(2k+1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k+1)}; \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k+1)} = \sigma_{33}^{(2k+1)}; \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k+1)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k+1)} &= e^{2i\beta} (\sigma_{rr}^{(2k+1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k+1)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k+1)}); \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2k)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k)} &= e^{i\beta} (\sigma_{r3}^{(2k)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k)}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij'}^{(m)}(\rho, \vartheta)$ ($i, j' = \rho, \vartheta, \xi$), $\sigma_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)}(r, \theta)$ ($i, j = r, \theta, x_3$).

Краевые условия на контуре L записываются таким же способом, как и на контуре кругового отверстия. При условии свободного от внешних усилий отверстия имеем

$$\left| \sigma_{\rho\rho}^{(2k+1)}(\rho, \vartheta) - i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k+1)}(\rho, \vartheta) \right|_{\rho=1} = 0; \quad \left| \sigma_{\rho\xi}^{(2k)}(\rho, \vartheta) \right|_{\rho=1} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (4.4)$$

Согласно конформному отображению (4.2) основные уравнения (2.13), (2.29) преобразуются к виду

$$\Delta w_m - \mathfrak{x}_m^2 |\omega'(\zeta)|^2 w_m = 0; \quad \Delta \Omega_s - t_s^2 |\omega'(\zeta)|^2 \Omega_s = 0,$$

где $\Delta = 4\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}}$ – оператор Лапласа, $\mathfrak{x}_m^2 = k_m R^2 / h^2$, $t_s^2 = \lambda_s R^2 / h^2$.

Очевидно, уравнения (4.4) в переменных ρ, ϑ достаточно сложны и найти их точное аналитическое решение с разделяющимися переменными весьма затруднительно. Поэтому, следуя [2] решение задачи будем искать в виде рядов по положительным степеням малого параметра ε . Следовательно, представляя левую и правую части соотношений (4.3) в виде рядов по параметру ε , и сравнивая выражения при одинаковых степенях ε , получаем такие равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k+1; q)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1; q)} &= \sum_{j=0}^q L_1^{(q-j)} (\sigma_{rr}^{(2k+1; j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k+1; j)}); \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k+1; q)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1; q)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k+1; q)} &= \sum_{j=0}^q L_2^{(q-j)} (\sigma_{rr}^{(2k+1; j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k+1; j)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k+1; j)}); \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2k+1; q)} &= \sum_{j=0}^q L_1^{(q-j)} \sigma_{33}^{(2k+1; j)}; \quad \sigma_{\rho\xi}^{(2k; q)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k; q)} = \sum_{j=0}^q L_3^{(q-j)} (\sigma_{r3}^{(2k; j)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k; j)}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $L_p^{(j)}$ – операторы, определяемые для первых трёх приближений по формулам

$$\begin{aligned} L_p^{(0)} &= 1 (p=1, 2, 3); \quad L_1^{(1)} = D_1, \quad L_2^{(1)} = D_1 + 2iq_1; \quad L_3^{(1)} = D_1 + iq_1; \quad L_1^{(2)} = \frac{1}{2}D_2; \\ L_2^{(2)} &= \frac{1}{2}D_2 - 2q_1^2 + 2i(q_1D_1 + q_2); \quad L_3^{(2)} = \frac{1}{2}(D_2 - q_1^2) + i(q_1D_1 + q_2), \end{aligned}$$

в которых D_α ($\alpha=1, 2$) собственно дифференциальные операторы

$$D_1 = f(\zeta)\partial_\zeta + \overline{f(\zeta)}\partial_{\bar{\zeta}}; \quad D_2 = f^2(\zeta)\partial_\zeta^2 + 2f(\zeta)\overline{f(\zeta)}\partial_\zeta\partial_{\bar{\zeta}} + \overline{f^2(\zeta)}\partial_{\bar{\zeta}}^2,$$

q_α ($\alpha=1, 2$) – вещественные функции

$$q_1 = \frac{1}{\zeta\bar{\zeta}} \operatorname{Im} \left[\zeta \overline{f(\zeta)} + \zeta \zeta' \overline{f'(\zeta)} \right]; \quad q_2 = \frac{1}{2(\zeta\bar{\zeta})^2} \operatorname{Im} \left\{ \bar{\zeta}^2 f^2(\zeta) - (\zeta\bar{\zeta})^2 f'^2(\zeta) \right\}.$$

Здесь $\sigma_{ps}^{(l; j)} = \sigma_{ps}^{(l; j)}(p, \vartheta)$ ($p, s = r, \theta, 3$).

Если принять $f(\zeta) = \zeta^{-m}$ и учесть выражение для производных

$$\partial_\zeta = \frac{1}{2} e^{-i\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right); \quad \partial_{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2} e^{i\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right);$$

$$\partial_{\bar{\zeta}}^2 = \frac{1}{4} e^{2i\vartheta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + 2i \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right],$$

то операторы D_α примут вид

$$D_1 = \frac{1}{\rho^m} \left[\cos(m+1)\vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin(m+1)\vartheta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right];$$

$$D_2 = \frac{1}{2\rho^{2m}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cos 2(m+1)\vartheta \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) - \right.$$

$$\left. - 2 \sin 2(m+1)\vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right\},$$

а функции q_α запишутся таким образом:

$$q_1 = \frac{m+1}{\rho^{m+1}} \sin(m+1)\vartheta; \quad q_2 = \frac{m^2-1}{2\rho^{2(m+1)}} \sin 2(m+1)\vartheta.$$

Необходимо отметить, что напряжения, фигурирующие в правых частях соотношений (4.5) записываются на основе их аналитических выражений (3.7) в переменных z, \bar{z} формальной заменой последних на $\zeta, \bar{\zeta}$ или что то же самое переменных r, θ на ρ, ϑ . Так, например

$$\sigma_{rr}^{(1,j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1,j)} = -8\nu^* h^2 \left[\phi_j'(\zeta) + \overline{\phi_j'(\zeta)} \right] + 2 \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(1)} w_l^{(j)};$$

$$\sigma_{rr}^{(1,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1,j)} + 2i \sigma_{r\theta}^{(1,j)} = -8h^2 e^{-2i\vartheta} \left[\zeta \overline{\phi_j''(\zeta)} + \nu_1^* h^2 \overline{\phi_j''(\zeta)} + \chi_j'(\zeta) \right] +$$

$$+ 4h^2 e^{-2i\vartheta} \left(\sum_{l=1}^{2n} a_l^{(1)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 w_l^{(j)} + i \sum_{s=1}^{n+1} b_s^{(1)} \partial_{\bar{\zeta}}^2 \Omega_s^{(j)} \right);$$

$$\sigma_{r3}^{(0,j)} + i \sigma_{\theta 3}^{(0,j)} = 2h e^{-i\vartheta} \left[-\nu_{02}^* h^2 \overline{j_j''(\zeta)} + \sum_{l=1}^{2n} p_l^{(0)} \partial_{\bar{\zeta}} w_l^{(j)} + i \sum_{s=1}^{n+1} q_s^{(0)} \partial_{\bar{\zeta}} \Omega_s^{(j)} \right],$$

где $w_l^{(j)}$ и $\Omega_s^{(j)}$ – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta w_l^{(j)} - \alpha_l^2 w_l^{(j)} = 0; \quad \Delta \Omega_s^{(j)} - t_s^2 \Omega_s^{(j)} = 0,$$

в которых Δ – оператор Лапласа вида

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

Таким образом, в каждом из приближений по параметру ε приходим к решению задачи для кругового отверстия.

§5. Численные исследования.

Изложены результаты численных исследований распределения напряжений около некругового цилиндрического отверстия с эллиптическим и треугольным на срединной плоскости S контуром в трансверсально-изотропной пластине, находящейся под действием крутящих моментов на бесконечности. Рассмотрено три приближения по малому параметру ε и найдены выражения для компонент напряжений. Так, окружные напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$ определяются формулой

$$\frac{1}{H} \sigma_{\vartheta\vartheta} = -\xi \sin 2\vartheta + \sum_{k=0}^n \left\{ \left[M_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,0)}(\rho) + \varepsilon^2 M_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,2)}(\rho) \right] \sin 2\vartheta + \right. \\ \left. + \varepsilon m_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,1)}(\rho) \sin 4\vartheta + \varepsilon^2 \widetilde{M}_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,2)}(\rho) \sin 6\vartheta \right\} P_{2k+1}(\xi)$$

для полости с эллиптическим на плоскости S контуром и

$$\frac{1}{H} \sigma_{\vartheta\vartheta} = -\xi \sin 2\vartheta + \sum_{k=0}^n \left\{ \left[M_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,0)}(\rho) + \varepsilon^2 M_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,2)}(\rho) \right] \sin 2\vartheta + \right. \\ \left. + \varepsilon \left[m_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,1)}(\rho) \sin \vartheta + \widetilde{M}_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,1)}(\rho) \sin 5\vartheta \right] + \varepsilon^2 \widetilde{M}_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,2)}(\rho) \sin 8\vartheta \right\} P_{2k+1}(\xi)$$

для отверстия с треугольным (с закругленными углами) контуром на S . Здесь $M_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,j)}(\rho)$, $\widetilde{M}_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,j)}(\rho)$ и $m_{\vartheta\vartheta}^{(2k+1,j)}(\rho)$ – составляющие, содержащие цилиндрические функции.

Числовые расчёты выполнены для трансверсально-изотропной пластины с коэффициентами Пуассона $\nu = 0,3$, $\nu' = 0,25$ и отношениями модулей упругости $E / E' = 1,25$; $E / G' = 5,0$. Отображающая функция $f(\zeta)$ и параметры m , R и ε рассматриваемых на плоскости S отверстий принимались такими, как в работе [5].

- 1) *Отверстие с эллиптическим контуром на S .* Для эллиптического отверстия указанные параметры имеют вид

$$f(\zeta) = \zeta^{-1} \quad (m = 1); \quad R = \frac{a+b}{2}; \quad \varepsilon = \frac{a-b}{a+b},$$

где a и b – полуоси эллипса.

Таблица 1

	a/b	$b/h=2,0$			$b/h=2,0$		
		0	1	2	0	1	2
$\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$	1,0	1,9442	1,9442	1,9442	1,6314	1,6314	1,6314
	1,1	1,9234	2,0464	2,0817	1,6196	1,7125	1,7569
	1,2	1,9040	2,1330	2,2592	1,6086	1,7822	1,9461
	1,3	1,8857	2,2091	2,4691	1,5986	1,8444	2,1912
	1,4	1,8687	2,2760	2,7013	1,5893	1,8996	2,4823
	1,5	1,8526	2,3346	2,9483	1,5807	1,9485	2,8114

В табл. 1 приведены значения окружных напряжений $\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$ на контуре отверстия в точке $\zeta = 1$, $\vartheta = -\pi/9$ для трех приближений по параметру ε в зависимости от отношения полуосей эллипса a/b при двух значениях параметра $b/h=0,8$ и $b/h=2,0$, характеризующего относительную толщину пластины. Как видно, с увеличением a/b напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$ повышаются.

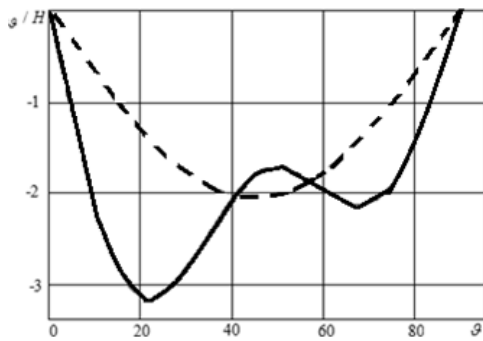


Рис. 1

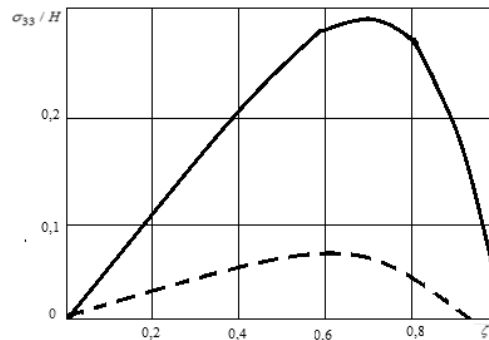


Рис. 2

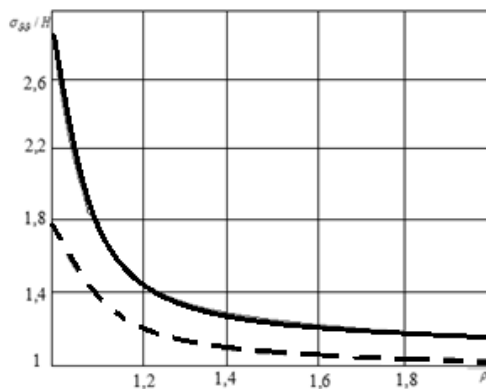


Рис. 3

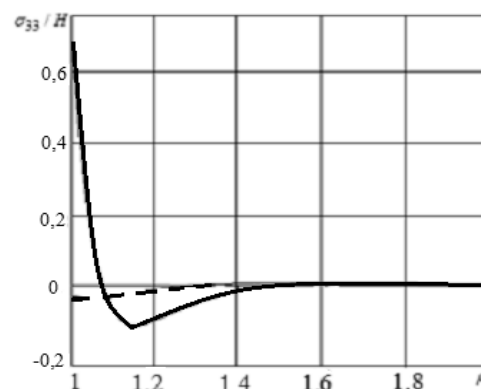


Рис. 4

На рис. 1 представлены кривые изменения напряжений σ_{99}/H по контуру отверстия ($0 \leq \vartheta \leq \pi/2$) на плоскости $\xi=1$ при относительной толщине $b/h=1$. Пунктирная кривая соответствует круговой полости, а сплошная – эллиптической. Изменение нормальных поперечных напряжений σ_{33}/H по толщине пластины ($0 \leq \xi \leq 1$) в сечении $\rho=1,07$; $\vartheta=5\pi/9$ изображено на рис. 2. Кривые на рис. 3 и 4 характеризуют затухание напряжений σ_{99}/H и σ_{33}/H при удалении от поверхности полости:

2) *Треугольное в плане отверстие.* При тех же значениях упругих констант проведены расчеты напряженного состояния пластины, ослабленной отверстием с треугольным на плоскости S контуром, параметры которого имеют значение

$$f(\zeta) = \zeta^{-2} \quad (m=2); \quad R = \frac{8}{15}h_0; \quad \varepsilon = 1/4.$$

h_0 – высота правильного треугольника.

Таблица 2

		E/E'					
		0,75	1,25	1,30	1,75	2,0	2,25
σ_{99}/H	0	2,3412	2,2103	2,1782	2,1565	2,1334	2,1101
	1	3,5129	3,4422	3,3719	3,3249	3,2777	3,2301
	2	4,2165	4,1374	4,0615	4,0114	3,9615	3,9115

В табл. 2 приведены значения окружных напряжений $\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$ на граничной плоскости ($\xi = 1$) в точке $\rho = 1, \vartheta = 125^\circ$ для трех приближений по параметру ε (0,1,2) в зависимости от отношения модулей упругости E / E' . Как видно, с увеличением параметра E / E' напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ понижаются. В той же точке на рис. 5 представлены кривые изменения $\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$ в зависимости от параметра h_0 / h , характеризующего относительную толщину пластины. С уменьшением толщины пластины напряжения понижаются.

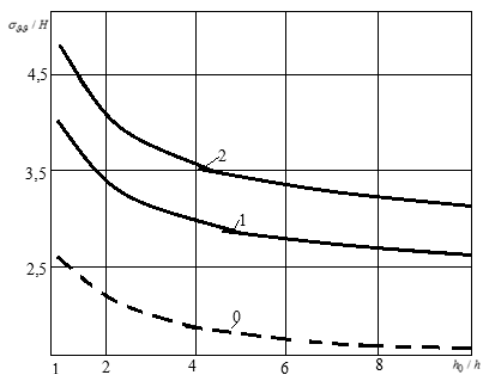


Рис. 5

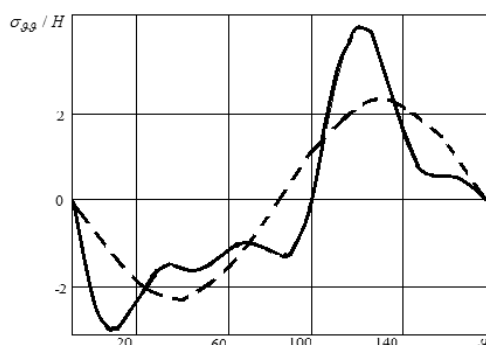


Рис. 6

Изменение $\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$ по контуру отверстия ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) на граничной плоскости $\xi = 1$ при $h_0 / h = 2$ изображено на рис. 6. Пунктирная кривая соответствует круговому отверстию, а сплошная – треугольному. На рис. 7 и 8 представлены кривые изменения окружных напряжений $\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$ (в сечении $\rho = 1, \vartheta = 125^\circ$) и нормальных поперечных напряжений σ_{33} / H (в сечении $\rho = 1,07; \vartheta = 125^\circ$) по толщине пластины ($0 \leq \xi \leq 1$). Заметим, что напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta} / H$ наибольших значений принимают не на граничной плоскости $\xi = 1$, а в непосредственной близости к ней $\xi \approx 0,96$: нормальные напряжения σ_{33} / H на граничной плоскости $\xi = 1$ по условию должны быть равными нулю.

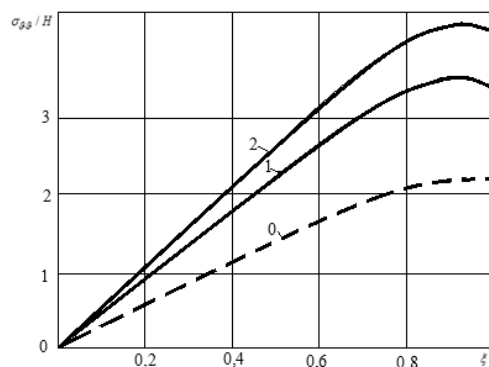


Рис. 7

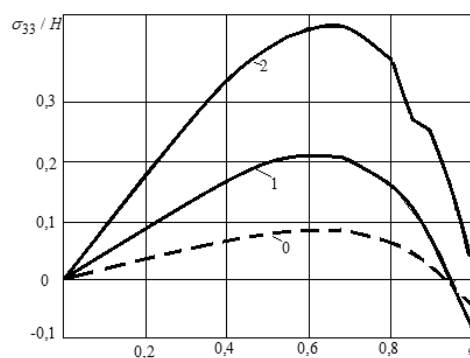


Рис. 8

Заключение.

Дана постановка и получено решение задачи о напряженном состоянии неограниченной трансверсально-изотропной пластины, ослабленной криволинейным (некруговым) цилиндрическим отверстием при заданном крутящем моменте на бесконечности. Для трех приближений по малому параметру проведен анализ распределения напряжений около полостей с эллиптическим и треугольным контуром на срединной плоскости. Проведены численные расчеты и выявлено, что коэффициент concentra-

ції напружений досягає свого максимального значення на поверхності порожнини в точці, що знаходиться на певній відстані від граничної площини.

РЕЗЮМЕ. Методом розкладу функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини сумісно з методом збурення форми границі знайдено розв'язок задачі про напружений стан необмеженої трансверсально-ізотропної пластини, послабленої некруговим циліндричним отвором. Поверхня отвору вільна від зовнішніх зусиль, а на нескінченності пластини перебуває під дією постійних крутних моментів. Проаналізовано розподіл напружень в околі отвору з еліптичним і трикутним з заокругленими кутами контурами на серединній площині. Виявлена залежність напружень від відносної товщини пластини та пружних сталей.

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. института. – 1965. – **30**. – С. 3 – 103.
2. Гузь А.Н., Немчи Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Вища школа, 1989. – 252 с.
3. Немчи Ю.Н., Хома И.Ю. Об изгибе нетонких трансверсально-изотропных пластин с криволинейными отверстиями // Прикл. механика. – 1988. – **24**. №1. – С. 80 – 88.
4. Положий Г.М. Рівняння математичної фізики. – Київ: Радянська школа, 1959. – 478 с.
5. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями (А.Н. Гузь, И.С. Черниченко, В.Н. Чехов и др. – Киев: Наук. Думка, 1980. – 686 с.).
6. Abbas Ibrahim A. Fractional Order GN Model on Thermoelastic Interaction in an Infinite Fibre-Reinforced Anisotropic Plate Containing a Circular Hole // J. Comput. and Theor. Nanosci. – 2014. – **11**, N 2. – P. 380 – 384.
7. Bardzokas D.I., Kushnir D.V., Filstinskii L.A. Dynamic Problems of the Theory of Elasticity for Layers and semilayers with Cavities // Acta Mechanica. – 2009. – **208**. – P. 81 – 95.
8. Burniston E.E. On the Extension of an Infinite Elastic Plate Containing an Axisymmetric Hole // J. Appl. Mech. – 1972. – **39**, N 2. – P. 507 – 512.
9. Darwish F., Gharaibeh M., Tashtoush G. A Modified Equation for the Stress Concentration Factor in Countersunk Holes // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – **36**. – P. 94 – 103.
10. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of Transversely Isotropic Materials. – Dordrecht: Springer. – 2006. – 454 p.
11. Fellers J.L., Soler A.I. Approximate Solution of the Finite Cylinders Problem Using Legendre Polynomials // AIAA J. – 1970. – **8**, N 11. – P. 2037 – 2048.
12. Filstinskii L.A., Kovalev U.O., Ventsel E.S. Solution of the Elastic Boundary Value Problem for a Layer with Tunnel Stresses Raisers // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – **39**. – P. 6385 – 6402.
13. Folias E.S., Wang J.J. On the Three – Dimensional Stress Field Around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // Comput. Mech. – 1990. – **6**, N 5. – P. 379 – 391.
14. Grigorenco Ya.M., Grigorenco A.Ya., Zakhariichenko L.L. Analysis of Influence of the Geometrical Parameters of Elliptic Cylindrical Shells with Variable Thickness on Their Stress-Strain State // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 155 – 162.
15. Grigorenco Ya.M., Pankratiev S.A., Yaremchenko S.N. Influence of Orthotropy on Stress-Strain State of Quadrangular Plates of Different Shapes // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 2. – P. 199 – 210.
16. Khoma I.Yu., Proshchenko T.M. Tension and Shear of the Transversely Isotropic Piezoceramic Plate with a Circular Hole with Mixed Conditions of Flat Sides // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 704 – 715.
17. Khoma I.Yu., Proshchenko T.M. The Stress State of a Transversely Isotropic Plate with Curvilinear Hole for a Given Splitting Force at the Boundary Surface // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 434 – 448.
18. Kotousov A., Wang C.H. Three-Dimensional Stress Constraint in an Elastic Plate with a Notch // Int. J. Solids and Struct. – 2009. – **39**, №16. – P. 4311 – 4326.
19. Rezaeepazhand J., Jafari M. Stress Concentration in Metallic Plates with Special Shaped Cutout // Int. J. Mech. Sciences. – 2010. – **52**, N 1, – P. 96 – 102.
20. Yang Z., Kim C., Cho C., Beom H. The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plates Containing a Circular Hole // Int. J. Solids and Struct. – 2008. – **45**. – P. 713 – 731.
21. Yang Z. The Stress and Strain Concentration of an Elliptical Hole in an Elastic Plate of Finite Subjected to Tensile Stress // Int. J. Fract. – 2009. – P. 43 – 44.

Поступила 12.03.2019

Утверждена в печать 03.03.2020