

В. Ф. Мейш¹, Ю. А. Мейш², М. А. Белова³

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ИЗОТРОПНЫХ
КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ
ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НАГРУЗКАХ**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vfmeish@gmail.com;*

²*Национальный транспортный университет,
ул. Омеляновича – Павленко, 1, 01010, Киев, Украина, e-mail: juliameish@gmail.com;*

³*Киевский национальный торгово-экономический университет,
ул. Киото, 19, 02000, Киев, Украина, e-mail: marisha67@ukr.net*

Abstract. A solution of a problem on the forced vibrations of a truncated conical shell with elliptical cross-section is considered under the action of distributed impulse load. A linear version of the equations of the Timoshenko type theory of conical shells is obtained in a non-orthogonal curvilinear coordinate system. To solve the problem stated, a numerical algorithm of its solving is elaborated which is based on the finite-difference approximation of the initial equations by the spatial and time coordinates. An example of the dynamical behavior of the conical shell is studied numerically.

Key words: conical shell, elliptical cross-section, non-orthogonal curvilinear coordinate system, theory of Timoshenko type, forced vibrations, numerical solution.

Введение.

Задачам динамического поведения однородных и неоднородных по толщине оболочечных конструкций различной пространственной конфигурации посвящено обширное число публикаций (статьи, обзорные работы, монографии). Практически все динамические задачи решались для оболочек канонической формы (цилиндрические, сферические, конические и т.д. оболочки) в ортогональной криволинейной системе координат [2]. Численное решение динамических задач теории многослойных подкрепленных оболочек различной геометрии представлено в работе [15]. Напряженно-деформируемое состояние дискретно-подкрепленной эллипсоидальной оболочки при нестационарной нагрузке рассмотрено в работе [13]. В работе [14] рассмотрены нестационарные колебания трехслойных цилиндрических оболочек эллиптического сечения с ребристым дискретным наполнителем в рамках модели оболочек и стержней С.П. Тимошенко [2].

При решении задач динамики теории конических оболочек, в основном исследовались оболочки кругового сечения. В частности, такие задачи рассмотрены в работах [6 – 8, 10, 17, 19]. Конические оболочки некругового сечения при динамических нагрузках рассматривались в работах [5, 18]. При этом использована неортогональная система координат [1, 4, 5, 11]. Варианты геометрически нелинейной теории тонких оболочек в неортогональной системе координат представлены в работах [1, 3, 9].

В данной работе рассматривается задача динамического поведения усеченной конической оболочки эллиптического сечения при воздействии на нее импульсной нагрузки. Приводятся уравнения колебаний конической оболочки в неортогональной системе координат. Для решения поставленной задачи построен численный алгоритм,

который основан на конечноразностной аппроксимации исходных уравнений по пространственным и временной координатам. Приведены числовые результаты для случая динамического поведения усеченной конической оболочки эллиптического сечения при распределенной импульсной нагрузке.

§1. Постановка задачи.

Рассматривается задача о нестационарном деформировании усеченной конической оболочки эллиптического сечения при распределенной внутренней импульсной нагрузке. Уравнения срединной поверхности оболочки в параметрическом виде задаются в виде

$$X = k_1 x^1 \cos x^2; \quad Y = x^1 \sin x^2; \quad Z = k_2 x^1, \quad (1.1)$$

где X, Y, Z – декартова система координат; x^1, x^2 – координаты на срединной поверхности оболочки; $k_1 = a/b$; $k_2 = c/b$. Схематично объект представлен на рис. 1, H – высота усеченного конуса.

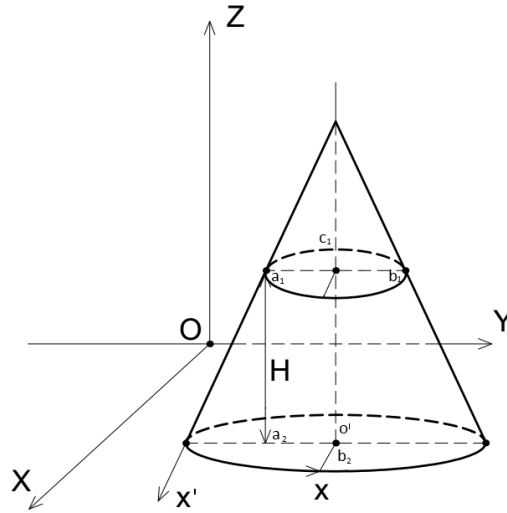


Рис. 1

Уравнения (1.1) определяют коэффициенты первой и второй квадратичной формы срединной поверхности рассматриваемой оболочки согласно формулам

$$a_{ij} = \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} + \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} + \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, 2);$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} - \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} - \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^i \partial x^j} + \right. \quad (1.2)$$

$$\left. + \left(\frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} - \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial x^j} \right].$$

При этом, согласно (1.1),

$$a_{11} = k_1^2 \cos^2 x^2 + \sin^2 x^2 + k_2^2; \quad a_{22} = (x^1)^2 (k_1^2 \sin^2 x^2 + \cos^2 x^2);$$

$$a_{12} = 0, 5x^1 (1 - k_1^2) \sin 2x^2; \quad b_{11} = 0; \quad b_{12} = 0; \quad b_{22} = k_1 k_2 (x^1)^2 / \sqrt{g},$$

где g – фундаментальный определитель метрического тензора, который определяется $g = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Для описания динамического поведения конических оболочек принимается линейный вариант уточненной теории тонких оболочек типа Тимошенко [2, 11]. Закон распределения перемещений по толщине оболочки принимается в виде

$$u_1^z = u_1(x^1, x^2, t) + z\varphi_1(x^1, x^2, t); \quad u_2^z = u_2(x^1, x^2, t) + z\varphi_2(x^1, x^2, t); \quad (1.3)$$

$$u_3^z = u_3(x^1, x^2, t); \quad u^{1z} = u^1(x^1, x^2, t) + z\varphi^1(x^1, x^2, t); \quad (1.4)$$

$$u^{2z} = u^2(x^1, x^2, t) + z\varphi^2(x^1, x^2, t).$$

В соотношениях (1.3), (1.4) величины с нижними индексами соответствуют ковариантным компонентам обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки $\bar{U}_1 = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$, а величины с верхними индексами – контрвариантным компонентам обобщенного вектора перемещений $\bar{U}^1 = (u^1, u^2, u^3, \varphi^1, \varphi^2)$ [11].

Для вывода уравнений колебаний конических оболочек используется вариационный принцип Гамильтона – Остроградского

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta \Pi + \delta A) dt = 0, \quad (1.5)$$

где Π – потенциальная энергия оболочки; K – кинетическая энергия оболочки; A – работа внешних сил.

Выражение для кинетической энергии K имеет вид

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \frac{\partial u^3}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} \right) d\Omega; \quad (1.6)$$

$$d\Omega = \sqrt{g} dx^1 dx^2.$$

Потенциальная энергия Π записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\sigma} (T^{11} \varepsilon_{11} + T^{22} \varepsilon_{22} + 2T^{12} \varepsilon_{12} + \quad (1.7)$$

$$+ 2T^{13} \varepsilon_{13} + 2T^{23} \varepsilon_{23} + M^{11} \kappa_{11} + M^{22} \kappa_{22} + 2M^{12} \kappa_{12}) d\Omega.$$

После стандартных преобразований в функционале (1.5) получим следующие уравнения колебаний исходной конической оболочки в общем виде

$$\rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_i T^{ij} - b_j^i T^{j3} + P^i \quad (i, j = 1, 2); \quad (1.8)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \nabla_i T^{i3} + b_{ij} T^{ij} + P_3; \quad \rho I \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2} = \nabla_i M^{ij} - T^{i3} + m^i.$$

В формулах (1.8) индексами 1, 2 обозначены переменные по координатам x^1, x^2 : $u^1, u^2, u_3, \varphi^1, \varphi^2$ – контрвариантные компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; T^{ij}, T^{i3}, M^{ij} – контрвариантные компоненты тензоров усилий и моментов; P^i, P_3, m^i – компоненты усилий на поверхности оболочки;

∇_i – контрвариантная производная; ρ – плотность материала оболочки; h – толщина оболочки; $I = h^3 / 12$.

В развернутом виде, согласно [5] уравнения колебаний (1.8) в дивергентной форме записываются

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \\ + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{1n} - b_2^1 T^{2n} + P^1 = \rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{22}) + \Gamma_{11}^2 T^{11} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} + \\ + \Gamma_{22}^2 T^{22} - b_1^2 T^{13} - b_2^2 T^{22} + P^2 = \rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{23}) + b_{11} T^{11} + b_{12} T^{12} + b_{21} T^{12} + b_{22} T^{22} + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{12}) + \Gamma_{11}^1 M^{11} + 2\Gamma_{21}^1 M^{12} + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{13} + m^1 = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{22}) + \Gamma_{11}^2 M^{11} + 2\Gamma_{12}^2 M^{12} + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{23} + m^2 = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial t^2}.$$

В соотношениях (1.9) величины Γ_{ij}^k представляют собой коэффициенты символов Кристоффеля второго рода

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{sj}}{\partial x^i} - \frac{\partial a^{ij}}{\partial x^s} \right) a^{sk},$$

определяемые метрикой срединной поверхности:

$$a_{ij} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^j}.$$

Контрвариантные составляющие тензоров тангенциальных усилий и изгибающих моментов могут быть выражены через деформации растяжения и изгиба зависимостями, следующими из закона состояния линейной теории упругости при условии равенства нулю нормальных к поверхности S напряжений ($\sigma_{33} = 0$):

$$T^{ij} = \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} a^{ij} a^{st} + \frac{E}{1+\nu} a^{is} a^{jt} \right) h \varepsilon_{st}; \quad M^{ij} = \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} a^{ij} a^{st} + \frac{E}{1+\nu} a^{is} a^{jt} \right) \frac{h^3}{12} \beta_{st}, \quad (1.10)$$

где E, ν – параметры упругости.

Вводя обозначения

$$c_{st}^{ij} = \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} a^{ij} a^{st} + \frac{E}{1+\nu} a^{is} a^{jt} \right) h; \quad D_{st}^{ij} = \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} a^{ij} a^{st} + \frac{E}{1+\nu} a^{is} a^{jt} \right) \frac{h^2}{12} \quad (1.11)$$

и учитывая равенства $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\beta_{12} = \beta_{21}$, запишем выражения (1.10) в развернутом виде

$$\begin{aligned}
T^{11} &= c_{11}^{11} \varepsilon_{11} + 2c_{12}^{11} \varepsilon_{12} + c_{22}^{11} \varepsilon_{22}; \quad T^{12} = T^{21} = c_{11}^{12} \varepsilon_{11} + (c_{12}^{12} + c_{21}^{12}) \varepsilon_{12} + c_{22}^{12} \varepsilon_{22}; \\
T^{22} &= c_{11}^{22} \varepsilon_{11} + 2c_{12}^{22} \varepsilon_{12} + c_{22}^{22} \varepsilon_{22}; \quad T^{13} = h(2B_{44} a^{11} \varepsilon_{13} + 2B_{45} a^{21} \varepsilon_{23}); \\
T^{23} &= h(2B_{45} a^{12} \varepsilon_{13} + 2B_{55} a^{22} \varepsilon_{23}); \quad M^{11} = D_{11}^{11} \beta_{11} + 2D_{12}^{11} \beta_{12} + D_{22}^{11} \beta_{22}; \quad (1.12)
\end{aligned}$$

$$M^{12} = M^{21} = D_{11}^{12} \beta_{11} + (D_{12}^{12} + D_{21}^{12}) \beta_{12} + D_{22}^{12} \beta_{22}; \quad M^{12} = D_{11}^{22} \beta_{11} + 2D_{12}^{22} \beta_{12} + D_{22}^{22} \beta_{22}.$$

Составляющие вектора перемещений через тензоры деформаций можно представить в виде

$$\begin{aligned}
e_{ik} &= \frac{1}{2} (\nabla_i u_k + \nabla_k u_i) - b_{ik} u_3; \quad \kappa_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i \varphi_k + \nabla_k \varphi_i - b_i^j e_{kj} - b_k^j e_{ij}); \\
\varepsilon_{i3} &= \varphi_i + \nabla_i u_3 - b_i^j u_j; \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2 - b_{11} u_3; \quad (1.13)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \Gamma_{21}^1 u_1 - \Gamma_{21}^2 u_2 - b_{12} u_3 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \Gamma_{12}^1 u_1 - \Gamma_{12}^2 u_2 - b_{12} u_3 \right);$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2 - b_{22} u_3; \quad \kappa_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i \varphi_k + \nabla_k \varphi_i);$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^1} - \Gamma_{11}^1 \varphi_1 - \Gamma_{11}^2 \varphi_2; \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} - \Gamma_{22}^1 \varphi_1 - \Gamma_{22}^2 \varphi_2;$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} - \Gamma_{21}^1 \varphi_1 - \Gamma_{21}^2 \varphi_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2} - \Gamma_{12}^1 \varphi_1 - \Gamma_{21}^2 \varphi_2 \right).$$

В формулах (1.13) величины $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ – компоненты ковариантного вектора перемещений срединной поверхности оболочки.

§ 2. Численный алгоритм решения задачи.

Для построения численного алгоритма используется интегро-интерполяционный подход построения конечно-разностных схем по пространственным координатам x^1, x^2 и явной разностной аппроксимации по временной координате t [2]. Рассматривается построение разностных уравнений на примере первого уравнения системы (1.9). Интегрируем первое уравнение системы (1.9) по области

$$\Omega_1 = \left\{ x_{i-1/2}^1 \leq x^1 \leq x_{i+1/2}^1, x_{m-1/2}^2 \leq x^2 \leq x_{m+1/2}^2 \right\} \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2};$$

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \right. \\
& \left. + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{13} - b_2^1 T^{23} + P^1 \right] d\Omega dt = \int \int \int_{\Omega_1} \left[\rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} \right] d\Omega dt; \\
& \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{22}) + \Gamma_{11}^2 T^{11} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} + \right. \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma_{22}^2 T^{22} - b_1^2 T^{13} - b_2^2 T^{22} + P^2 \Big] d\Omega dt = \int \int \int_{\Omega_1} \left[\rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} \right] d\Omega dt ; \\
& \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{23}) + b_{11} T^{11} + b_{12} T^{12} + \right. \\
& \quad \left. + b_{21} T^{12} + b_{22} T^{22} + P_3 \right] d\Omega dt = \int \int \int_{\Omega_1} \left[\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] d\Omega dt ; \\
& \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{12}) + \Gamma_{11}^1 M^{11} + 2\Gamma_{21}^1 M^{12} + \right. \\
& \quad \left. + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{13} + m^1 \right] d\Omega dt = \int \int \int_{\Omega_1} \left[\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial t^2} \right] d\Omega dt ; \\
& \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{22}) + \Gamma_{11}^2 M^{11} + 2\Gamma_{12}^2 M^{12} + \right. \\
& \quad \left. + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{23} + m^2 \right] d\Omega dt = \int \int \int_{\Omega_1} \left[\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial t^2} \right] d\Omega dt .
\end{aligned}$$

В этом случае разностный аналог (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g} T^{11})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{11})_{l-1/2,m}^n \right] + \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\sqrt{g} T^{12})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{12})_{l-1/2,m}^n \right] + \\
& + (\Gamma_{11}^1 T^{11})_{l,m}^n + 2(\Gamma_{21}^1 T^{12})_{l,m}^n + (\Gamma_{22}^1 T^{22})_{l,m}^n - \\
& - (b_1^1 T^{13})_{l,m}^n - (b_2^1 T^{23})_{l,m}^n + P_{l,m}^1 = \rho h (u_{l,m}^1)_{\bar{u}} ; \\
& \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g} T^{12})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{12})_{l-1/2,m}^n \right] + \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\sqrt{g} T^{22})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{22})_{l-1/2,m}^n \right] + \\
& + (\Gamma_{11}^2 T^{11})_{l,m}^n + 2(\Gamma_{21}^2 T^{12})_{l,m}^n + (\Gamma_{22}^2 T^{22})_{l,m}^n -
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(b_1^2 T^{13}\right)_{l,m}^n - \left(b_2^2 T^{22}\right)_{l,m}^n + P_{l,m}^2 = \rho h \left(u_{l,m}^2\right)_{\bar{u}} ; \\
& \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[\left(\sqrt{g} T^{13}\right)_{l+1/2,m}^n - \left(\sqrt{g} T^{13}\right)_{l-1/2,m}^n \right] + \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[\left(\sqrt{g} T^{23}\right)_{l+1/2,m}^n - \left(\sqrt{g} T^{23}\right)_{l-1/2,m}^n \right] + \\
& + \left(b_{11} T^{11}\right)_{l,m}^n + \left(b_{12} T^{12}\right)_{l,m}^n + \left(b_{21} T^{12}\right)_{l,m}^n + \left(b_{22} T^{22}\right)_{l,m}^n + \left(P_3\right)_{l,m}^n = \rho h \left(u_{3,l,m}\right)_{\bar{u}} ; \\
& \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[\left(\sqrt{g} M^{11}\right)_{l+1/2,m}^n - \left(\sqrt{g} M^{12}\right)_{l-1/2,m}^n \right] + \\
& + \left(\Gamma_{11}^1 M^{11}\right)_{l,m}^n + 2\left(\Gamma_{21}^1 M^{12}\right)_{l,m}^n + \left(\Gamma_{22}^2 M^{22}\right)_{l,m}^n - \left(T^{13}\right)_{l,m}^n + \left(m^1\right)_{l,m}^n = \rho \frac{h^3}{12} \left(\varphi_{l,m}^1\right)_{\bar{u}} ; \\
& \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[\left(\sqrt{g} M^{12}\right)_{l+1/2,m}^n - \left(\sqrt{g} M^{22}\right)_{l-1/2,m}^n \right] + \\
& + \left(\Gamma_{11}^2 M^{11}\right)_{l,m}^n + 2\left(\Gamma_{12}^2 M^{12}\right)_{l,m}^n + \left(\Gamma_{22}^2 M^{22}\right)_{l,m}^n - \left(T^{23}\right)_{l,m}^n + \left(m^2\right)_{l,m}^n = \rho \frac{h^3}{12} \left(\varphi_{l,m}^2\right)_{\bar{u}} .
\end{aligned}$$

§3. Анализ численных результатов.

Как численный пример, рассматривается задача динамического поведения усеченной конической оболочки эллиптического сечения при действии распределенной импульсной нагрузки $P_3(t)$. Предполагалось, что нижний и верхний края оболочки жестко защемлены, т.е. выполняются условия $u^1 = u^2 = u_3 = \varphi^1 = \varphi^2 = 0$.

Начальные условия при $t = 0$ полагались нулевыми

$$u^1 = u^2 = u_3 = \varphi^1 = \varphi^2 = 0 ; \quad \frac{\partial u^1}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = 0 .$$

Распределенная импульсная нагрузка $P_3(t)$ задавалась в виде

$$P_3(t) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi t}{T}, & \text{при } t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T, \end{cases}$$

где A – амплитуда нагрузки; T – длительность нагрузки. Расчеты проводились при $A = 10^6$ Па, $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

При расчетах полагалось $k_1 = a_1 / b_1 = 1, 2$; $k_2 = c_1 / b_1 = 1, 6$. Результаты расчетов задачи получены в контрвариантных величинах. В частности, на рис. 2 и рис. 3 представлены зависимости величин прогиба u_3 в сечениях $x^2 = 0$ и $x^2 = \pi / 2$ в определенные моменты времени. Рис. 2 соответствует зависимостям величин u_3 при $t = 3,5T$, рис. 3 – $t = 6T$.

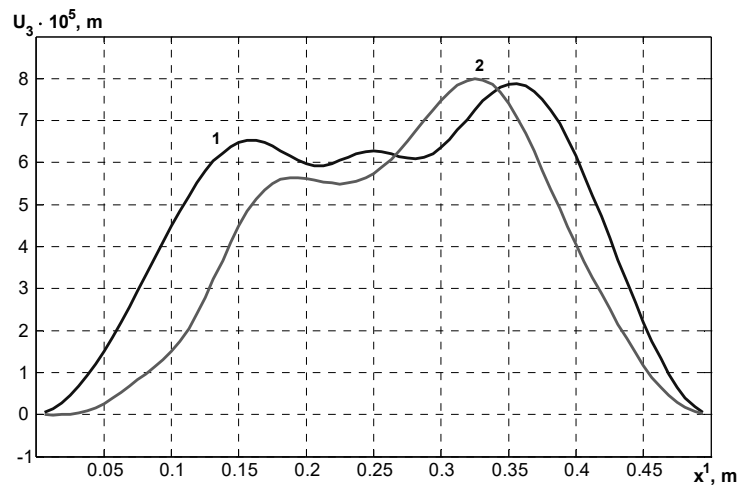


Рис. 2

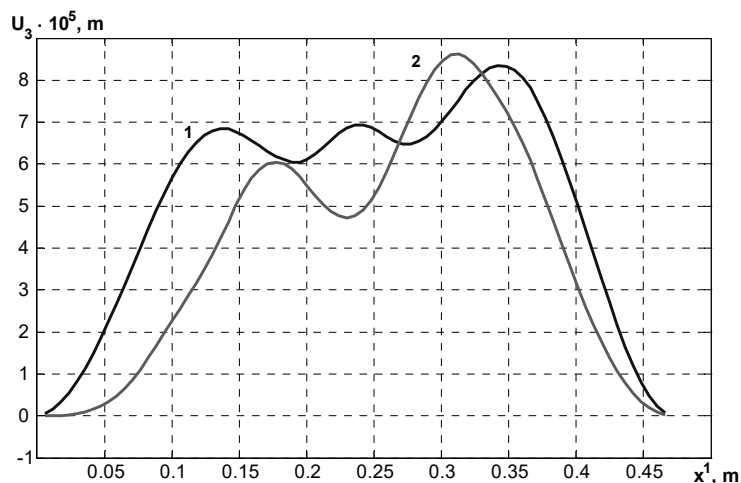


Рис. 3

Заключение.

Рассмотрена задача динамического поведения усеченной конической оболочки эллиптического сечения при воздействии на нее распределенной импульсной нагрузки. Приведены уравнения колебаний конической оболочки в неортогональной системе координат. Для решения поставленной задачи построен численный алгоритм, основанный на конечноразностной аппроксимации исходных уравнений по пространственным и временной координатам. Приведены числовые результаты для случая динамического поведения усеченной конической оболочки эллиптического сечения при распределенной импульсной нагрузке.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про динамічну поведінку зрізаної конічної оболонки еліптичного перетину під дією на неї розподіленого імпульсного навантаження. Отримано рівняння коливань конічної оболонки в неортогональній системі координат. Для розв'язування поставленої задачі побудовано чисельний алгоритм, оснований на скінченнорізницевій апроксимації висхідних рівнянь за просторовими і часовою координатами. Наведено числові результати для випадку динамічної поведінки зрізаної конічної оболонки еліптичного перетину при розподіленому імпульсному навантаженні.

1. Галимов К.З., Артюхин Ю.П., Карасев С.Н. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З. Галимова. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. – 212 с.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. Гуляев В.Н., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища школа, 1982. – 255 с.
4. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями в механике. – К.: Наук. думка, 1972. – 148 с.
5. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Белов С.Д. Динаміка конічних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях // Доп. НАН України. – 2018. – № 1. – С. 29 – 33.
6. Aksogan O., Sofiyev A.H. The dynamic stability of a laminated truncated conical shell with variably elasticity module and densities subject to a time – dependent external pressure // J. Strain Anal. Eng. Design. – 2002. – **37**, N 3. – P. 201 – 210.
7. Dey S., Karmakar A. Effect of location of delamination on free vibration of cross – ply conical shells // J. Shock and Vibration. – 2012. – **19**. – P. 679 – 692.
8. Dey S., Karmakar A. Free vibration characteristics of multiple delaminated cross – ply composite conical shells // Int. J. for Comp. Methods in Eng. Science and Mechanics. – 2013. – **14**. – P. 168 – 174.
9. Glockner P.G., Shrivastava J.P. Physical Strains in Nonlinear Thin Shell Theory // J. Eng. Mechanics Division. – 1969. – **95**, N 6. – P. 1331 – 1344.
10. Kayran A., Vinson J.R. Free vibration analysis of laminated composite truncated circular conical shells // AIAA J. – 1990. – **28**, N 7. – P. 1259 – 1269.
11. Krivoshapko S.N., Gbaduidi – Aisse G.L. Geometry, Static, Vibration and Bucking Analysis and Applications to Thin Elliptical Paraboloid Shells // The Open Construction and Building Technology J. – 2016. – N 10. – P. 576 – 602.
12. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopaedia of Analytical Surfaces. – Berlin: Springer, 2015. – 751 p.
13. Meish V.F., Maiborodina N.V. Stress State of Discretely Stiffened Ellipsoidal Shells under a Nonstationary Normal Load // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 6. – P. 675 – 686.
14. Meish V.F., Meish Yu.A., Arnaut N.V. Numerical Analysis of Nonstationary Vibrations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Different Geometry // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 426 – 433.
15. Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk A.V. Dynamics of a Three – Layer Elliptic Cylindrical Shells Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 172 – 179.
16. Sivadas K.R., Ganesan N.V. Vibration analysis of thick composite clamped conical shells of varying thickness // J. Sound and Vibration. – 1992. – **152**. – P. 27 – 37.
17. Sofiyev A.H., Aksogan O. The dynamic stability of a nonhomogeneous orthotropic elastic truncated conical shell under a time – dependent external pressure // Struct. Eng. Mech. – 2002. – **13**, N 3. – P. 329 – 343.
18. Soldatos K.P., Massalas C.V., Frivanidis G.J. Dynamic analysis of thin elastic noncircular conical shells // Acta Mechanica. – 1983. – **46**, N 1 – 4. – P. 207 – 232.
19. Xu C.S., Xian Z.Q., Chia C.Y. Non-linear theory and vibration analysis of laminated truncated thick conical shells // Int. J. of Non-linear Mech. – 1996. – **31**, N 2. – P. 139 – 154.

Поступила 28.12.2019

Утверждена в печать 03.03.2020