

Е. И. Беспалова, Н. П. Борейко

О КОЛЕБАНИЯХ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ
ПРИ ДОКРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

Abstract. An effect of the different static axisymmetric loadings in the range of the subcritical deformations on the natural frequencies of elastic systems composed of shells of revolution with various geometry is analyzed. Some features of the low-frequency section of the spectrum of vibrations of the compound system are illustrated as compared with the corresponding frequencies of some zero-curvature shells.

Key words: compound shell of revolution, axisymmetric loads, subcritical state, vibrations.

Введение.

Эта статья является продолжением и развитием работ [1, 4] по исследованию колебаний составных систем из тонких (гибких) оболочек вращения разной формы и структуры в случае, когда они находятся в поле осесимметричных статических воздействий. Такие воздействия (температурные поля, силовые нагрузки, радиационное излучение, агрессивные среды и т.д.) во многих ситуациях являются естественными условиями работы современных конструкций – аппаратов подводного погружения, объектов космической техники, емкостей различного назначения и пр. Наличие статических полей в зависимости от их характера и интенсивности может существенно влиять на спектр собственных частот оболочечных объектов, так что учет этих воздействий является весьма важным при анализе динамических характеристик упругих конструкций. Кроме того, исследование колебаний деформируемых систем с учетом предварительного напряженно-деформированного состояния, вызванного статическими полями, является основой динамического критерия устойчивости, когда обращение в ноль минимальной собственной частоты соответствует критическим значениям действующих нагрузок.

В научной литературе этой области механики деформируемых тел наличие статических нагрузок при исследовании колебаний учитывалось и учитывается преимущественно для отдельных оболочек простых геометрических форм – пластин, цилиндров, конусов, сферических сегментов и пр.

Так, предварительное нагружение в виде сдвиговых усилий и двухосного напряженного состояния учтено при колебаниях ортотропных пластин из нано- и пьезоматериалов, при наличии вязкоупругого основания Пастернака и при различных граничных условиях в [3, 10, 14].

Статические осесимметричные поля, вызванные внешним или внутренним гидродинамическим давлением, центробежными и кориолисовыми силами рассматриваются при исследовании динамических характеристик цилиндрических оболочек из ортотропных и функционально-градиентных материалов в зависимости от геометрических параметров оболочек, особенностей взаимодействия с жидкостью, скорости вращения и т.п. [18, 19, 21].

Практически те же воздействия рассматриваются при анализе частотных характеристик конических оболочек. Так, в частности, рассмотрены оболочки с существенной кусочной неоднородностью по толщине, уточнены выражения для центробежных сил и сил Кориолиса, проведен анализ влияния скорости вращения на собственные частоты усеченного конуса при разных углах конусности и физико-механических свойствах композитного материала [11, 12, 17].

В работе [15] рассмотрены колебания больших кровельных покрытий в виде незамкнутых цилиндрических оболочек и оболочек двойкой кривизны, находящихся в поле сейсмических воздействий, учтены вертикальная и горизонтальная составляющие нагрузок, подчеркнута важность учета предварительного напряженного состояния для достоверных оценок реакции оболочек-крыш в условиях землетрясений.

Учету предварительного напряженного состояния при вынужденных колебаниях многослойной плиты-полосы с упругими слоями посвящена статья [9], а нелинейные колебания прямоугольной ортотропной мембраны при предварительном двухосном растяжении рассмотрены в [13].

Исследованию свободных колебаний оболочек без учета предварительного нагружения посвящено большое количество работ, где рассмотрены как отдельные оболочки сложной геометрической формы, например, [8, 20], так и составные системы из оболочек вращения, например, [4, 6, 16]. Вместе с тем для составных оболочек практически отсутствуют работы по оценке влияния предварительного напряженно-деформированного состояния (НДС) на их собственные частоты. В близкой по предмету исследования статье [5] основное внимание уделено не столько составным системам, сколько оболочкам с существенной неоднородностью по толщине и выбору адекватной модели их деформирования.

Следует отметить, что современные численные подходы к решению стационарных задач механики рассматриваемого класса объектов при учете их специфики, как систем из соосных сопряженных оболочек вращения, достигли высокой степени завершенности в работах школы академика Я.М.Григоренко. Решены задачи стационарной динамики для оболочек различных геометрических форм, структур по толщине, используемым традиционным и композитным материалам, применяемым моделям деформирования и пр. Общая методология этих подходов распространена и на исследование колебаний составных упругих систем при наличии докритических воздействий [2].

В данной работе исследуются колебания составных систем из тонких (гибких) оболочек вращения разной геометрии, находящихся в поле статических осесимметричных воздействий. Основное внимание уделено анализу влияния докритических нагрузок разного вида на низкочастотный участок спектра колебаний составных оболочечных систем.

1. Постановка задачи и общая характеристика методики ее решения.

Объектом исследования, как и во многих работах авторов [1, 4, 7], выбрана упругая система сопряженных соосных оболочек вращения, поверхность отсчета которой по толщине отнесена к ортогональной криволинейной системе координат α, θ (α – координата, изменяющаяся по меридиану – образующей системы, при этом отдельная j -ая ее оболочка может быть описана в локальной системе координат $\alpha_j \in [\alpha_{0j}, \alpha_{1j}]$; θ – центральный угол в плоскости поперечного сечения $z = \text{const}$; $0z$ – ось вращения образующей; $j = \overline{1, J}$, J – число составляющих оболочек, см., например, рис. 1). На граничных контурах оболочечной системы принимаются любые физически непротиворечивые условия, а в местах сопряжения ее соседних элементов – условия равновесия статических и равенство кинематических характеристик НДС в общей системе координат.

Такая оболочечная конструкция находится в поле статических осесимметричных нагрузок разного вида: распределенное давление (внутреннее, наружное), усилия-моменты, сосредоточенные на граничных контурах или в некоторых сечениях

$z = \text{const}$, температурный нагрев и пр. Эти воздействия вызывают в оболочках некоторое исходное состояние, которое определяется жесткостными и геометрическими параметрами составной системы, характером действующего осесимметричного нагружения и которое в дальнейшем будем рассматривать в докритической стадии деформирования. Относительно данного исходного состояния в работе исследуются колебания оболочек, как движение, вызванное его малым возмущением. Принимается, что при всех видах и величинах докритического напряженного состояния, материал составляющих оболочек является ортотропным (изотропным), линейно упругим и подчиняющимся обобщенному закону Гука.

Динамическая задача в целом формулируется на основе геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении в рамках классической модели Кирхгоффа – Лява. Привлечение нелинейной постановки связано с тем, что реакция системы на предварительное статическое воздействие и последующее возмущение не подчиняется принципу суперпозиции.

Техника построения разрешающих уравнений динамической задачи о малых незатухающих колебаниях предварительно нагруженных составных оболочек вращения полностью соответствует работе [2]. В общем случае постановка этой задачи может быть представлена в следующем матрично-векторном виде:

система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных –

$$\frac{\partial \bar{N}}{A \partial \alpha} = L \bar{N} + \bar{G} + \bar{q}^0 + C \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2}; \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \quad (j = \overline{1, J}), \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (1)$$

условия сопряжения на линиях контакта –

$$S_{1j} \bar{N} = S_{0j+1} \bar{N} + \bar{F}_j^0, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (2)$$

граничные условия на торцах системы –

$$B_{01} \bar{N} = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (3)$$

$$B_{1J} \bar{N} = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J}; \quad (4)$$

условия периодичности в окружном направлении –

$$\bar{N}(\alpha, \theta + 2\pi, t) = \bar{N}(\alpha, \theta, t). \quad (5)$$

Здесь $\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\}$ ($n = \overline{1, 8}$) – искомая вектор-функция, компонентами которой являются такие статические и кинематические характеристики НДС:

$$\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \{N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha, u, v, w, \vartheta_\alpha\};$$

$L = \sum_{s=0}^4 R_s \frac{\partial^s \bar{N}}{\partial \theta^s}$ – матричный дифференциальный оператор четвертого порядка по переменной θ , построенный по основным соотношениям принятой модели деформирования;

A – коэффициент Ляме по координате α , компонентами вектора $\bar{G} = \{g_n(\alpha)\}$

являются квадратичные функции компонент вектора \bar{N} , соответствующие геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении; C – матрица, характеризующая инерционные свойства системы; $S_{1j} = \{s_{ni}^{1j}\}$, $S_{0j+1} = \{s_{ni}^{0j+1}\}$ – матрицы,

формулирующие условия сопряжения в сечении $\alpha = \alpha_j$ ($j = \overline{1, J-1}$); $B_{01} = \{b_{ni}^{01}\}$,

$B_{1J} = \{b_{ni}^{1J}\}$ – матрицы задания граничных условий на контурах $\alpha = \alpha_{01}$ и $\alpha = \alpha_{1J}$,

соответственно; $\bar{q}^0 = \{q_n^0\}$, $\bar{F}_j^0 = \{f_{nj}^0\}$ и $\bar{b}_{01}^0 = \{b_{01n}^0\}$, $\bar{b}_{1J}^0 = \{b_{1Jn}^0\}$ – векторы, характери-

зующие осесимметричные распределенные нагрузки и температурные поля, сосредоточенные усилия-моменты в сечении $\alpha = \alpha_j$, ($j = \overline{1, J-1}$) и контурные воздействия при $\alpha = \alpha_{01}$, $\alpha = \alpha_{1J}$; t – время (обозначения для компонент вектор-функции \bar{N} общеприняты, выражения для элементов матриц $R_s = \{r_{ni}^s(\alpha)\}$ и компонент вектора $\bar{G} = \{g_n(\alpha)\}$ приведены в [2]).

Изложим общую схему методики решения нелинейной задачи (1) – (5).

В силу предположения о малости амплитуд колебаний оболочек здесь используется приближенная декомпозиция общей задачи на две более частные при допущении, что искомое состояние оболочки (\bar{N}) аддитивно относительно основного докритического (\bar{N}^0) и колебательного динамического (\bar{N}^d) состояний $\bar{N} \approx \bar{N}^0 + \bar{N}^d$, $\bar{N}^d \ll \bar{N}^0$.

Соответственно, и задачу (1) – (5) можно приближенно свести к двум таким задачам:

– задача о докритическом состоянии составных оболочек при заданных осесимметричных нагрузках, которая является одномерной нелинейной краевой задачей и формулируется относительно вектор-функции $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$

$$\frac{d\bar{N}^0}{Ad\alpha} = L^0 \bar{N}^0 + \bar{G}(\alpha, \bar{N}^0, \dots) + \bar{q}^0, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \quad (j = \overline{1, J}); \quad (6)$$

$$S_{1j} \bar{N}^0 = S_{0j+1} \bar{N}^0 + \bar{F}_j^0, \quad \alpha = \alpha_j \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (7)$$

$$B_{01} \bar{N}^0 = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (8)$$

$$B_{1J} \bar{N}^0 = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (9)$$

(L^0 – матричный дифференциальный оператор нулевого порядка);

– задача о малых незатухающих колебаниях оболочек относительно исходного докритического состояния, которая получается в результате линеаризации исходной задачи (1) – (5) относительно вектор-функции $\bar{N}^d = \{N_n^d(\alpha, \theta, t)\}$:

$$\frac{\partial \bar{N}^d}{A \partial \alpha} = \tilde{L} \bar{N}^d + C \frac{\partial^2 \bar{N}^d}{\partial t^2}, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \quad (j = \overline{1, J}), \theta \in [0, 2\pi]; \quad (10)$$

$$S_{1j} \bar{N}^d = S_{0j+1} \bar{N}^d, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (11)$$

$$B_{01} \bar{N}^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (12)$$

$$B_{1J} \bar{N}^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}; \quad (13)$$

$$\bar{N}^d(\alpha, \theta + 2\pi, t) = \bar{N}^d(\alpha, \theta, t) \quad (14)$$

(здесь $\tilde{L} = L + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{N}^0}$ – дифференциальный матричный оператор, содержащий в качестве параметрических членов компоненты вектор-функции докритического напряженно-деформированного состояния $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$).

Для решения одномерной нелинейной краевой задачи (6) – (9) используется процедура линеаризации в форме Ньютона – Канторовича – Рафсона (метод квазилинеаризации) в сочетании с методом ортогональной прогонки, алгоритм которой изложен в [1, 2].

Двумерная краевая задачи (10) – (14) о малых гармонических колебаниях оболочечных систем после отделения временного множителя $e^{i\omega t}$ в компонентах искомого решения \bar{N}^d и представления их в виде следующих тригонометрических рядов по окружной координате θ

$$\bar{N}^d = \left\{ N_n^d(\alpha, \theta, t) = \sum_{k=0,1,2,\dots} N_{nk}^d(\alpha) \right\} \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \quad n = \overline{1, 8}, \quad (15)$$

сводится к последовательности однопараметрических однородных краевых задач относительно функциональных коэффициентов $\bar{N}_k^d = \{N_{nk}^d(\alpha)\}$ в (15)

$$\frac{d\bar{N}_k^d}{d\alpha} = (A_k - \lambda C)\bar{N}_k^d, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \quad (j = \overline{1, J}); \quad (16)$$

$$S_{1j}\bar{N}_k^d = S_{0j+1}\bar{N}_k^d, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (17)$$

$$B_{01}\bar{N}_k^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (18)$$

$$B_{1J}\bar{N}_k^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}. \quad (19)$$

Здесь A_k – квадратная матрица 8-го порядка, полученная по оператору \tilde{L} в (10) согласно представлению (15); $\lambda = \omega^2$; ω – собственная частота колебаний оболочечной системы; k – параметр, характеризующий форму волнообразования в окружном направлении, выражения в квадратных скобках означают, что компоненты $\{\hat{S}_\alpha, \nu\}$ вектор-функции \bar{N}^d представлены по $\sin k\theta$, остальные – по $\cos k\theta$.

Для определения неизвестного числового множителя $\lambda = \omega^2$, при котором однородная краевая задача (16) – (19) имеет нетривиальное решение, для каждого значения гармоники k в (15) используются известные методы: метод последовательных приближений в варианте обратной итерации и метод пошагового поиска [2, 4].

Многочисленные примеры тестирования применяемых методов подтвердили высокую точность получаемых результатов в данном классе задач [1, 2, 4, 6].

2. Анализ колебаний составных оболочек в поле докритических нагрузок.

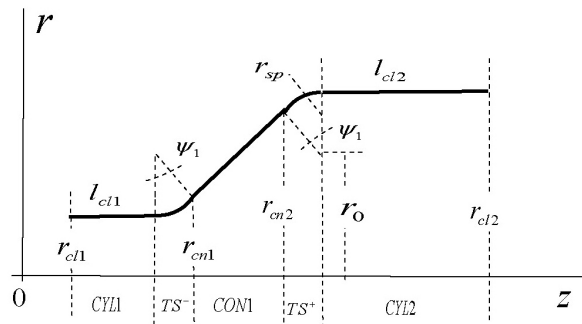
Рассматривается оболочечная система из двух цилиндров с радиусами r_{cl1} , r_{cl2} , длинами l_{cl1} , l_{cl2} (CYL1, CYL2) и переходным соединительным элементом разной формы. В качестве соединительного элемента здесь представлены следующие его варианты (рис. 1):

I – две торосферические оболочки разной кривизны с одинаковыми радиусами r_{sp} , центральными углами ψ_1 и расстояниями до оси вращения r_0 (TS⁻, TS⁺), соединенные коническим участком с радиусами r_{cn1} , r_{cn2} и длиной l_{cn1} (CON1) (рис. 1, а);

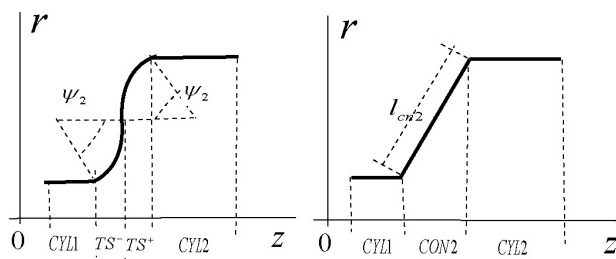
II – те же две торосферические оболочки с центральными углами ψ_2 (рис. 1, б);

III – коническая оболочка с начальным и конечным радиусами r_{cl1} , r_{cl2} и длиной l_{cn2} (рис. 1, в).

Приведенные случаи охватывают оболочечные системы, состоящие из разного числа n составляющих оболочек: пяти ($n = 5, I$: CYL1–TS⁻–CON1–TS⁺–CYL2), четырех ($n = 4, II$: CYL1–TS⁻–TS⁺–CYL2) и трех ($n = 3, III$: CYL1–CON2–CYL2).



а



б

в

Рис. 1

Все оболочки имеют постоянную толщину h и выполнены из изотропного материала майлара с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона μ и плотностью ρ . Принимается, что левый контур системы жестко зашлемлен, правый – шарнирно оперт или подвергается действию контурных усилий-моментов.

Рассмотренные оболочечные системы находятся в поле следующих осесимметричных нагрузок:

а) равномерное нормальное давление интенсивности q_0 ($q(s) = q_0$, $q_0 < 0$ – внешнее, $q_0 > 0$ – внутреннее);

б) контурное осевое усилие $N_z = N_z^*$ ($N_z^* < 0$ – сжимающее, $N_z^* > 0$ – растягивающее);

в) – контурный изгибающий момент разных знаков $M_s = M_s^*$ ($M_s^* > 0$ – против часовой стрелки, изгибание вовнутрь, $M_s^* < 0$ – по часовой стрелке, изгибание наружу).

Расчеты НДС и колебаний приводятся для следующих значений исходных данных (система СИ):

$$l_{cl1} = 0,2 \text{ м}; \quad l_{cl2} = 0,3 \text{ м}; \quad l_{cn2} = 0,5657 \text{ м}; \quad \psi_1 = \pi / 4; \quad \psi_2 = \pi / 2; \quad r_{sp} = 0,2 \text{ м};$$

$$r_{cl1} = 0,2 \text{ м}; \quad r_{cn1} = 0,2586 \text{ м}; \quad r_{cn2} = 0,5414 \text{ м}; \quad r_{cl2} = 0,6 \text{ м}; \quad h = 0,003 \text{ м};$$

$$E = 5,0285 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad \mu = 0,33; \quad \rho = \rho_0.$$

Картина НДС представлена на рис. 2 – 4 для следующих расчетных вариантов: при сжимающем осевом усилии $N_z^* < 0$ для отдельной конической оболочки (рис. 2) и составной системы CYL1–CON2–CYL2 (рис. 3), а также при равномерно распределенном внешнем давлении $q_0 < 0$ для оболочечной системы CYL1–TS–CON1–TS+–CYL2 (рис. 4). Результаты представлены в виде распределения по образующей оболоч-

чек нормального прогиба w и меридиональных и окружных напряжений σ_s^+ , σ_θ^+ для нагрузок в области их докритических значений. Причем для прогиба представлены соответствующие расчеты в линейной (тонкая линия) и нелинейной (толстая линия) постановках.

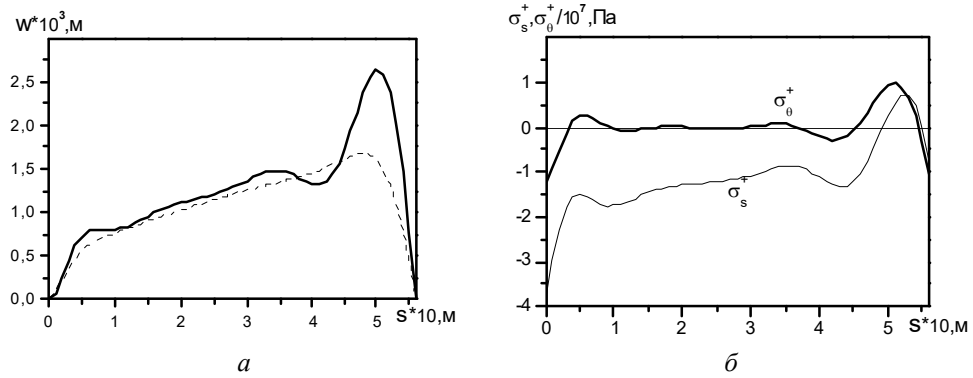


Рис. 2

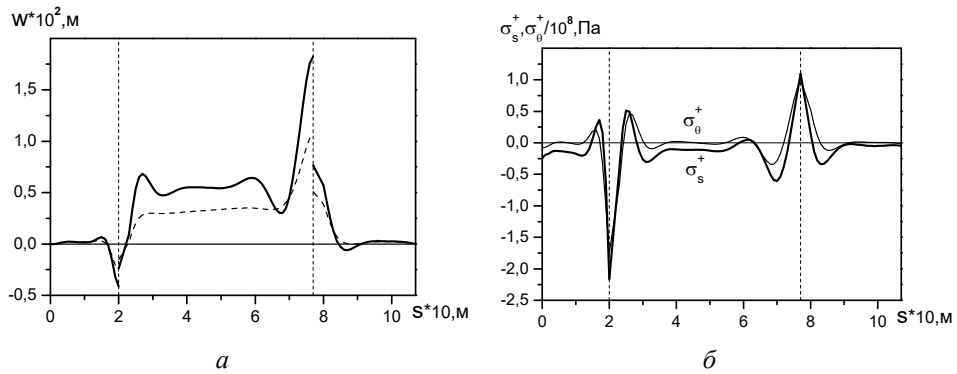


Рис. 3

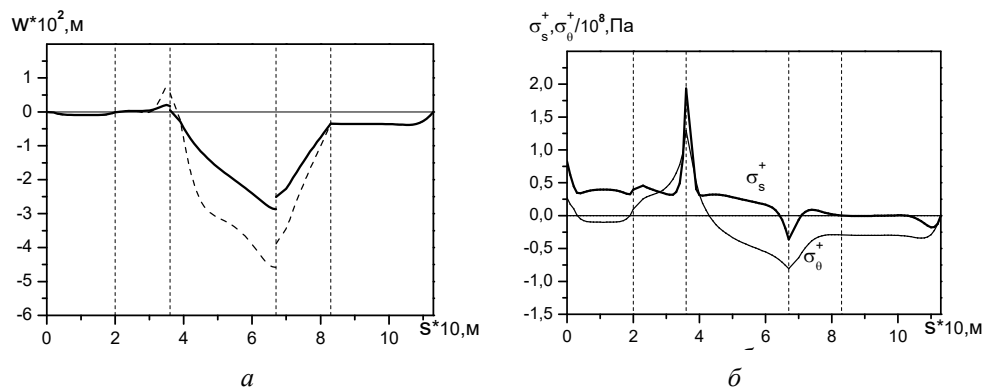


Рис. 4

Как видно из рисунков, для отдельной конической оболочки (рис. 2) функции распределения прогиба и напряжений имеют некоторые всплески только в окрестности ее торцов, обусловленные влиянием граничных условий. Для составных оболочек как нулевой гауссовой кривизны (CYL1–CON2–CYL2), так и систем, содержащих элементы с гауссовыми кривизнами разных знаков (CYL1–TS–CON1–TS+–CYL2), наблюдается качественно иная картина. Здесь имеет место сложное распределение прогибов и напряжений вплоть до их локализации в стыках соседних элементов оболочки.

Таким образом, напряженно-деформированное состояние составных систем разного вида при рассмотренных нагрузках характеризуется существенно неравномерным характером распределения по меридиану – образующей.

Колебания приведенных оболочечных систем будем анализировать по условной зависимости $f = f(k)$, которая характеризует изменение минимальной собственной частоты ω от формы волнообразования k в окружном направлении и является традиционной для оболочек вращения ($f = [1/(2\pi)]\omega\sqrt{\rho_0}$). Эта зависимость рассматривается как при отсутствии нагружения, так и для действующих нагрузок разных знаков. На рис. 5, а на примере отдельной оболочки нулевой гауссовой кривизны в виде усеченного конуса представлен классический случай соотношения между зависимостями $f = f(k)$ при действии внешнего ($q_0 < 0$) и внутреннего ($q_0 > 0$) нормального давления. Здесь все частоты рассмотренного диапазона $k \in [0; 20]$ лежат либо выше частот ненагруженной ($q_0 = 0$) оболочки ($q_0 > 0$, внутреннее давление), либо ниже их ($q_0 < 0$, наружное давление).

Эта закономерность нарушается для составных оболочек при разных видах нагружения, что иллюстрируется графиками рис. 5 – 7. Здесь приведены зависимости $f = f(k)$ при наличии нормального равномерно распределенного давления ($q_0 > 0$, $q_0 < 0$) для системы $n = 4, II$: CYL1–TS[–]–TS⁺–CYL2 (рис. 5, б) и системы $n = 5, I$: CYL1–TS[–]–CON1–TS⁺–CYL2 (рис. 6, б), при действии осевых контурных усилий ($N_z < 0$, $N_z > 0$) для системы $n = 5, I$: CYL1–TS[–]–CON1–TS⁺–CYL2 (рис. 6, а) и системы $n = 3, III$: CYL1–CON2–CYL2 (рис. 7, а), а также при действии изгибающего контурного момента ($M_s > 0$, $M_s < 0$) для системы $n = 3, III$: CYL1–CON2–CYL2 (рис. 7, б). На всех рисунках приводится зависимость $f = f(k)$ при отсутствии каких-либо нагрузок.

Из рисунков видно, что при нагрузках одного и того же знака значения одних частот могут быть выше, другие ниже, или практически не меняться в сравнении с частотами ненагруженной оболочки. Так, например, для системы $n = 5, I$ (CYL1–TS[–]–CON1–TS⁺–CYL2) при растягивающем осевом усилии ($N_z > 0$) (рис. 6, а) для $k \in [0; 8]$ частоты выше, а в остальном диапазоне – ниже, чем при отсутствии нагрузки; при сжимающем усилии ($N_z < 0$) для $k \geq 12$ частоты практически совпадают с частотами ненагруженной системы (рис. 6, а), а при действии контурного изгибающего момента M_s для системы $n = 3, III$: CYL1–CON2–CYL2 (рис. 7, б) наблюдается участок частот $k \in [4; 10]$, значения которых не зависят от знака воздействия.

Анализ зависимостей $f = f(k)$ в низшем диапазоне частотного спектра позволяет прогнозировать возможность потери устойчивости составных оболочек при заданных докритических воздействиях в соответствии с сутью динамического критерия устойчивости.

Так, осесимметричную форму потери устойчивости типа «хлопок» можно предсказать для системы $n = 4, II$ и системы $n = 5, I$ при внутреннем давлении $q_0 > 0$ (рис. 5, б и 6, б).

Бифуркационная форма потери устойчивости может иметь место в таких случаях: 1) для системы $n = 5, I$ при сжимающем $N_z < 0$ (число выпучин-вмятин $k = 6$) и растягивающем $N_z > 0$ (число выпучин-вмятин $k = 15$) осевых усилиях (рис. 6, а), а также при наружном нормальном давлении $q_0 < 0$ (число выпучин-вмятин $k = 13$) (рис. 6, б);

2) для системы $n = 4, II$ при наружном давлении $q_0 < 0$ (число выпучин-вмятин $k = 13$) (рис. 5, б);

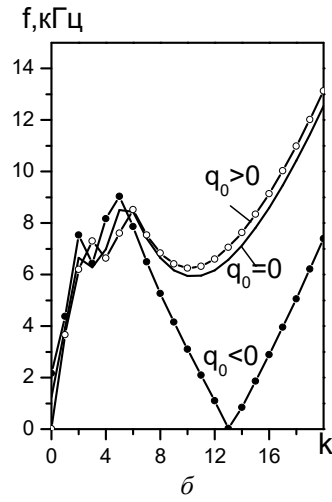
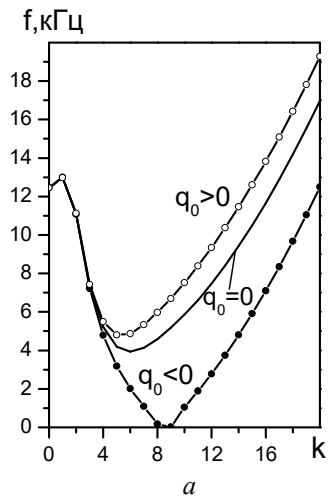


Рис 5

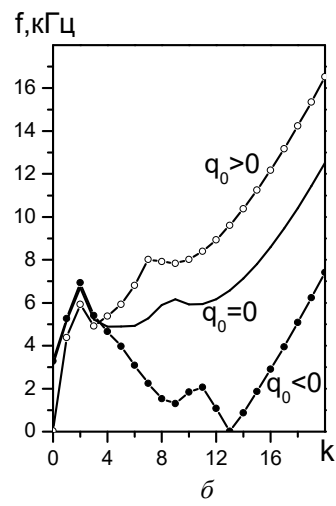
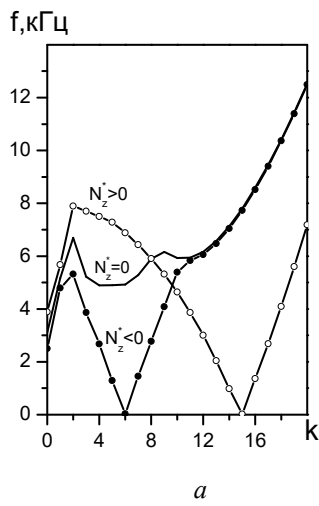


Рис 6

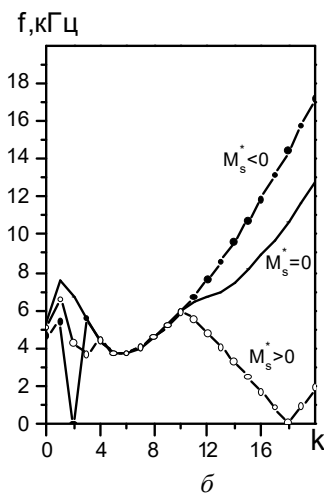
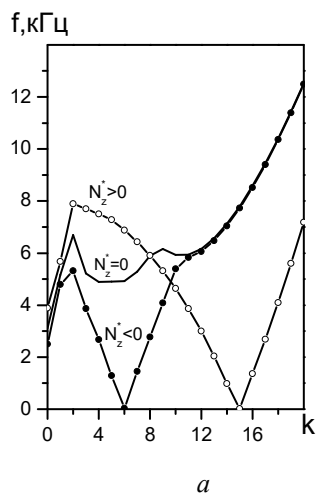


Рис 7

3) для системы $n = 3, III$ при сжимающем $N_z < 0$ (число выпучин-вмятин $k = 9$) и растягивающем $N_z > 0$ (число выпучин-вмятин $k = 17$) осевых усилиях (рис. 7, а); а также при контурных изгибающих моментах $M_s > 0$ (число выпучин-вмятин $k = 2$) и $M_s < 0$ (число выпучин-вмятин при $k = 18$) (рис. 7, б);

4) для отдельной конической оболочки только при наружном давлении $q_0 < 0$ (число выпучин-вмятин $k = 9$) (рис. 5, а).

Проведенное исследование проиллюстрировало сложную картину НДС в составной системе при осесимметричных докритических нагрузках и возможность локализации напряжений в местах сопряжения оболочек. Учет этого предварительного состояния при анализе колебаний данной системы качественно изменил спектр собственных частот в ее низкочастотном участке.

Заключение.

Проведен анализ НДС упругих систем из тонких (гибких) оболочек вращения сложной геометрии, находящихся в поле статических осесимметричных полей разного вида. Исследовано влияние этих полей в докритической стадии деформирования на собственные частоты низшего участка спектра колебаний составных оболочек с элементами разной гауссовой кривизны.

Показано:

Для составных систем с элементами разной формы заданные статические воздействия неоднозначно влияют на частоты рассматриваемого диапазона, т.е. значения одних частот могут повышаться, других – понижаться (напр., при растягивающем осевом усилии $N_z > 0$) или практически не меняться (напр., при сжимающем усилии $N_z < 0$). Эта особенность составных систем (а также оболочек ненулевой кривизны) отличает их от случая отдельных оболочек нулевой гауссовой кривизны, когда наличие предварительного нагружения либо повышает все рассматриваемые частоты (внутреннее давление, растягивающее усилие), либо все их понижает (наружное давление, сжимающее усилие).

Выявлен диапазон собственных частот системы ($k \in [4; 8]$), значения которых практически не зависят от заданного воздействия (здесь, в частности от контурного изгибающего момента).

Характер зависимости $f = f(k)$ ($f = [1/(2\pi)]\omega\sqrt{\rho_0}$) позволяет предсказать возможность потери устойчивости системы по осесимметричной форме типа «хлопка» ($f \sim 0$ при $k = 0$) или бифуркационную потерю устойчивости с образованием «выпучин-вмятин» в окружном направлении ($f \sim 0$ при $k \neq 0$, $f(k) \ll f(k-1)$ и $f(k) \ll f(k+1)$).

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ: Проаналізовано вплив різного виду статичних осесиметричних навантажень в докритичній стадії деформування на власні частоти пружних систем з оболонок обертання різної геометрії. Деякі особливості низькочастотної ділянки спектру коливань складених систем проілюстровані в порівнянні з відповідними частотами окремих оболонок нульової кривизни.

1. Беспалова О.И., Яремченко Н.П. Визначення напружено-деформованого стану спряжених гнучких оболонок обертання при докритичних навантаженнях // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2017. – Вип. 4. – С. 29 – 36.
2. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.

3. *Asemi S. et al.* Influence of initial stress on the vibration of double-piezoelectric-nanoplate systems with various boundary conditions using DQM // *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures.* – 2014. – **63.** – P. 169 – 179.
4. *Bespalova E.I., Boreiko N.P.* Determining of the Natural Frequencies of Compound Anisotropic Shell Systems Using Various Deformation Models // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55,** N 1. – P. 41 – 54.
5. *Bespalova E., Urusova G.* Vibrations of highly inhomogeneous shells of revolution under static loading // *J. of Mechanics of Materials and Structures.* – 2008. – **3,** N 7. – P. 1299 – 1313.
6. *Bespalova E., Urusova G.* Vibrations of compound shells of revolution with elliptical toroidal members // *Thin-Walled Struct.* – 2018. – **123.** – P. 185 – 194.
7. *Bespalova E. I., Yaremchenko N.P.* Stability of Systems Composed of Shells of Revolution // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53,** N 3. – P. 545 – 555.
8. *Chen X., Ye K.* Free Vibration Analysis for Shells of Revolution Using an Exact Dynamic Stiffness Method // *Mathematical Problems in Engineering.* – 2016. – 12 p.
9. *Dasdemir A.* Forced Vibrations of Pre-Stressed Sandwich Plate-Strip with Elastic Layers and Piezoelectric Core // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54,** N 4. – P. 480 – 493.
10. *Goodarzi M., Mohammadi M., Farajpour A., Khooran M.* Investigation of the Effect of Pre-Stressed on Vibration Frequency of Rectangular Nanoplate Based on a Visco-Pasternak Foundation // *J. of Solid Mechanics.* – 2014. – **6,** N 1. – P. 98 – 121.
11. *Han Q., Chu F.* Effect of rotation on frequency characteristics of a truncated circular conical shell // *Archive Appl. Mech.* – 2013. – **83,** N 12. – P. 1789 – 1800.
12. *Hua L., Lam K.Y.* The generalized differential quadrature method for frequency analysis of a rotating conical shell with initial pressure // *Int. J. Num. Methods Eng.* – 2000. – **48.** – P. 1703 – 1722.
13. *Liu C.J., Zheng Z.L., Yang X.Y., Guo J.J.* Geometric Nonlinear Vibration Analysis for Pretensioned Rectangular Orthotropic Membrane // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54,** N 1. – P. 104 – 119.
14. *Mohammadi M. et al.* Small scale effect on the vibration of orthotropic plates embedded in an elastic medium and under biaxial in-plane pre-load via nonlocal elasticity theory // *J. of Solid Mechanics.* – 2012. – **4,** N 2. – P. 128 – 143.
15. *Ostovari Dailamani S., Croll J.G.A.* Relative importance of horizontal and vertical components of earthquake motion on the responses of barrel vault cylindrical roof shells // 16-th World Conference on Earthquake Engineering (16WCEE 2017), January 9 – 13, 2017, Santiago, Chile. – Paper N 874.
16. *Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H.* Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach // *Int. J. of Mechanical Sciences.* – 2013. – **69.** – P. 72 – 84.
17. *Shekari A. et al.* Free Damped Vibration of Rotating Truncated Conical Sandwich Shells Using an Improved High-Order Theory // *Latin American J. of Solids and Structures.* – 2017. – **14.** – P. 2291 – 2323.
18. *Sofiyev A.H., Kuruoglu N.* Buckling and vibration of shear deformable functionally graded orthotropic cylindrical shells under external pressures // *Thin-Wall. Struct.* – 2014. – **78.** – P. 121 – 130.
19. *Sun S., Chu S., Cao D.Q.* Vibration characteristics of thin rotating cylindrical shells with various boundary conditions // *J. of Sound and Vibration.* – 2012. – **331,** N 18. – P. 4170 – 4186.
20. *Tornabene F.* Free vibrations of laminated composite doubly-curved shells and panels of revolution via the GDQ method // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 2011. – **200,** N 9 – 12. – P. 931 – 952.
21. *Zhang Y.L., Gorman D.G., Reese J.M.* Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid // *Thin-Wall. Struct.* – 2003. – **41,** N 12. – P. 1103 – 1127.

Поступила 07.03.2019

Утверждена в печать 03.03.2020