М.В.Довжик

РАЗРУШЕНИЕ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С БЛИЗКОРАСПОЛОЖЕННОЙ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ СЖАТИИ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова 3, 03054 Киев, Украина; e-mail: medved_mik@ukr.net

Abstract. In this work investigation of nonclassical problem of fracture mechanics for near-surface crack in case of small distances between a free surface and a crack size are studied. An axisymmetrical problem for the penny-shaped crack is considered. A numerical study for the composite materials is carried out.

Keywords: near-surface crack, compression along a fraction, critical stress, composite material.

Введение.

При воздействии на тело, содержащее плоскую трещину, усилий параллельных плоскости трещины, критерии разрушения типа Ирвина – Гриффитса неприменимы, так как получаемые в линейной механике разрушения коэффициенты интенсивности напряжений равны нулю. В случае растяжения – сжатия материала вдоль плоскости трещины применяется подход, впервые предложенный в работе [1]. В качестве критерия разрушения используется критерий локальной потери устойчивости материала в окрестностях трещины в рамках трехмерной линеаризованной теории упругой устойчивости. Согласно этому подходу, процесс разрушения инициируется моментом локальной потери устойчивости материала вблизи трещин, а критические параметры сжатия определяются из решения соответствующих задач на собственные значения в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел.

В обзорах [9 – 14] и монографиях [2 – 4] достаточно подробно представлена информация о разрушении материалов при сжатии вдоль плоскости трещин для различных схем размещения взаимодействующих трещин. Отметим, что в [9] впервые дан обстоятельный анализ подходов к вопросам разрушения материалов вдоль трещин с подробной библиографией.

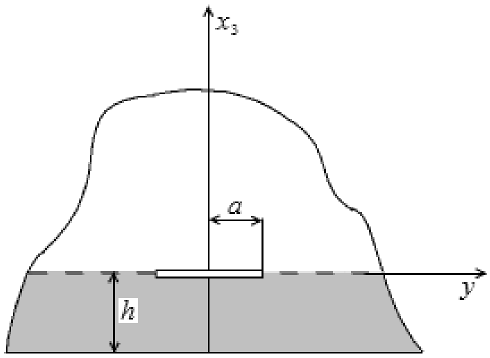

Рис. 1

Для приповерхностной круговой трещины (рис. 1), в работах [5, 7, 13, 14] для композитных и упругих высокоэластичных материалов представлены зависимости между критическим укорочением-напряжением и расстоянием от свободной поверхности до плоскости трещины.

Отдельный интерес представляет случай, когда расстояние между свободной поверхностью и плоскости трещины стремится к нулю. Этот случай детально исследован для упругих высокоэластичных эластичных материалов [5, 7], но не исследован для композитных материалов. Однако этот вопрос интересен как с теоретической, так и с практической точек зрения при расчетах тонких прослоек, образовавшихся в результате напыления, теплового удара и др.

В данной работе используя численно-аналитическую методику, предложенную в [7], проведено исследования задачи разрушения композитного полупространства при сжатии вдоль дискообразной приповерхностной трещиной для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной.

1. Постановка и обобщенное решение задачи.

Рассмотрим дискообразную трещину радиуса a в полупространстве $x_3 \geq -h$, размещенную в плоскости $x_3 = 0$ с центром на оси Ox_3. Действующие вдоль трещины начальные напряжения соответствуют двухосному растяжению – сжатию [14]:

$$S_{33}^0 = 0;\ S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq 0;\ u_m^0 = \delta_{jm}(\lambda_j - 1)x_j;\ \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3;\ \lambda_j = \text{const},$$

где λ_j – удлинение вдоль осей; x_j – лагранжевы координаты, совпадающие в недеформированном состоянии с декартовыми; S_{ij}^0 – компоненты симметричного тензора напряжений; u_j^0 – соответствующие начальным напряжениям S_{ij}^0 перемещения.

Для осесимметричной линеаризованной задачи, выполняются следующие граничные условия: на берегах трещины $x_3 = \pm 0$ и на свободной поверхности $x_3 = -h$ [14]:

$$t_{33} = 0,\ x_3 = \pm 0,\ \ 0 \leq r < a;\ t_{3r} = 0,\ x_3 = \pm 0,\ 0 \leq r < a;$$
$$t_{33} = 0,\ x_3 = -h,\ 0 \leq r < \infty;\ t_{3r} = 0,\ x_3 = -h,\ 0 \leq r < \infty,$$

где t_{ij} – несимметричный тензор напряжений Кирхгофа; (r, θ, x_3) – цилиндрические координаты соответствующие декартовым координатам x_j.

В случае тела с макротрещиной, когда размеры трещины значительно больше размеров микроструктур, композит рассматривается в виде анизотропной среды с наведенными макрохарактеристиками [14].

Используя методику, примененную в работе [14], задача сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма с дополнительным условием

$$f(\xi) + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 M_1(\xi,\eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k}\int_0^1 N_1(\xi,\eta) g(\eta) d\eta = 0;$$

$$g(\xi) + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 M_2(\xi,\eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k}\int_0^1 N_2(\xi,\eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 = 0; \qquad (1)$$

$$\int_0^1 g(\xi) d\xi = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1);\ f(\xi) \equiv \varphi(a\xi);\ g(\xi) \equiv \psi(a\xi).$$

Все величины, входящие в уравнения (1), безразмерные; $\tilde{C}_1$ – неизвестная константа, связанная с дополнительным условием.

Ядра интегральных уравнений (1) определяются формулами:

$$M_1(\xi,\eta) = R_1(\eta+\xi) - R_1(1+\xi) + R_1(\eta-\xi) - R_1(1-\xi);$$

$$N_1(\xi,\eta) = S_1(\eta+\xi) + S_1(\eta-\xi);\ M_2(\xi,\eta) = S_2(\eta+\xi) + S_2(\eta-\xi);$$

$$N_2(\xi,\eta) = R_2(\eta+\xi) - R_2(1+\xi) + R_2(\eta-\xi) - R_2(1-\xi);$$

$$R_1(\zeta) = 2\left\{2\frac{k_2}{k}I_0(\beta_1+\beta_2,\zeta) - \frac{1}{2}\frac{(k_1+k_2)}{k}\left[\frac{k_2}{k_1}I_0(2\beta_2,\zeta) + I_0(2\beta_1,\zeta)\right]\right\};$$

$$S_1(\zeta) = \frac{(k_1+k_2)}{k}\left\{I_1(\beta_1+\beta_2,\zeta) - \frac{1}{2}[I_1(2\beta_1,\zeta) + I_1(2\beta_2,\zeta)]\right\};$$

$$S_2(\zeta) = 2\left\{2\frac{k_1}{k_2}I_0(\beta_1+\beta_2,\zeta) - \frac{1}{2}\frac{(k_1+k_2)}{k}\left[\frac{k_1}{k_2}I_0(2\beta_2,\zeta) + I_0(2\beta_1,\zeta)\right]\right\}; \qquad (2)$$

$$R_2(\zeta) = \frac{(k_1+k_2)}{k}\left\{I_{-1}(\beta_1+\beta_2,\zeta) - \frac{1}{2}[I_{-1}(2\beta_1,\zeta) + I_{-1}(2\beta_2,\zeta)]\right\};$$

$$I_0(\rho,\zeta) = \rho(\zeta^2+\rho^2)^{-1};\ I_{-1}(\rho,\zeta) = -\frac{1}{2\beta}\log(\zeta^2+\rho^2);$$

$$I_1(\rho,\zeta) = \beta(\rho^2-\zeta^2)(\zeta^2+\rho^2)^{-2};\quad \beta = ha^{-1},\ \beta_i = \beta(n_i^0)^{-1/2},\ i = 1, 2.$$

2. Методика исследования.

Для вычисления зависимости между критическими укорочениями-удлинениями (напряжениями) и безразмерным расстоянием между свободной поверхностью и плоскостью трещины β из интегральных уравнений (1), использовалась процедура, построенная на методе Бубнова – Галеркина. В качестве системы координатных функций использовались степенные функции. Для N координатных функций имеем формулы

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} F_i x^i;\ g(x) = \sum_{i=0}^{N} G_i x^i. \qquad (3)$$

В отличие от предыдущих работ [13, 14], где после подстановки координатных функций (3) в систему (1) при дальнейшем исследовании проводилось численное интегрирование системы, применена методика, предложенная в [7], позволившая получить новые результаты для высокоэластичных материалов [5 – 8]. Это позволило, используя пакет символьных вычислений, аналитически вычислить интегралы от функций (2) входящих в ядра системы (1) для выбранной системы координатных функций. И привело к увеличению точность вычислений за счет исключения погрешности численного интегрирования.

Для ускорения вычислений интегралов был использован алгоритм, основанный на применении рекуррентных соотношений.

$$L(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2+(x+y)^2)^2}\,dx;$$

$$L(n) = \frac{1}{n-3}\left(\frac{1}{a^2+(1+y)^2} - 2y(n-2)L(n-1) - (a^2+y^2)(n-1)L(n-2)\right)\quad (n \ne 3);$$

$$V(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2+(x-y)^2)^2}\,dx; \qquad (4)$$

$$V(n) = \frac{1}{n-3}\left(\frac{1}{a^2+(1-y)^2} + 2y(n-2)V(n-1) - (a^2+y^2)(n-1)V(n-2)\right)\quad (n \ne 3).$$

Использование рекуррентных соотношений (4) позволяет ускорить аналитическое вычисление интегралов из ядер (2) интегрального уравнения (1).

В результате система интегральных уравнений (1) сводится к решению системы из $2(N+1)+1$ уравнения

$$\sum_{i=0}^{N} F_i F_{1ji} + \sum_{i=0}^{N} G_i G_{1ji} = 0;\ \sum_{i=0}^{N} F_i F_{2ji} + \sum_{i=0}^{N} G_i G_{2ji} + \tilde{C}_1 = 0;$$
$$\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1} G_i = 0 \quad (0 \le j \le N), \tag{5}$$

где F_{kji}, G_{kji} – точные выражения, вычисленные с использованием символьных вычислений, которые зависят от констант материала и безразмерного расстояния между трещиной и свободной поверхностью.

3. Числовые результаты.

В качестве примера проведено исследование композита с приведенными характеристиками трансверсально-изотропной среды

$$\nu = 0,3;\ \nu' = 0,2;\ G'/E = 0,1;\ E'/E = 0,5. \tag{6}$$

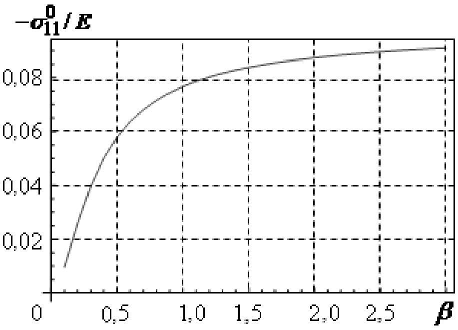

Рис. 2

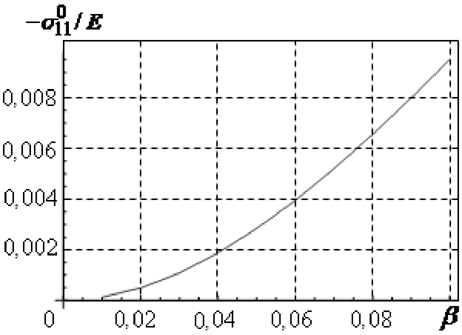

Рис. 3

Подставив (6) в (5), получим систему уравнений, коэффициенты F_{kji}, G_{kji} которой зависят от параметров β и σ_{11}^0. Численное исследование этой системы позволяет определить наименьшие значения критических напряжений, при которых система теряет устойчивость, для разных значений безразмерного расстояния между трещиной и свободной поверхностью β.

Используя 10 координатных функций, получаем зависимости критических напряжений от безразмерного расстояния $\sigma_{11}^0(\beta)$, представленные на графиках (рис. 2) – для больших расстояний и (рис. 3) – для малых расстояний. Сравнение результатов, полученных для больших значений безразмерных расстояний (рис. 2) с данными, полученными ранее в [14], показывает, что предложенная методика дает хорошую точность, и их результаты полностью совпадают. На рис. 2 получены новые данные, которые не удавалось получить, используя ранее предложенные методы расчета.

В таблице показаны результаты критических напряжений для очень малых безразмерных расстояний. Так же из предположения, что $\sigma_{11}^0/E = A\beta^2$ в таблице приведено значение коэффициента A.

β	σ_{11}^0/E	A
$9{\cdot}10^{-2}$	$-7,997{\cdot}10^{-3}$	– 0,987
$8{\cdot}10^{-2}$	$-6,553{\cdot}10^{-3}$	– 1,024
$7{\cdot}10^{-2}$	$-5,197{\cdot}10^{-3}$	– 1,061
$6{\cdot}10^{-2}$	$-3,951{\cdot}10^{-3}$	– 1,097
$5{\cdot}10^{-2}$	$-2,834{\cdot}10^{-3}$	– 1,134
$4{\cdot}10^{-2}$	$-1,871{\cdot}10^{-3}$	– 1,169
$3{\cdot}10^{-2}$	$-1,084{\cdot}10^{-3}$	– 1,204
$2{\cdot}10^{-2}$	$-4,947{\cdot}10^{-4}$	– 1,237
$1{\cdot}10^{-2}$	$-1,268{\cdot}10^{-4}$	– 1,268
$1{\cdot}10^{-3}$	$-1,290{\cdot}10^{-6}$	– 1,290
$1{\cdot}10^{-4}$	$-1,287{\cdot}10^{-8}$	– 1,287
$1{\cdot}10^{-5}$	$-1,285{\cdot}10^{-10}$	– 1,285
$1{\cdot}10^{-6}$	$-1,284{\cdot}10^{-12}$	– 1,284
$1{\cdot}10^{-9}$	$-1,284{\cdot}10^{-18}$	– 1,284

Заключение.

В работе впервые проведены исследования критических параметров разрушения полупространства с приповерхностной дискообразной трещиной в композитном материале при сжатии для широкого диапазона расстояний между трещиной и свободной поверхностью. Впервые получены результаты для значений относительного расстояния между трещиной и свободной поверхностью вплоть до $\beta = 10^{-9}$, которые на несколько порядков ниже получаемых ранее.

Из анализа полученных результатов можно определить, что при малых значениях безразмерных расстояний критические напряжения σ_{11}^{0} / E имеют квадратичную зависимость от безразмерного расстояния с коэффициентом $A = -1,28$.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Проведено дослідження некласичної проблеми механіки руйнування матеріалу з приповерхневою тріщиною у випадку малих відстаней між вільною поверхнею і площиною тріщини. Розглянуто осесиметричну задачу для кругової тріщини. Для прикладу проведено чисельне дослідження для композитного матеріалу.

1. *Гузь А.Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // Докл. АН СССР. – 1981. – 261, № 1. – С. 42 – 45.
2. *Гузь А.Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
3. *Гузь А.Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2 т. – Т. 1: Разрушение в структуре материала. – К.: Літера, 2008. – 592 с.
4. *Гузь А.Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2 т. – Т. 2: Родственные механизмы разрушения. – К.: Літера, 2008. – 736 с.
5. *Dovzhik M.V.* Fracture of a Half-Space Compressed Along a Penny-Shaped Crack Located at a Short Distance from the Surface // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 3. – P. 294 – 304.
6. *Dovzhik M.V.* Fracture of a Material Compressed Along Two Closely Spaced Penny-Shaped Cracks // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 563 – 572.
7. *Dovzhik M.V., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture of a Material Compressed Along a Crack Located at a Short Distance from the Free Surface // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 6. – P. 627 – 635.
8. *Dovzhik M.V., Nazarenko V.M.* Fracture of a Material Compressed Along Two Closely Spaced Penny-Shaped Cracks // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 4. – P. 423 – 429.
9. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
10. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of the Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 2. – P. 129 – 174.
11. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review) II // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 3. – P. 239 – 295.
12. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of the Research (Review) III // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 343 – 415.
13. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture Mechanics of Material in Compression Along Cracks (review). Highly Elastic Materials // Soviet Appl. Mech. – 1989. – **25**, N 9. – P. 851 – 876.
14. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture Mechanics of Materials under Compression Along Cracks (survey). Structural Materials // Soviet Appl. Mech. – 1989. – **25**, N 10. – P. 959 – 972.

Поступила 28.12.2018 Утверждена в печать 05.11.2019