Л. П. Хорошун

ТРЕХКОНТИНУУМНАЯ МЕХАНИКА ПРОВОДНИКОВ КАК ОСНОВА ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН И ПРОВОДИМОСТИ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина: e-mail: stochac@inmech.kiev.ua

Abstract. A new principle of the theory of electromagnetic waves and conduction is presented. The scheme is based on a metallic conductor as a set of interacting neutral atoms, each of which consists of a positively charged nucleus, a part of electrons associated with it, and a free part of electrons having the negative charge. The macroscopic model of the conductor is represented as three interpenetrating interacting continua — a positively charged set of nuclei, a negatively charged set of electrons connected to the nuclei and a negatively charged set of free electrons (electron gas). The carrier densities of the corresponding charges are introduced, as well as the corresponding partial displacements and partial stresses. The balance equations of charge carrier densities, the equations of conservation of momentum, and the equations of state that relate dynamic and kinematic parameters are formulated. Basing on the charge conservation equations and the Gauss-Ostrogradsky theorem, the equations of three-continuum mechanics of the conductor are transformed into a system of coupled dynamic equations with respect to the macroscopic displacements of the skeleton of bound charges, electric field strengths due to bound and free charges, and conductivity current density. These equations are invariant with respect to Galileo transformations. As the special cases, the Ohm's law and Maxwell's equations follow from them.

Key words: three-continuum mechanics, interacting continua, electromagnetic waves, conductivity, bound charges, electron gas, charge conservation.

Введение.

В механике сплошных сред широкое распространение получили исследования связанных полей, описывающих взаимодействия механических, тепловых, электромагнитных, диффузионных и других процессов. Уравнения связанных полей строятся, как правило, на основе синтеза общепринятых уравнений конкретной совокупности процессов. Так на основе синтеза основных классических разделов механики сплошных сред и теории теплопроводности, а также теории электромагнитных процессов, возникли новые направления, такие как термоупругость, электроупругость, магнитоупругость. Они являются теоретической основой для решения ряда актуальных задач, среди которых можно отметить новое направление в термоупругости [8], а также исследования статических и динамических задач магнитоупругости [17, 18, 21] и электроупругости [1, 3, 7, 12, 19, 20, 22 – 24].

Существующая теория электроупругости, в основу которой положены эффекты электромеханического взаимодействия в пьезоэлектриках, базируется на уравнениях статики или динамики упругого тела, уравнениях электростатики (акустическое приближение) и уравнениях состояния, связывающих тензор напряжений и вектор электрической индукции с тензором деформаций и вектором напряженности электрического поля. При этом предполагается, что внутренняя энергия является функцией деформаций и электрической индукции. Недостатком акустического приближения, базирующегося на уравнениях электростатики, является невозможность описать связанные акустические и динамические электромагнитные процессы, которые могут наблюдаться в виде возбуждения электромагнитных волн акустическими волнами. Кроме того, недостаточно обоснована зависимость внутренней энергии от электрической индукции, которая [4] является лишь внешним электрическим полем, созданным свободными зарядами, независимо от нахождения в нем диэлектрика.

В работах [14, 15] изложен новый принцип построения теории линейной и нелинейной электроупругости, в основу которого положены уравнения двухконтинуумной механики диэлектриков как смеси положительных и отрицательных зарядов, попарно связанных в нейтральные молекулы или ячейки. Внутренняя энергия принимается функцией деформаций компонентов смеси и разности их перемещений, порождающей вектор поляризации и обусловленное им электрическое поле связанных зарядов. Построенные уравнения описывают эффекты пьезоэлектрики и электрострикции с учетом динамики электромагнитных процессов. В частном случае из них следуют уравнения Максвелла [16] для диэлектриков.

Существует мнение [9], что уравнения Максвелла, являющиеся фундаментальным физическим законом и занимающие исключительное место в современной физике, явно угаданы, а не строго выведены из экспериментальных данных. Основанием для этого послужило то, что в первой своей работе по электродинамике Максвелл на основе законов Кулона, Ампера и Фарадея сформулировал дифференциальные уравнения электромагнитного поля, которые не описывали электромагнитные волны. Спустя пять лет Максвелл в своих уравнениях дополнил ток проводимости так называемым «током смещения» в виде производной по времени напряженности электрического поля, объясняя его происхождение поляризацией молекул под воздействием электрического поля. Это позволило описать электромагнитные волны, тем не менее, некоторые физики отрицательно отнеслись к току смещения. Появились попытки [10] обосновать его существование необходимостью симметрии уравнений Максвелла. Однако строгого обоснования существования и физического смысла тока смещения не было дано. Нет оснований также считать строгим определение тока смещения как производной по времени вектора электрической индукции [6], так как электрическая индукция составляет ту часть электрического поля, которая создается свободными зарядами [4].

Если же исходить из двухконтинуумной механики диэлектриков [14, 15], то с учетом определения вектора поляризации и порождаемого им электрического поля приходим к связанным уравнениям относительно макроперемещений нейтральных молекул и вектора напряженности электрического поля. В случае неподвижного диэлектрика из них как частный случай следуют уравнения Максвелла. При этом слагаемое, которое Максвелл искусственно ввел под названием «ток смещения», здесь является результатом интегрирования инерционной составляющей уравнения для вектора поляризации и порождаемого им электрического поля. В то же время согласно принятому обоснованию [6], базирующемуся на законе сохранения электрического заряда, ток смещения в диэлектрике оказывается равен нулю при использовании модели двухконтинуумной механики.

Представления двухконтинуумной механики применялись [11] для описания связанных процессов деформирования электропроводного тела и движения отрицательно заряженного электронного газа в положительно заряженной кристаллической решетке. Однако рассматриваемое двухконтинуумное представление не дает возможности описать поляризацию проводника, порождающую электрическое поле связанных зарядов.

В настоящей работе излагается построение теории электромагнитных волн и проводимости на основе трехконтинуумной механики электропроводного тела. Исходной является схема металлического проводника в виде совокупности взаимодействующих нейтральных атомов, каждый из которых состоит из положительно заряженного ядра, связанной с ним части и свободной части электронов, имеющих отрицательный заряд. Для элементарного объема проводника, содержащего большое количество атомов, вводятся плотности носителей зарядов ядер, связанных и свободных электронов, а также соответствующие перемещения и парциальные напряжения. Формулируются уравнения баланса плотностей носителей зарядов, уравнения сохранения импульса положительных, отрицательных связанных и отрицательных свободных зарядов, а также уравнения состояния, связывающие динамические и кинематические параметры. На основе уравнений сохранения заряда, вытекающих из уравнений баланса плотностей носителей зарядов, и теоремы Гаусса уравнения трехконтинуумной механики проводника преобразуются в систему связанных динамических уравнений относительно макроперемещений каркаса проводника, образованного положительными и связанными отрицательными зарядами, напряженностей электрических полей, обусловленных связанными и свободными зарядами, а также плотности тока проводимости. Уравнения инварианты относительно преобразований Галилея. Для определенных частных случаев они могут быть представлены в форме закона Ома и уравнений Максвелла, построенных на основе законов Фарадея, Ампера, Био – Савара.

§1. Уравнения трехконтинуумной механики проводников.

Рассмотрим твердое тело, представляющее собой совокупность взаимодействующих атомов, каждый из которых состоит из положительно заряженного ядра и определенного числа окружающих его отрицательно заряженных электронов. Предполагаем, что в равновесном состоянии атома при отсутствии внешних воздействий центры положительного и отрицательного зарядов совпадают. Отвлекаясь от квантовомеханического описания состояния атома и электропроводности тела, будем исходить из простейшей схемы, считая, что ядро имеет положительный заряд q_1, а окружающие ядро электроны состоят из связанной с ним части с зарядом $-q_2$ и свободной части с зарядом $-q_3$, удовлетворяющих равенству $q_1 = q_2 + q_3$. Наличие свободных электронов, способных перемещаться по всему объему тела, определяет электропроводность твердого тела. Молекулярные токи, приводящие к намагничиванию, не учитываются. Взаимное смещение центров зарядов ядра и связанной с ним части электронов определяет поляризацию. В частном случае при $q_3 = 0$ твердое тело является диэлектриком.

Для элементарного объема твердого тела, содержащего достаточно большое число атомов, т.е. для элементарного макрообъема, можно ввести плотности носителей зарядов n_1, n_2, n_3, представляющих собой число соответствующих зарядов $q_1, -q_2$, $-q_3$ в единице объема. Если заряды не возникают и не исчезают, а только перемещаются, то плотности носителей зарядов удовлетворяют уравнениям баланса

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \left(n_1 \dot{u}_i^1\right)_{,i} = 0; \ \frac{\partial n_2}{\partial t} + \left(n_2 \dot{u}_i^2\right)_{,i} = 0; \ \frac{\partial n_3}{\partial t} + \left(n_3 \dot{u}_i^3\right)_{,i} = 0, \tag{1.1}$$

где $\dot{u}_i^1, \dot{u}_i^2, \dot{u}_i^3$ – векторы скоростей соответственно положительных, отрицательных связанных и отрицательных свободных зарядов, относящиеся к элементарному макрообъему, точки сверху обозначают соответствующие субстанциональные производные по времени

$$\dot{u}_i^1 = \frac{\partial u_i^1}{\partial t} + u_{i,n}^1 \dot{u}_n^1; \ \dot{u}_i^2 = \frac{\partial u_i^2}{\partial t} + u_{i,n}^2 \dot{u}_n^2; \ \dot{u}_i^3 = \frac{\partial u_i^3}{\partial t} + u_{i,n}^3 \dot{u}_n^3. \tag{1.2}$$

Если принять, что в начальный момент времени в каждой точке твердого тела имеет место равновесное и нейтральное состояние, то начальные плотности носителей зарядов совпадают и равны числу атомов N в единице макрообъема, т.е. $n_{10} = n_{20} = n_{30} = N$.

Умножим уравнения (1.1) соответственно на массы положительного, отрицательного связанного и отрицательного свободного зарядов m_1, m_2, m_3. Принимая во внимание, что $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, $\rho_3 = n_3 m_3$ представляют собой плотности массы соответствующих зарядов, приходим к уравнениям сохранения массы

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \left(\rho_1 \dot{u}_i^1\right)_{,i} = 0; \ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \left(\rho_2 \dot{u}_i^2\right)_{,i} = 0; \ \frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \left(\rho_3 \dot{u}_i^3\right)_{,i} = 0. \tag{1.3}$$

Введем парциальные напряжения $\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^2, \sigma_{ij}^3$ как составляющие равнодействующих сил, действующих на соответствующие заряды макроплощадки, отнесенные к размеру макроплощадки. При этом пренебрегаем касательными составляющими парциальных напряжений σ_{ij}^3, которые связаны с вязкостью электронного газа, образованного отрицательными свободными зарядами, т.е. принимаем $\sigma_{ij}^3 = -p_3\delta_{ij}$, где p_3 – парциальное давление электронного газа, δ_{ij} – единичный тензор. Тогда уравнения сохранения импульса положительных, отрицательных связанных и отрицательных свободных зарядов, отнесенные к элементарному макрообъему твердого тела, можно представить в виде

$$\rho_1\ddot{u}_i^1 = \sigma_{ij,j}^1 + R_i^{12} + R_i^{13} + F_i^1; \quad \rho_2\ddot{u}_i^2 = \sigma_{ij,j}^2 - R_i^{12} + R_i^{23} + F_i^2;$$
$$\rho_3\ddot{u}_i^3 = -p_{3,i} - R_i^{13} - R_i^{23} + F_i^3. \tag{1.4}$$

Здесь $R_i^{12}, R_i^{13}, R_i^{23}$ – результирующие силы кинематического взаимодействия между соответствующими зарядами, отнесенные к элементарному макрообъему, F_i^1, F_i^2, F_i^3 – объемные силы, действующие на соответствующие заряды элементарного макрообъема, $\ddot{u}_i^1, \ddot{u}_i^2, \ddot{u}_i^3$ – субстанциональные производные от соответствующих скоростей

$$\ddot{u}_i^1 = \frac{\partial\dot{u}_i^1}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}^1\dot{u}_n^1; \ \ddot{u}_i^2 = \frac{\partial\dot{u}_i^2}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}^2\dot{u}_n^2; \ \ddot{u}_i^3 = \frac{\partial\dot{u}_i^3}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}^3\dot{u}_n^3. \tag{1.5}$$

Для замыкания уравнений (1.3), (1.4) необходимо дополнительно сформулировать уравнения состояния, связывающие динамические и кинематические параметры. Положительно заряженные ядра и связанные с ними отрицательно заряженные электроны образуют каркас твердого тела, поэтому описание их совместного механического поведения будем строить по аналогии с линейной теорией двухкомпонентных упругих смесей [8]. Совместное механическое поведение электронного газа с положительными и отрицательными связанными зарядами будем описывать на основе аналогии с теорией смеси твердой и жидкой фаз [5]. Тогда уравнения состояния для двухкомпонентного линейно-упругого анизотропного тела с движущимся в нем электронным газом можно представить в виде

$$\sigma_{ij}^1 = \lambda_{ijmn}^{11}\varepsilon_{mn}^1 + \lambda_{ijmn}^{12}\varepsilon_{mn}^2 + h_{mij}^1\left(u_m^1 - u_m^2\right);$$

$$\sigma_{ij}^2 = \lambda_{ijmn}^{21}\varepsilon_{mn}^1 + \lambda_{ijmn}^{22}\varepsilon_{mn}^2 + h_{mij}^2\left(u_m^1 - u_m^2\right); \ p_3 = p_3\left(\rho_3\right);$$

$$R_i^{12} = -\kappa_{ij}\left(u_j^1 - u_j^2\right) - h_{imn}^1\varepsilon_{mn}^1 - h_{imn}^2\varepsilon_{mn}^2; \quad R_i^{13} = -r_{ij}^1\left(\dot{u}_j^1 - \dot{u}_j^3\right); \ R_i^{23} = -r_{ij}^2\left(\dot{u}_j^2 - \dot{u}_j^3\right); \tag{1.6}$$

$$\left(\lambda_{ijmn}^{\nu k} = \lambda_{mnij}^{\nu k} = \lambda_{jimn}^{\nu k} = \lambda_{ijnm}^{\nu k}; \ h_{imn}^k = h_{inm}^k; \ \kappa_{ij} = \kappa_{ji}; \ r_{ij}^k = r_{ji}^k\right), \quad \left(\nu, \ k = 1, \ 2\right),$$

где

$$\varepsilon_{mn}^k = u_{(m,n)}^k \equiv \frac{1}{2}\left(u_{m,n}^k + u_{m,n}^k\right), \quad (k = 1,2), \tag{1.7}$$

$\lambda_{ijmn}^{\nu k}, h_{imn}^k, \kappa_{ij}, r_{ij}^k$ – материальные тензоры, определяемые физико-механическими свойствами и структурой твердого проводящего тела, причем симметрия их относительно индексов связана с существованием упругого потенциала для двухкомпонентного анизотропного твердого тела и симметрией тензоров $\sigma_{ij}^k, \varepsilon_{ij}^k$, а также с принципом Онзагера в термодинамике необратимых процессов [2]. Взаимное влияние упругих деформаций двухкомпонентного твердого тела и сжимаемости электронного газа, а также температура не учитываются.

Подставляя (1.6), (1.7) в (1.4), приходим к уравнениям

$$\rho_1\ddot{u}_i^1 = \lambda_{ijmn}^{11}u_{m,nj}^1 + \lambda_{ijmn}^{12}u_{m,nj}^2 + \left(h_{min}^1 - h_{imn}^1\right)u_{m,n}^1 - \left(h_{min}^1 + h_{imn}^2\right)u_{m,n}^2 - \kappa_{ij}\left(u_j^1 - u_j^2\right) - r_{ij}^1\left(\dot{u}_j^1 - \dot{u}_j^3\right) + F_i^1;$$

$$\rho_2\ddot{u}_i^2 = \lambda_{ijmn}^{21}u_{m,nj}^1 + \lambda_{ijmn}^{22}u_{m,nj}^2 + \left(h_{imn}^1 + h_{min}^2\right)u_{m,n}^1 - \left(h_{min}^2 - h_{imn}^2\right)u_{m,n}^2 + \kappa_{ij}\left(u_j^1 - u_j^2\right) - r_{ij}^2\left(\dot{u}_j^2 - \dot{u}_j^3\right) + F_i^2;$$

$$\rho_3\ddot{u}_i^3 = -p_{3,i} + r_{ij}^1\left(\dot{u}_j^1 - \dot{u}_j^3\right) + r_{ij}^2\left(\dot{u}_j^2 - \dot{u}_j^3\right) + F_i^3\,. \tag{1.8}$$

Если считать, что объемные силы заданы и учесть уравнение состояния электронного газа $p_3 = p_3\left(\rho_3\right)$, то уравнения (1.3), (1.8) образуют замкнутую систему относительно параметров $\rho_1,\, \rho_2,\, \rho_3,\, u_i^1,\, u_i^2,\, u_i^3,\, p_3$, описывающих механическое поведение трехконтинуумной системы – положительные заряды, связанные отрицательные заряды и свободные отрицательные заряды.

Введем замену

$$u_i^1 = u_i + u_i';\; u_i^2 = u_i - u_i';\; \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2;\; \sigma_{ij}' = \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2\,. \tag{1.9}$$

Тогда субстанциональные производные (1.2), (1.5) преобразуются таким образом

$$\dot{u}_i^1 = \dot{u}_i + \dot{u}_i';\; \dot{u}_i^2 = \dot{u}_i - \dot{u}_i';\; \ddot{u}_i^1 = \ddot{u}_i + \ddot{u}_i';\; \ddot{u}_i^2 = \ddot{u}_i - \ddot{u}_i';$$

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,n}\dot{u}_n + u_{i,n}'\dot{u}_n';\quad \dot{u}_i' = \frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_{i,n}\dot{u}_n' + u_{i,n}'\dot{u}_n; \tag{1.10}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}\dot{u}_n + \dot{u}_{i,n}'\dot{u}_n';\quad \ddot{u}_i' = \frac{\partial \dot{u}_i'}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}\dot{u}_n' + \dot{u}_{i,n}'\dot{u}_n\,.$$

При этом уравнения сохранения массы (1.3), сохранения импульса (1.4) и состояния (1.6) приводятся соответственно к виду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\rho\dot{u}_i + \rho'\dot{u}_i'\right)_{,i} = 0;\; \frac{\partial\rho'}{\partial t} + \left(\rho'\dot{u}_i + \rho\dot{u}_i'\right)_{,i} = 0;\; \frac{\partial\rho_3}{\partial t} + \left(\rho_3\dot{u}_i^3\right)_{,i} = 0; \tag{1.11}$$

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}_i' = \sigma_{ij,j} + R_i^{13} + R_i^{23} + F_i\,;$$

$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}_i' = \sigma_{ij,j}' + 2R_i^{12} + R_i^{13} - R_i^{23} + F_i'\,;\quad \rho\ddot{u}_i^3 = -p_{3,i} - \left(R_i^{13} + R_i^{23}\right) + F_i^3\,; \tag{1.12}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn}^*\varepsilon_{mn} + \bar{\lambda}_{ijmn}\varepsilon_{mn}' + h_{mij}^*u_m';\quad \sigma_{ij}' = \bar{\lambda}_{ijmn}\varepsilon_{mn} + \lambda_{ijmn}\varepsilon_{mn}' + h_{mij}'u_m';\quad p_3 = p_3\left(\rho_3\right);$$

$$2R_i^{12} = -4\kappa_{ij}u_j' - h_{imn}^*\varepsilon_{mn} - h_{imn}'\varepsilon_{mn}'; \tag{1.13}$$

$$R_i^{13} + R_i^{23} = r_{ij}\left(\dot{u}_j^3 - \dot{u}_j\right) - r_{ij}'\dot{u}_j';\; R_i^{13} - R_i^{23} = r_{ij}'\left(\dot{u}_j^3 - \dot{u}_j\right) - r_{ij}\dot{u}_j',$$

где введены обозначения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right);\; \varepsilon_{ij}' = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}' + u_{j,i}'\right);\quad F_i = F_i^1 + F_i^2;\; F_i' = F_i^1 - F_i^2\,;$$

$$\lambda_{ijmn}^* = \lambda_{ijmn}^{11} + \lambda_{ijmn}^{21} + \lambda_{ijmn}^{12} + \lambda_{ijmn}^{22};\; \bar{\lambda}_{ijmn} = \lambda_{ijmn}^{11} + \lambda_{ijmn}^{21} - \lambda_{ijmn}^{12} - \lambda_{ijmn}^{22};$$

$$\lambda_{ijmn} = \lambda_{ijmn}^{11} + \lambda_{ijmn}^{22} - \lambda_{ijmn}^{12} - \lambda_{ijmn}^{21};\; h_{imn}^* = 2\left(h_{imn}^1 + h_{imn}^2\right);\; h_{imn}' = 2\left(h_{imn}^1 - h_{imn}^2\right);$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2;\; \rho' = \rho_1 - \rho_2\,;\;\; r_{ij} = r_{ij}^1 + r_{ij}^2;\; r_{ij}' = r_{ij}^1 - r_{ij}^2\,. \tag{1.14}$$

Подставляя (1.13) в (1.12), приходим к уравнениям

$$\rho\ddot{u}_i+\rho'\ddot{u}'_i=\lambda^*_{ijmn}u_{m,nj}+\bar{\lambda}_{ijmn}u'_{m,nj}+h^*_{mij}u'_{m,j}+r_{ij}\left(\dot{u}^3_j-\dot{u}_j\right)-r'_{ij}\,\dot{u}'_j+F_i\ ;$$

$$\rho'\ddot{u}_i+\rho\ddot{u}'_i=\bar{\lambda}_{mnij}u_{m,nj}+\lambda_{ijmn}u'_{m,nj}-h^*_{imj}u_{m,j}+h_{mij}u'_{m,j}-4\kappa_{ij}u'_j+r'_{ij}\left(\dot{u}^3_j-\dot{u}_j\right)-r_{ij}\dot{u}'_j+F'_i\ ;$$

$$\rho_3\ddot{u}^3_i=-p_{3,i}-r_{ij}\left(\dot{u}^3_j-\dot{u}_j\right)+r'_{ij}\dot{u}'_j+F_3\qquad\left(h_{mij}=h'_{mij}-h'_{imj}\right),\tag{1.15}$$

которые совместно с (1.11) и уравнением состояния электронного газа $p_3=p_3\left(\rho_3\right)$ образуют замкнутую систему относительно параметров $\rho,\ \rho',\ \rho_3,\ u_i\ ,\ u'_i\ ,\ \dot{u}^3_i,\ p_3$.

Для изотропного твердого проводника материальные тензоры, входящие в (1.15), представлены формулами

$$\lambda^*_{ijmn}=\lambda^*\delta_{ij}\delta_{mn}+2\mu^*I_{ijmn};\ \bar{\lambda}_{ijmn}=\bar{\lambda}\delta_{ij}\delta_{mn}+2\bar{\mu}I_{ijmn};$$

$$\lambda_{ijmn}=\lambda\delta_{ij}\delta_{mn}+2\mu I_{ijmn};\ \kappa_{ij}=\kappa\delta_{ij};\ r^1_{ij}=r_1\delta_{ij};\ r^2_{ij}=r_2\delta_{ij};\tag{1.16}$$

$$r_{ij}=r\delta_{ij};\ r'_{ij}=r'\delta_{ij};\ \ r=r_1+r_2;\ r'=r_1-r_2;\quad h^*_{imn}=h_{imn}=0\ ,$$

где $\lambda^*,\ \mu^*,\ \bar{\lambda},\ \bar{\mu},\ \lambda,\ \mu,\ \kappa,\ r_1,\ r_2$ – постоянные материала; δ_{ij}, I_{ijmn} – единичные тензоры. Тогда уравнения (1.15) принимают вид

$$\rho\ddot{u}_i+\rho'\ddot{u}'_i=\mu^*u_{i,rr}+\left(\lambda^*+\mu^*\right)u_{r,ri}+\bar{\mu}u'_{i,rr}+\left(\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)u'_{r,ri}+r\left(\dot{u}^3_i-\dot{u}_i\right)-r'\dot{u}'_i+F_i;$$

$$\rho'\ddot{u}_i+\rho\ddot{u}'_i==\bar{\mu}u_{i,rr}+\left(\bar{\lambda}+\bar{\mu}\right)u_{r,ri}+\mu u'_{i,rr}+\left(\lambda+\mu\right)u'_{r,ri}-4\kappa u'_i+r'\left(\dot{u}^3_i-\dot{u}_i\right)-r\dot{u}'_i+F'_i\ ;$$

$$\rho_3\ddot{u}^3_i=-p_{3,i}-r\left(\dot{u}^3_i-\dot{u}_i\right)+r'\dot{u}'_i+F_3\ .\tag{1.17}$$

Системы уравнений (1.11), (1.15), (1.17) с учетом уравнения состояния $p_3=p_3\left(\rho_3\right)$ описывают динамические поля макроперемещений u_i каркаса, образованного положительными и связанными отрицательными зарядами, взаимных смещений $2u'_i$ положительных и связанных отрицательных зарядов и скоростей перемещений $\dot{u}^3_i$ свободных отрицательных зарядов. Нетрудно проверить, что уравнения (1.3), (1.8), (1.11), (1.15), (1.17) инвариантны относительно преобразований Галилея.

§2. Переход к связанным уравнениям механики и электродинамики.

Уравнения трехконтинуумной механики проводников, полученные выше, оперируют чисто механическими параметрами. Поэтому дальнейшая задача состоит в преобразовании их к такой форме, чтобы они описывали состояние и динамические процессы в проводниках в терминах электродинамики. С этой целью вернемся к уравнениям баланса плотностей носителей зарядов (1.1). Умножим каждое из этих уравнений соответственно на заряды $q_1,\,-q_2,\,-q_3$ и сложим. В результате после некоторых преобразований с учетом (1. 9) получим уравнение сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+I_{i,i}=0,\tag{2.1}$$

где плотность электрического заряда ρ_e, согласно общепринятым представлениям [4, 6], определяется формулой

$$\rho_e=n_1q_1-n_2q_2-n_3q_3,\tag{2.2}$$

а электрический ток I_i представляется суммой

$$I_i = I_i^{\text{кон}} + I_i^{\text{пол}} + I_i^{\text{пр}};\ I_i^{\text{кон}} = \rho_e \dot{u}_i;\ I_i^{\text{пол}} = \left(n_1 q_1 + n_2 q_2\right)\dot{u}_i';\quad I_i^{\text{пр}} = j_i = -n_3 q_3 \left(\dot{u}_i^3 - \dot{u}_i\right). \quad (2.3)$$

Здесь $I_i^{\text{кон}}$ – конвекционный ток; $I_i^{\text{пол}}$ – ток поляризации или скорость поляризации; $j_i = I_i^{\text{пр}}$ – ток проводимости. При $q_1 = q_2$, $n_1 = n_2 = N$ выражение для $I_i^{\text{пол}}$ приводит к известному определению поляризации [6] элементарного объема диэлектрика.

Если принять во внимание теорему Гаусса [4]

$$E_{i,i} = 4\pi k \rho_e, \quad (2.4)$$

где E_i – вектор напряженности электрического поля, образованного плотностью ρ_e, $k = 1$ и $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, соответственно, в системах СГС и СИ, то закон сохранения электрического заряда (2.1) можно представить также в форме

$$\left(I_i^{\text{кон}} + I_i^{\text{см}} + I_i^{\text{пр}}\right)_{,i} = 0\ , \quad (2.5)$$

где, согласно общепринятым представлениям, $I_i^{\text{см}} = \dfrac{1}{4\pi k}\dfrac{\partial E_i}{\partial t} + I_i^{\text{пол}}$ – ток смещения для проводника.

Плотность электрического заряда (2.2) можно представить как сумму двух плотностей

$$\rho_e = \rho_e^n + \rho_e^c \quad \left(\rho_e^n = n_1 q_1 - n_2 q_2,\ \rho_e^c = -n_3 q_3\ \right), \quad (2.6)$$

где ρ_e^n – плотность поляризационных или связанных зарядов, ρ_e^c – плотность свободных зарядов. Поэтому вектор напряженности электрического поля E_i также состоит из двух слагаемых

$$E_i = E_i^n + E_i^c, \quad (2.7)$$

которые связаны с соответствующим плотностями, согласно теореме Гаусса, уравнениями

$$E_{i,i}^n = 4\pi k \rho_e^n;\ E_{i,i}^c = 4\pi k \rho_e^c\ . \quad (2.8)$$

Умножая первые два уравнения (1.1), соответственно, на q_1, $-q_2$ и складывая, получим уравнение сохранения поляризационных зарядов

$$\frac{\partial \rho_e^n}{\partial t} + I_{i,i}^{\text{пол}} + \left(\rho_e^n \dot{u}_i\right)_{,i} = 0, \quad (2.9)$$

где $\rho_e^n \dot{u}_i$ – конвекционный ток, обусловленный перемещением поляризационных зарядов. Умножая третье уравнение (1.1) на $-q_3$, с учетом (2.3), приходим к уравнению сохранения свободных зарядов

$$\frac{\partial \rho_e^c}{\partial t} + j_{i,i} + \left(\rho_e^c \dot{u}_i\right)_{,i} = 0, \quad (2.10)$$

где $\rho_e^c \dot{u}_i$ – конвекционный ток, обусловленный перемещением свободных зарядов.

Если принять, что в начальный момент времени плотности носителей связанных зарядов совпадают $\left(n_{10} = n_{20} = N\right)$, то, интегрируя уравнение (2.9) по времени, в линейном приближении получаем

$$\rho_e^n + P_{i,i} + \rho_{eo}^n u_{i,i} = 0, \quad (2.11)$$

где вектор поляризации P_i и начальная плотность поляризационных зарядов ρ_{eo}^n определяются формулами

$$P_i = N\left(q_1 + q_2\right)u_i'; \quad \rho_{eo}^n = N\left(q_1 - q_2\right). \tag{2.12}$$

При $q_1 = q_2$ из (2.11) следует известное уравнение связи плотности поляризационных зарядов и дивергенции вектора поляризации для диэлектрика [14].

Векторы напряженности E_i^n и поляризации P_i обусловлены распределением в пространстве связанных зарядов, поэтому между ними должны существовать определенные соотношения. Исключая из (2.8), (2.11) плотность ρ_e^n, получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{4\pi k}E_i^n + P_i + \rho_{eo}^n u_i\right)_{,i} = 0, \tag{2.13}$$

которое тождественно удовлетворяется равенством

$$E_i^n = -4\pi k\left(P_i + \rho_{eo}^n u_i\right). \tag{2.14}$$

Равенство (2.14) можно получить также путем усреднения по элементарному макрообъему напряженности электрического поля, образованного переместившимися связанными зарядами дискретной системы атомов.

На основе (2.5), (2.7), (2.9), (2.14) находим выражение для тока смещения в проводнике

$$I_i^{\text{см}} = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{\partial E_i^c}{\partial t} - \rho_{eo}^n \frac{\partial u_i}{\partial t}\right). \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что в диэлектрике $\left(q_1 = q_2,\, q_3 = 0,\, E_i^c = 0\right)$ ток смещения отсутствует.

Необходимо обратить внимание на тот факт, что вектор поляризации P_i и перемещения u_i являются исходными параметрами, характеризующими согласно (2.12), (2.14) расположение связанных зарядов в пространстве. Напряженность же электрического поля является вторичным фактором в том смысле, что она характеризует электрическое поле, порожденное согласно закону Кулона векторами u_i^1, u_i^2, или P_i и u_i. Поляризация P_i, порождаемая взаимным смещением связанных зарядов, и конвективный перенос связанных зарядов $\rho_{eo}^n u_i$ могут быть вызваны различными факторами как электрического, так и неэлектрического характера. Это внешнее электрическое поле $E_i^в$, поле свободных зарядов E_i^c, инерционные и гравитационные силы, деформации проводника, изменения температуры и т.п.

Согласно (2.3), (2.12), (2.14) можем записать

$$u_i' = -\nu E_i^n - \nu' u_i; \; \dot{u}_i^3 = \dot{u}_i + \frac{1}{\rho_e^c} j_i, \qquad \left(\nu = \frac{1}{4\pi k N\left(q_1 + q_2\right)}; \; \nu' = \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}\right). \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в (1.15), получаем систему уравнений

$$D_{1i} = \left(\lambda_{ijmk}^* - \nu'\overline{\lambda}_{ijmk}\right)u_{m,kj} - \nu'\left(h_{mij}^* u_{m,j} - r_{ij}'\dot{u}_j\right) - \nu\left(\overline{\lambda}_{ijmk}E_{m,kj}^n + h_{mij}^* E_{m,j}^n - r_{ij}'\dot{E}_j^n\right) + \frac{r_{ij}}{\rho_e^c} j_j + F_i \; ;$$

$$D_{2i} = \left(\overline{\lambda}_{mkij} - \nu'\lambda_{ijmk}\right)u_{m,kj} - \left(h_{imj}^* + \nu' h_{mij}\right)u_{m,j} + \nu'\left(4\kappa_{ij}u_j + r_{ij}\dot{u}_j\right) - \tag{2.17}$$

$$-\nu\left(\lambda_{ijmk}E_{m,kj}^n + h_{mij}E_{m,j}^n - 4\kappa_{ij}E_j^n - r_{ij}\dot{E}_j^n\right) + \frac{r_{ij}'}{\rho_e^c} j_j + F_i' \; ;$$

$$D_{3i} = -p_{3,i} - \frac{r_{ij}}{\rho_e^c} j_i - r_{ij}'\left(\nu\dot{E}_j^n + \nu'\dot{u}_j\right) + F_i^3,$$

где обозначено

$$D_{1i}=\left(\rho-\nu'\rho'\right)\ddot{u}_i-\nu\rho'\ddot{E}_i^n;\quad D_{2i}=\left(\rho'-\nu'\rho\right)\ddot{u}_i-\nu\rho\ddot{E}_i^n;$$

$$D_{3i}=\rho_3\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{u}_i+\frac{1}{\rho_e^c}j_i\right)+\left(\dot{u}_i+\frac{1}{\rho_e^c}j_i\right)_{,k}\left(\dot{u}_k+\frac{1}{\rho_e^c}j_k\right)\right];$$

$$\ddot{u}_i=\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial t}+\left(1+\nu'^2\right)\dot{u}_{i,k}\dot{u}_k+\nu\nu'\left(\dot{u}_{i,k}\dot{E}_k^n+\dot{E}_{i,k}^n\dot{u}_k\right)+\nu^2\dot{E}_{i,k}^n\dot{E}_k^n;$$

$$\ddot{E}_i^n=\frac{\partial\dot{E}_i^n}{\partial t}+\left(1-\nu'^2\right)\left(\dot{E}_{i,k}^n\dot{u}_k+\dot{u}_{i,k}\dot{E}_k^n+\frac{\nu'}{\nu}\dot{u}_{i,k}\dot{u}_k\right)-\nu\nu'\dot{E}_{i,k}^n\dot{E}_k^n;\tag{2.18}$$

$$\dot{u}_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\left(1+\nu'^2\right)u_{i,k}\dot{u}_k+\nu\nu'\left(u_{i,k}\dot{E}_k^n+E_{i,k}^n\dot{u}_k\right)+\nu^2E_{i,k}^n\dot{E}_k^n;$$

$$\dot{E}_i^n=\frac{\partial E_i^n}{\partial t}+\left(1-\nu'^2\right)\left(E_{i,k}^n\dot{u}_k+u_{i,k}\dot{E}_k^n+\frac{\nu'}{\nu}u_{i,k}\dot{u}_k\right)-\nu\nu'E_{i,k}^n\dot{E}_k^n.$$

Для изотропного проводника, согласно (1.16), (1.17), уравнения (2.17) принимают вид

$$\begin{gathered}D_{1i}=\left(\mu^*-\nu'\overline{\mu}\right)u_{i,rr}+\left[\lambda^*+\mu^*-\nu'\left(\overline{\lambda}+\overline{\mu}\right)\right]u_{r,ri}+\nu'r'\dot{u}_i-\\-\nu\left[\overline{\mu}E_{i,rr}^n+\left(\overline{\lambda}+\overline{\mu}\right)E_{r,ri}^n-r'\dot{E}_i^n\right]+\frac{r}{\rho_e^c}j_i+F_i\ ;\\D_{2i}=\left(\overline{\mu}-\nu'\mu\right)u_{i,rr}+\left[\overline{\lambda}+\overline{\mu}-\nu'\left(\lambda+\mu\right)\right]u_{r,ri}+\nu'\left(4\kappa u_i+r\dot{u}_i\right)-\\-\nu\left[\mu E_{i,rr}^n+\left(\lambda+\mu\right)E_{r,ri}^n-4\kappa E_i^n-r\dot{E}_i^n\right]+\frac{r'}{\rho_e^c}j_i+F_i'\ ;\\D_{3i}=-p_{3,i}-\frac{r}{\rho_e^c}j_i-r'\left(\nu\dot{E}_i^n+\nu'\dot{u}_i\right)+F_i^3,\end{gathered}\tag{2.19}$$

где левые части определяются соотношениями (2.18).

В механике сплошных сред объемные силы обычно принимают заданными. Хотя в принципе они могут зависеть от искомых параметров уравнений, однако такая зависимость в большинстве задач пренебрежимо мала. В задачах электродинамики существенную роль играют пондеромоторные объемные силы, зависящие от электромагнитных параметров. Они обусловлены воздействием электрического и магнитного полей соответственно на заряженные и движущиеся заряженные элементы. Первые из них определяются напряженностью электрического поля согласно закону Кулона, а вторые – произведениями напряженности магнитного поля на скорости движения заряженных участков согласно законам Био-Савара и Ампера. Ограничимся рассмотрением объемных сил, связанных только с пондеромоторным воздействием электрического поля. В этом случае имеем выражения

$$\begin{gathered}F_i^1=n_1q_1\left(E_i+E_i^{\text{в}}\right);\ F_i^2=-n_2q_2\left(E_i+E_i^{\text{в}}\right);\ F_i^3=\rho_e^c\left(E_i+E_i^{\text{в}}\right);\\F_i=\left(n_1q_1-n_2q_2\right)\left(E_i+E_i^{\text{в}}\right);\ F_i'=\left(n_1q_1+n_2q_2\right)\left(E_i+E_i^{\text{в}}\right),\end{gathered}\tag{2.20}$$

где $E_i^{\text{в}}$ – заданная напряженность внешнего электрического поля, связанная с некоторой плотностью зарядов $\rho_e^{\text{в}}$ согласно теореме Гаусса

$$E^{\text{в}}_{i,i} = 4\pi k \rho^{\text{в}}_e. \qquad (2.21)$$

С учетом (2.16) уравнения сохранения массы (1.11) представляются в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left[\left(\rho - \nu'\rho'\right)\dot{u}_i - \nu\rho'\dot{E}^n_i\right]_{,i} = 0; \quad \frac{\partial\rho'}{\partial t} + \left[\left(\rho' - \nu'\rho\right)\dot{u}_i - \nu\rho\dot{E}^n_i\right]_{,i} = 0;$$

$$\frac{\partial\rho_3}{\partial t} + \left[\rho_3\left(\dot{u}_i + \frac{1}{\rho^c_e} j_i\right)\right]_{,i} = 0. \qquad (2.22)$$

При этом вследствие равенства $m_3\rho^c_e = -q_3\rho_3$ последнее уравнение в (2.22) тождественно уравнению (2.10).

Таким образом, уравнения (2.17), (2.22) или (2.19), (2.22) совместно с уравнением состояния $p_3 = p_3\left(\rho_3\right)$ образуют систему 13 уравнений относительно 16 параметров u_i, E^n_i, j_i, E^c_i, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, p_3$. Их замыкание можно осуществить на основе предположения о потенциальности поля E^c_i, обусловленного свободными зарядами, т.е. принять равенство

$$E^c_i = -\varphi_{,i}, \qquad (2.23)$$

где φ – скалярный потенциал. Тогда, согласно (2.8), получим уравнение

$$\varphi_{,rr} + 4\pi k \rho^c_e = 0, \qquad (2.24)$$

которое совместно с (2.23) замыкает указанную выше систему уравнений.

Системы уравнений (2.17) (или (2.19)), (2.22) – (2.24), где приняты обозначения (2.18), (2.20), описывают динамические связанные поля механических макроперемещений u_i каркаса проводника, образованного положительными и связанными отрицательными зарядами, напряженностей электрических полей E^n_i, E^c_i, обусловленных соответственно поляризацией и свободными зарядами, а также тока проводимости j_i. Уравнения инвариантны относительно преобразований Галилея.

§3. Уравнения электродинамики изотропных проводников.

Связанность механических и электрических процессов в проводниках, которая следует из уравнений (2.17), (2.19), (2.22) – (2.24), а также наблюдается в опытах, требует в общем случае их совместного изучения. Разделить их можно лишь приближенно или для некоторых гипотетических частных случаев. Так, если предположить, что каркас проводника, образованный связанными зарядами, движется с постоянной скоростью $\dot{u}_i = U_i = \text{const}$, то в уравнении (2.11) слагаемое $\rho^n_{eo} u_{i,i}$ обращается в нуль. Поэтому в уравнениях (2.16) – (2.19), (2.22) следует положить нулю все слагаемые с множителем ν'. Тогда уравнения (2.19) с учетом (2.18) для изотропного проводника принимают вид

$$\rho'\left(\frac{\partial^2 E^n_i}{\partial t^2} + 2U_k\frac{\partial E^n_{i,k}}{\partial t} + U_k U_p E^n_{i,kp}\right) - \nu\rho\dot{E}^n_{i,k}\dot{E}^n_k =$$

$$= \bar{\mu}E^n_{i,rr} + \left(\bar{\lambda} + \bar{\mu}\right)E^n_{r,ri} - r'\left(\frac{\partial E^n_i}{\partial t} + U_k E^n_{i,k}\right) - \frac{1}{\nu}\left(\frac{r}{\rho^c_e} j_i + F_i\right);$$

$$\rho\left(\frac{\partial^2 E^n_i}{\partial t^2} + 2U_k\frac{\partial E^n_{i,k}}{\partial t} + U_k U_p E^n_{i,kp}\right) - \nu\rho'\dot{E}^n_{i,k}\dot{E}^n_k =$$

$$= \mu E^n_{i,rr} + \left(\lambda + \mu\right) E^n_{r,ri} - 4\kappa E^n_i - r\left(\frac{\partial E^n_i}{\partial t} + U_k E^n_{i,k}\right) - \frac{1}{\nu}\left(\frac{r'}{\rho^c_e} j_i + F'_i\right);$$

$$\frac{\rho_3}{\rho^c_e}\left[\frac{\partial j_i}{\partial t} + U_k j_{i,k} + \left(\frac{1}{\rho^c_e} j_i\right)_{,k} j_k\right] = -p_{3,i} - \frac{r}{\rho^c_e} j_i - \nu r'\left(\frac{\partial E^n_i}{\partial t} + U_k E^n_{i,k}\right) + F^3_i . \quad (3.1)$$

Исключая из первых двух уравнений (3.1) нелинейные слагаемые $\nu\rho\dot{E}^n_{i,k}\dot{E}^n_k$ и $\nu\rho'\dot{E}^n_{i,k}\dot{E}^n_k$, с учетом (2.20) получим систему двух уравнений электродинамики равномерно движущегося проводника

$$\frac{\partial^2 E^n_i}{\partial t^2} + 2U_k \frac{\partial E^n_{i,k}}{\partial t} + U_k U_p E^n_{i,kp} = c_2^2 E^n_{i,rr} + \left(c_1^2 - c_2^2\right) E^n_{r,ri} - pE^n_i -$$

$$-b\left(\frac{\partial E^n_i}{\partial t} + U_k E^n_{i,k}\right) + nj_i - m\left(E_i + E^{\text{в}}_i\right);$$

$$\frac{\rho_3}{\rho^c_e}\left[\frac{\partial j_i}{\partial t} + U_k j_{i,k} + \left(\frac{1}{\rho^c_e} j_i\right)_{,k} j_k\right] = -p_{3,i} - \frac{r}{\rho^c_e} j_i - \nu r'\left(\frac{\partial E^n_i}{\partial t} + U_k E^n_{i,k}\right) + \rho^c_e\left(E_i + E^{\text{в}}_i\right), \quad (3.2)$$

где обозначено

$$c_1^2 = \frac{1}{4\rho_1\rho_2}\left[\left(\lambda + 2\mu\right)\rho - \left(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}\right)\rho'\right]; \quad c_2^2 = \frac{1}{4\rho_1\rho_2}\left(\mu\rho - \bar{\mu}\rho'\right); \quad p = \frac{\kappa\rho}{\rho_1\rho_2};$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2}\right); \quad n = \frac{1}{2\nu\rho^c_e}\left(\frac{r_2}{\rho_2} - \frac{r_1}{\rho_1}\right); \quad m = \frac{1}{2\nu}\left(\frac{q_1}{m_1} + \frac{q_2}{m_2}\right). \quad (3.3)$$

Уравнения (2.22) – (2.24), (3.2) и уравнения состояния $p_3 = p_3\left(\rho_3\right)$ образуют замкнутую систему относительно 14 параметров $E^n_i,\ j_i,\ E^c_i,\ \varphi, \rho_1, \rho_2, \rho_3, p_3$. При этом они инвариантны относительно преобразований Галилея.

В случае неподвижного проводника $\left(U_i = 0\right)$ уравнения (3.2) принимают вид

$$\frac{\partial^2 E^n_i}{\partial t^2} + b\frac{\partial E^n_i}{\partial t} = c_2^2 E^n_{i,rr} + \left(c_1^2 - c_2^2\right) E^n_{r,ri} - pE^n_i + nj_i - m\left(E_i + E^{\text{в}}_i\right);$$

$$\frac{\rho_3}{\rho^c_e}\left[\frac{\partial j_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho^c_e} j_i\right)_{,k} j_k\right] = -p_{3,i} - \frac{r}{\rho^c_e} j_i - \nu r'\frac{\partial E^n_i}{\partial t} + \rho^c_e\left(E_i + E^{\text{в}}_i\right). \quad (3.4)$$

При этом вполне естественно, что они перестают быть инвариантными относительно преобразований Галилея, так как при $U_i = 0$ исчезают некоторые слагаемые, обеспечивающие эту инвариантность. Поэтому требовать инвариантность уравнений (3.4) было бы серьезной ошибкой.

Если бесконечный неподвижный проводник находится в однородном постоянном внешнем электрическом поле $(E^{\text{в}}_i = \text{const})$, то уравнения (2.22) – (2.24), (3.4) с учетом (2.14) имеют стационарные решения

$$j_i = \sigma E^{\text{в}}_i;\ E^n_i = -E^{\text{c}}_i = \frac{n\sigma - m}{p} E^{\text{в}}_i;\quad \rho_3 = \text{const};\ n_1 = n_2 = n_3 = N;\ \sigma = \frac{\rho^{c2}_e}{r}. \quad (3.5)$$

Первое соотношение в (3.5) представляет собой закон Ома для плотности тока, где σ – электропроводность. Однако в общем случае, когда электродинамические параметры нестационарны или неоднородны, необходимо исходить из уравнений (2.22) – (2.24), (3.4).

При отсутствии свободных зарядов $(q_1 = q_2 = q,\ q_3 = 0)$ имеют место равенства

$$\rho_e^c = 0;\ j_i = 0;\ E_i^c = 0;\ p_3 = 0;\ r_1 = r_2 = 0;\ E_i^n = E_i. \tag{3.6}$$

В этом случае из первого уравнения (3.4) следует уравнение электродинамики для диэлектрика

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c_2^2 E_{i,rr} + \left(c_1^2 - c_2^2\right) E_{r,ri} - s^2 E_i + \overline{f}_i, \tag{3.7}$$

где

$$c_1^2 = \frac{1}{4\rho_1\rho_2}\left[(\lambda + 2\mu)\rho - \left(\overline{\lambda} + 2\overline{\mu}\right)\rho'\right];\quad c_2^2 = \frac{1}{4\rho_1\rho_2}(\mu\rho - \overline{\mu}\rho');$$

$$\overline{f}_i = -\frac{4\pi N^2 q^2 \rho}{\rho_1\rho_2}\, E_i^{\text{в}};\quad s^2 = \frac{\left(\kappa + 4\pi N^2 q^2\right)\rho}{\rho_1\rho_2}. \tag{3.8}$$

Второе уравнение (3.4) удовлетворяется тождественно.

Уравнения электродинамики изотропных проводников (3.2), (3.4) получены на основе уравнений трехконтинуумной механики сплошных сред, базирующихся, как известно, на законах Ньютона. Естественно, возникает вопрос, как они связаны с общеизвестными и общепринятыми уравнениями электродинамики Максвелла [16], построенными путем сведения к дифференциальной форме фундаментальных эмпирических законов электромагнетизма и введения понятия тока смещения для устранения определенных противоречий. Для выяснения этого вопроса исследуем некоторые частные случаи системы уравнений (3.4) для неподвижного проводника.

Если пренебречь напряженностями электрических полей, связанных со свободными зарядами и заданными внешними источниками, а также изменяемостью во времени и пространстве дивергенции электрического поля, плотности и давления свободных зарядов, т.е. принять $E_i^c = E_i^{\text{в}} = 0,\ E_i^n = E_i,\ E_{r,r} = 0,\ \dfrac{\partial \rho_e^c}{\partial t} = 0,\ p_{3,i} = 0$, то система уравнений (3.4) в линейном приближении принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + b\frac{\partial E_i}{\partial t} = c_2^2 E_{i,rr} - pE_i + nj_i - mE_i;\quad \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{r}{\rho_3} j_i = -\frac{\nu r' \rho_e^c}{\rho_3}\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\rho_e^{c^2}}{\rho_3} E_i. \tag{3.9}$$

Вводя формальное обозначение

$$\operatorname{rot} E_i = -\frac{1}{c_2}\frac{\partial B_i}{\partial t},\quad \left(\operatorname{rot} E_i = e_{ipq} E_{q,p}\right). \tag{3.10}$$

Приходим, по сути, к опытному закону электромагнитной индукции Фарадея или второму уравнению Максвелла, где B_i – вектор магнитной индукции; e_{ipq} – единичный антисимметричный тензор. Тогда пользуясь равенством $E_{i,rr} = E_{r,ri} - e_{ipq} e_{qmn} E_{n,mp}$, из первого уравнения (3.9) получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + b\frac{\partial E_i}{\partial t} = c_2 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} B_i - (p + m) E_i + nj_i. \tag{3.11}$$

Рассмотрим случай, когда во втором уравнении (3.9) можно пренебречь изменением тока и напряженности во времени, т.е. имеет место закон Ома

$$j_i = \sigma E_i. \tag{3.12}$$

Подставим (3.12) в (3.11) и проведем интегрирование по времени, пренебрегая слагаемым $(n\sigma - p - m) E_i$ и начальными условиями. В результате приходим к уравнению

$$c_2 \operatorname{rot} B_i = bE_i + \frac{\partial E_i}{\partial t} = \frac{b}{\sigma} j_i + \frac{\partial E_i}{\partial t}, \qquad (3.13)$$

совпадающему по форме с первым уравнением Максвелла, где, согласно принятым предпосылкам, имеет место равенство $j_{i,i} = \sigma E_{i,i} = 0$.

В случае, когда можно пренебречь сопротивлением проводника $(r_1 = r_2 = 0)$, из второго уравнения (3.9) следует равенство

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} = \frac{\rho_e^{c2}}{\rho_3} E_i. \qquad (3.14)$$

Исключая из (3.11), (3.14) напряженность E_i и проводя интегрирование по времени, приходим к уравнению

$$c_2 \operatorname{rot} B_i = \frac{(p\rho_3 + m)}{\rho_e^{c2}} j_i + \frac{\partial E_i}{\partial t}, \qquad (3.15)$$

которое также совпадает по форме с первым уравнением Максвелла.

В общем случае, если из второго уравнения (3.9) и (3.11) исключить ток j_i, то после интегрирования по времени и пренебрежения слагаемым $(n\sigma - p - m)E_i$ придем к уравнению

$$c_2 \operatorname{rot} B_i = \frac{n\rho_3}{r} j_i + \frac{\partial E_i}{\partial t} + \left[b + \frac{\nu n \rho_e^c r'}{r} \right] E_i, \qquad (3.16)$$

которое по форме является более общим по сравнению с первым уравнением Максвелла.

Таким образом, уравнения (3.4) для определенных частных случаев могут быть представлены в форме уравнений Максвелла, т.е. они согласуются с фундаментальными опытными законами Фарадея, Ампера, Био – Савара, положенными в основу теории Максвелла. Если сравнить уравнения (3.13), (3.15), (3.16), то можно прийти к выводу, что коэффициенты пропорциональности в зависимости $\operatorname{rot} B_i$ от j_i могут быть различными для различных проводников и различных условий проведения опыта. В целом же уравнения (3.4) являются более общими по сравнению с уравнениями Максвелла и законом Ома и имеют вполне четкий механический смысл.

Необходимо обратить внимание также на то обстоятельство, что описание электромагнитных волн в теории Максвелла стало возможным только за счет искусственного введения тока смещения в первоначальное уравнение, построенное на основе опыта. В уравнениях же (3.13), (3.15), (3.16) соответствующее слагаемое $\partial E_i / \partial t$ входит вполне естественно и характеризует инерционность поляризации материала. Оно сохраняется и в случае диэлектрика $(q_1 = q_2,\ q_3 = 0)$, в то время как ток смещения, согласно (2.15), для диэлектрика равен нулю.

Заключение.

Уравнения Максвелла являются теоретической основой учения об электрических и магнитных явлениях и занимают исключительное место в современной физической науке, имеющей многочисленные применения в технике и быту. Они явились уникальной трансформацией в дифференциальную форму фундаментальных опытных законов Кулона, Ампера, Био-Савара и электромагнитной индукции Фарадея. Однако в первом варианте сформулированные Максвеллом динамические дифференциальные уравнения электромагнитного поля не описывали электромагнитные волны. В следующем варианте дифференциальных уравнений Максвелл дополнил ток проводимости, формирующий магнитное поле, током смещения, аргументируя его происхождение поляризацией молекул под воздействием электрического поля. Это позволило описать электромагнитные волны, однако строгого обоснования сущности и физического смысла тока смещения не было дано. Это вызвало отрицательное отношение к уравнениям и току смещения части физиков [9], а также попытки обосновать ток смещения необходимостью симметрии [10] уравнений Максвелла или пояснением [4], что ток смещения не является током в обычном смысле слова, т. е. перемещением зарядов. Нет оснований также определять ток смещения как производную по времени [6] вектора электрической индукции, так как электрическая индукция составляет ту часть электрического поля, которая создается свободными зарядами [4] независимо от наличия в нем диэлектриков или проводников.

Обосновать и объяснить физическую сущность слагаемого, введенного Максвеллом под названием «ток смещения», позволяет новый принцип построения уравнений электромагнитомеханики диэлектриков [14, 15] и проводников. Для диэлектрика в основу построения положена двухконтинуумная модель механики, описывающая деформирование диэлектрика как смеси попарно связанных в нейтральные образования положительных и отрицательных зарядов. Аналогично для проводника принимается трехконтинуумная модель механики, описывающая деформирование каркаса положительных и связанной с ними части отрицательных зарядов и течение в нем свободной части отрицательных зарядов (электронного газа). Исходя из уравнений баланса носителей положительных зарядов, связанной с ними части отрицательных и свободной части отрицательных зарядов, а также теоремы Гаусса уравнения трехконтинуумной механики проводника преобразуются в систему уравнений относительно макроперемещений каркаса связанных положительных и отрицательных зарядов, напряженностей электрических полей, порождаемых связанными и свободными зарядами, а также плотности тока проводимости. Для частных случаев из них следует закон Ома и представление в форме уравнений Максвелла. При этом слагаемое, введенное Максвеллом искусственно как ток смещения, входит вполне естественно и характеризует инерционность поляризации каркаса связанных зарядов и порождаемой нею напряженности электрического поля.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Викладено новий принцип побудови теорії електромагнітних хвиль і електропровідності. В основу покладено схему металічного провідника у вигляді сукупності взаємодіючих нейтральних атомів, кожен з яких складається з позитивно зарядженого ядра, зв'язаної з ним частини електронів і вільної частини електронів, що мають негативний заряд. Макроскопічна модель провідника приймається у вигляді трьох взаємопроникних взаємодіючих континуумів – позитивно зарядженої сукупності ядер, негативно зарядженої сукупності зв'язаних з ядрами електронів і негативно зарядженої сукупності вільних електронів (електронного газу). Вводяться щільності носіїв відповідних зарядів, а також відповідні парціальні переміщення і парціальні напруження. Формулюються рівняння балансу щільностей носіїв зарядів, рівняння збереження імпульсу і рівняння стану, що зв'язують динамічні і кінематичні параметри. На основі рівнянь збереження заряду і теореми Гауса-Остроградського рівняння триконтинуумної механіки провідника перетворюються у систему зв'язаних динамічних рівнянь відносно макропереміщень каркаса зв'язаних зарядів, напруженостей електричних полів, зумовлених зв'язаними і вільними зарядами, а також щільності струму провідності. Рівняння інваріантні відносно перетворень Галілея. Як частинні випадки з них випливають закон Ома і рівняння Максвелла.

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-и томах. Т. 5. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.

2. *Де Гроот С.Р.* Термодинамика необратимых процессов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 280 с.

3. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. – 447 с.

4. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
5. *Рахматуллин Х.А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. мат. и механика. – 1956. – **20**, вып.2. – С. 184 – 195.
6. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
7. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
8. *Хорошун Л.П., Солтанов Н.С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. – К.: Наук. думка, 1984. – 112с.
9. *Шапиро И.С.* К истории открытия уравнений Максвелла // Успехи физ. наук. – 1972. – **108**, № 2. – С. 319 – 333.
10. *Borc A.M.* Maxwell, Displacement Current, and Symmetry // American J. of Physics. – 1963, № 11. – P. 854 – 859.
11. *Demiray H.A.* Continuum Theory of Elastic Solid State Plasma // J. Techn. Phys. – 1978. – **19,** N 2. – P. 267 – 279.
12. *Haywang W., Lubitz K., Wersing W.* Piezoelectricity. Evolution and Future of a Technology. – Berlin: Springer, 2008. – 579 p.
13. *Katzir S.* The Beginning of Piezoelectricity. – Berlin: Springer, 2006. – 266 p.
14. *Khoroshun L.P* General Dynamic Equations of Electromagnetomechanics for Dielectrics and Piezoelectrics // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 4. – P. 407 – 420.
15. *Khoroshun L.P.* Two – Continuum Mechanics of Dielectrics as the Basis of the Theory of Piezoelectricity and Electrostriction // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 143 – 154.
16. *Maxwell J.C.* A Treatise on Electricity and Magnetism. In 2 vol.: Vol. 2. – Oxford: Clarendon Press. – **24**. – 445 p.
17. *Mol'chenko L.V., Fedorchenko L.N., Vasil'eva L.Ya.* Nonlinear Theory of Magnetoelasticity of Shells of Revolution with Joule Heat Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 3. – P. 306 – 314.
18. *Moon F.C.* Magneto-Solid Mechanics. – New York: Wiley, 1984. – 437 p.
19. *Wang Z.K., Chen G.C.* A general solution and the application of space axisymmetric problem in piezoelectric material // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 1994 –**15**, N 7. – P. 615 – 626.
20. *Wen C.W., Weng G.J.* Theoretical approach to effective electrostriction in inhomogeneous materials // Phys. Rev. B. – 2000. – **61**, N 1. – P. 258 – 265.
21. *Yamamoto Y., Miya K.* Elektromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. – Amsterdam: Elsevier Science – North Holland, 1987. – 450 p.
22. *Yang J.* An Introduction to the Theory of Piezoelectricity. – New York: Springer, 2005. – 299 p.
23. *Ye Z.G.* Handbook of Advanced Dielectric, Piezoelectric and Ferroelectric Materials. Synthesis, Properties and Applications. – Cambridge: Elsevier Science and Technology, 2008. – 1096 p.
24. *Zhang T.Y., Gao C.F.* Fracture behaviors of piezoelectric materials // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2004. – **41**, N 1 – 3. – P. 339 – 379.

Поступила 04.03.2019 Утверждена в печать 05.11.2019