

Э. И. Старовойтов<sup>1</sup>, Д. В. Леоненко<sup>2</sup>

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ  
СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ**

*Белорусский государственный университет транспорта,  
246043, Республика Беларусь, г. Гомель, ул. Кирова, 34  
e-mail: <sup>1</sup> edstar0@yandex.by; <sup>2</sup> leoden@tut.by*

**Abstract.** The deformation of a three-layer elastoplastic bar with a compressible filler in the neutron flux is studied. To describe the kinematics of an asymmetric over thickness package, the hypotheses of a broken line is accepted: the Bernoulli's hypothesis is true in the thin bearing layers; the Timoshenko's hypothesis is true in the compressible over thickness filler with a linear approximation of displacements over the layer thickness. The filler's work in the tangential direction is taken into account. The physical stress-strain relations correspond to the theory of small elastoplastic deformations. A system of differential equilibrium equations is obtained by the variational method. The kinematic conditions of simply supported faces of the bar on the immovable in space rigid supports are assumed on the boundary. The solving the boundary problem is reduced to the search for four functions, namely: deflections and longitudinal displacements of the medial surfaces of the bearing layers. An analytical solution is obtained by the method of elastic solutions. Its numerical analysis is performed for the case of uniformly distributed loading.

**Keywords:** deformation, three-layer rod, plastic, compressible filler, neutron flux.

**Введение.**

В связи с широким применением в промышленности и строительстве неоднородных, в том числе трехслойных элементов конструкций, актуальной становится проблема создания адекватных математических моделей для описания их деформирования. В работах [3, 7, 9, 10] рассмотрены различные математические модели динамического деформирования неоднородных упругих цилиндрических оболочек, приведены постановки начально-краевых задач, изложены методы их решения. В статьях [11, 13] исследовано деформирование композитных многослойных пластин и балок, в том числе выполненных из функционально-градиентных материалов и с жестким соединением между слоями. Публикации [5, 12] посвящены экспериментальному и теоретическому исследованию параметров свободных колебаний трехслойных панелей. Изотермическое динамическое деформирование слоистых элементов конструкций, в том числе связанных с упругим основанием, под действием непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в работах [6, 14, 16, 17, 19]. Свободные колебания трехслойных круговых пластин, вызванных тепловым и радиационным ударами, рассмотрены в статьях [8, 15]. Работы [2, 4, 18, 20] посвящены исследованию квазистатического деформирования трехслойных упругих и упругопластических пластин.

В статье исследовано деформирование трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым заполнителем, составленного из физически нелинейных материалов и находящегося в нейтронном потоке.

**§1. Постановка краевой задачи (нагружение из естественного состояния).**

Рассмотрен несимметричный по толщине трехслойный стержень (рис. 1). Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в заполнителе справедлива гипотеза С.П. Тимошенко. На границах контакта используем условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат  $x, y, z$  отнесена к срединной плоскости заполнителя. На стержень действует поверхностная нагрузка  $q(x)$  и подводится *нейтронный поток* плотностью  $\varphi_0$  в направлении, противоположном внешней нормали. Через  $w_k(x)$  и  $u_k(x)$  обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей *несущих* слоёв,  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя,  $h_3 = 2c$  ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя),  $b_0$  – ширина стержня.

Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате которых в них возникает объемная деформация  $\theta_I$ , изменяются упругие и, особенно, пластические характеристики материала. Согласно известным экспериментальным данным [1] рост величины нейтронного потока

$$I(t) = \varphi t \tag{1.1}$$

( $\varphi$  – интенсивность потока, нейтрон/( $m^2 \cdot c$ ),  $t$  – время) в пределах малых деформаций, как правило, приводит к радиационному упрочнению материала, вызванному ростом предела текучести. Влияние нейтронного облучения на параметры упругости (модуль Юнга, коэффициент Пуассона и т. д.) незначительно и в дальнейшем не учитывается.

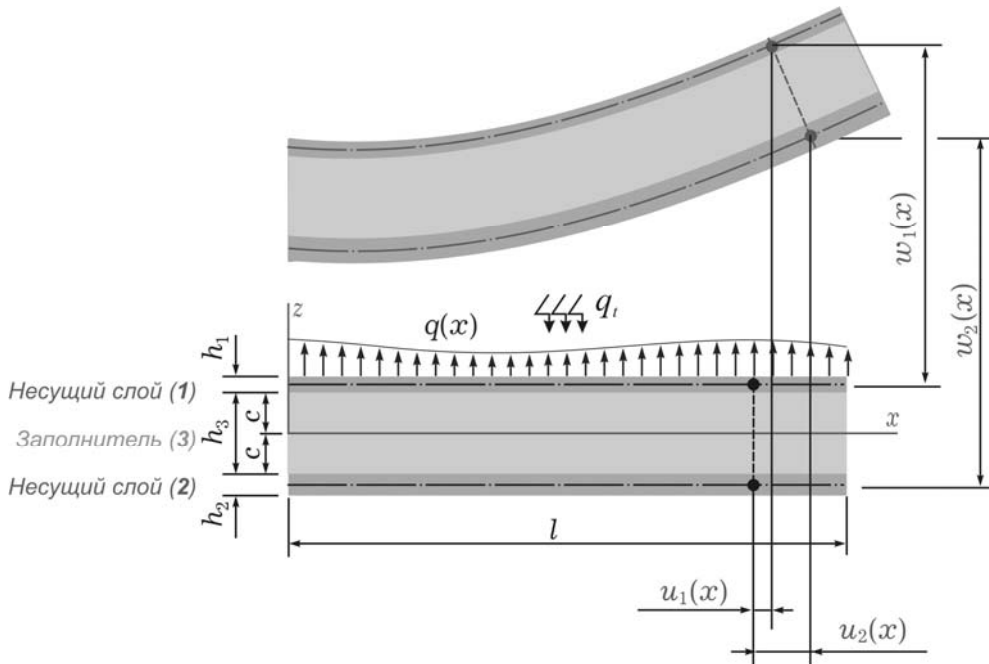


Рис. 1

В линейном приближении принято, что изменение объема материала прямо пропорционально потоку  $I(z)$  [1] и, следовательно,

$$\theta_I = BI(z), \tag{1.2}$$

где  $B$  – константа, получаемая из опыта.

Пусть на границу тела, занимающего полупространство  $z \geq 0$ , параллельно оси  $z$  падают нейтроны с одинаковой интенсивностью  $\varphi_0$ . Тогда интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости параллельной границе  $z = \text{const}$ , будет [1]

$$\varphi(z) = \varphi_0 e^{-\mu z}; \quad \mu = \sigma n_0 = \sigma \frac{A_0 \rho}{A}, \quad (1.3)$$

где  $\mu$  – величина макроскопического эффективного сечения (1/см);  $\sigma$  – эффективное сечение, отнесенное к одному ядру;  $n_0$  – число ядер в 1 см<sup>3</sup>;  $A_0$  – число Авогадро;  $\rho$  – плотность;  $A$  – атомный вес.

Для алюминия  $\sigma = 0,21 \cdot 10^{-24}$  см<sup>2</sup>;  $A_0 = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>; плотность  $\rho = 2,7$  г/см<sup>3</sup>;  $A = 27$  а.е.м. Подставив их в (1.3), получим  $\mu = 1,26$  м<sup>-1</sup>. Отметим, что  $\mu$  – обратно величине свободного пробега нейтронов, которая для быстрых нейтронов в алюминии  $\lambda = 14,1 - 15,9$  см, в полиэтилене  $5,5 - 13,9$  см.

Если в (1.1)  $\varphi = \varphi_0$  не зависит от времени, то к моменту  $t$  через сечение  $z$  пройдет интегральный поток

$$I(z, t) = \varphi_0 t e^{-\mu z}. \quad (1.4)$$

Величина  $I_0 = \varphi_0 t$  дает суммарный поток нейтронов на единицу площади поверхности тела. В реакторах  $\varphi_0$  имеет порядок  $10^{17} - 10^{18}$  нейтрон / (м<sup>2</sup>с), а  $I_0$  достигает значений  $10^{23} - 10^{27}$  нейтрон / м<sup>2</sup>, причем  $\theta_I$  достигает значений порядка 0,1. Следовательно, в зависимости от энергии нейтронов и облучаемого материала величина  $B$  может быть порядка  $10^{-28} - 10^{-23}$  м<sup>2</sup> / нейтрон.

Предположим, что в процессе деформирования материалы несущих слоев стержня проявляют упругопластические свойства, заполнитель – нелинейно упругий. Для описания их деформирования в нейтронном потоке используем следующие физические уравнения состояния, учитывающие влияние облучения на пластические свойства материалов и объемную деформацию (1.2):

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, I))\varepsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = K_k(3\varepsilon^{(k)} - B_k I) \quad (k = 1, 2, 3);$$

$$s_{zz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, I))\varepsilon_{zz}^{(3)}; \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}, I))\varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad (1.5)$$

где  $s_i^{(k)}$ ,  $\varepsilon_i^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $s_{xz}^{(3)}$ ,  $\varepsilon_{xz}^{(3)}$  – тангенциальное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе;  $G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования материала  $k$ -го слоя;  $\omega^{(k)}$  – универсальные функции нелинейности материалов несущих слоев ( $k = 1, 2$ ) и заполнителя ( $k = 3$ ) при нагружении из естественного состояния, например, для сплава Д16Т она будет

$$\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, I) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(I); \\ A_k \left( 1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)}(I)}{\varepsilon_u^{(k)}} \right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}(I); \end{cases}$$

$$\varepsilon_y^{(k)}(I) = \varepsilon_{y0} \left[ 1 + A(1 - \exp(-\xi I))^{1/2} \right],$$

где  $\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций;  $\varepsilon_y^{(k)}$  – деформационный предел текучести материала несущего слоя;  $I$  – интегральный нейтральный поток (1.4);  $A_k$  – константы материалов, получаемые экспериментально.

В дальнейшем полагаем, что изменения во времени внешних нагрузок и граничных перемещений происходят таким образом, что соответствующие траектории нагружения не относятся к классу сложных нагружений, а радиационный рост предела пластичности не превышает роста интенсивности деформаций в облучаемых точках твердого тела, что препятствовало бы образованию пластических деформаций.

Перемещения в слоях  $u^{(k)}(x, z)$  и  $w^{(k)}(x, z)$  можно выразить через четыре искомые функции  $w_1(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $w_2(x)$  и  $u_2(x)$  – прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоев:

– для несущих слоев имеем формулы

$$u^{(1)} = u_1 - \left( z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left( z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

– для заполнителя имеем формулы

$$u^{(3)} = \left( 1 + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right);$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1.6)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Внутренние усилия в слоях вводятся соотношениями

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz; \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz; \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz;$$

$$N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} dz; \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz, \quad (1.7)$$

где  $\sigma_{xx}^{(k)}$ ,  $\sigma_{xz}^{(3)}$ ,  $\sigma_{zz}^{(3)}$  – компоненты тензора напряжений.

Уравнения равновесия для рассматриваемого стержня получены вариационным методом Лагранжа:

$$\delta A_e - \delta A_i = 0, \quad (1.8)$$

где  $\delta A_e$  – вариация работы внешних сил;  $\delta A_i$  – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta A = b_0 \int_0^l q \delta w_1 dx; \quad \delta A_i = b_0 \int_0^l \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] dx.$$

Вариации деформаций следуют из соотношений Коши [2] с учетом перемещений (1.6)

$$\delta \varepsilon_x^{(1)} = \delta u_{1,x} - \left( z - c - \frac{h_1}{2} \right) \delta w_{1,xx} \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon_x^{(2)} &= \delta u_{2,x} - \left( z + c + \frac{h_2}{2} \right) \delta w_{2,xx} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\
\delta \varepsilon_{xx}^{(3)} &= \left( 1 + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} \delta u_{1,x} + \frac{h_1}{4} \delta w_{1,xx} \right) + \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} \delta u_{2,x} - \frac{h_2}{4} \delta w_{2,xx} \right); \\
\delta \varepsilon_{zz}^{(3)} &= \frac{1}{2c} (\delta w_1 - \delta w_2) \quad (-c \leq z \leq c); \\
\delta \varepsilon_{xz}^{(3)} &= \left( \frac{2z + h_1}{8c} + \frac{1}{4} \right) \delta w_{1,x} + \left( \frac{-2z + h_2}{8c} + \frac{1}{4} \right) \delta w_{2,x} + \frac{\delta u_1 - \delta u_2}{4c}. \quad (1.9)
\end{aligned}$$

После подстановки вариаций деформаций (1.9) в уравнение работ (1.8) с учетом усилий в слоях (1.5) получим систему уравнений равновесия в усилиях

$$\begin{cases}
H_1 - P_{1,x} = 0, \\
H_1 + P_{2,x} = 0, \\
S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 q, \\
S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0.
\end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь обобщенные внутренние усилия выражаются через усилия (1.7)

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{Q^{(3)}}{2c}; \quad H_2 = \frac{N_z^{(3)}}{2c}; \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}; \quad P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)}; \\
T_1 &= \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}; \quad S_1 = \left( c + \frac{h_1}{2} \right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)}; \\
T_2 &= \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}; \quad S_2 = - \left( c + \frac{h_2}{2} \right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} + \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)}. \quad (1.11)
\end{aligned}$$

В дальнейшем принимаем кинематические граничные условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в поперечных сечениях  $x = 0, l$  ( $l$  – длина стержня) выполняются следующие условия:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (1.12)$$

Используя соотношения (1.5), выделим в тензоре напряжений упругие (индекс « $e$ ») и нелинейные (индекс « $\omega$ ») слагаемые, которые будут включать и радиационные добавки. Для рассматриваемого стержня получим равенства:

для несущих слоев ( $k = 1, 2$ ) –

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= \sigma_{xx}^{(k)e} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}; \quad \sigma_{xx}^{(k)e} = 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)}; \\
\sigma_{xx}^{(k)\omega} &= \frac{4}{3} G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} + K_k B_k I;
\end{aligned}$$

для заполнителя –

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(3)} &= \sigma_{xx}^{(3)e} - \sigma_{xx}^{(3)\omega}; \quad \sigma_{xx}^{(3)e} = K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}; \quad \sigma_{xx}^{(3)\omega} = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} + K_3 B_3 I; \\
\sigma_{zz}^{(3)} &= \sigma_{zz}^{(3)e} - \sigma_{zz}^{(3)\omega}; \quad \sigma_{zz}^{(3)e} = K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}; \quad \sigma_{zz}^{(3)\omega} = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} + K_3 B_3 I;
\end{aligned}$$

$$\sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}; \quad \sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}. \quad (1.13)$$

Проведя операцию, подобную (1.13), с внутренними усилиями (1.7), получим

$$\begin{aligned} N_x^{(k)} &= N_x^{(k)e} - N_x^{(k)\omega}; \quad M_x^{(k)} = M_x^{(k)e} - M_x^{(k)\omega} \quad (k=1, 2, 3); \\ N_z^{(3)} &= N_z^{(3)e} - N_z^{(3)\omega}; \quad M_z^{(3)} = M_z^{(3)e} - M_z^{(3)\omega}; \quad M_{xz}^{(3)} = M_{xz}^{(3)e} - M_{xz}^{(3)\omega}; \\ Q^{(3)} &= Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Линейные (индекс «e») и нелинейные слагаемых (индекс «ω») в (1.14) имеют вид:

$$\begin{aligned} N_x^{(k)e} &= b_0 \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_x^{(k)} dz; \quad M_x^{(k)e} = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_x^{(k)} z dz; \\ N_x^{(k)\omega} &= \frac{4}{3} b_0 G_k \int_{h_k} \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} dz + b_0 K_k \int_{h_k} B_k I dz; \\ M_x^{(k)\omega} &= \frac{4}{3} b_0 G_k \int_{h_k} \varepsilon_{xx}^{(k)} \omega^{(k)} z dz + b_0 K_k \int_{h_k} B_k I z dz \quad (k=1, 2, 3); \\ N_z^{(3)e} &= b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- \varepsilon_x^{(3)}) dz; \quad M_z^{(3)e} = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- \varepsilon_x^{(3)}) z dz; \\ M_{xz}^{(3)e} &= 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} z dz; \quad Q^{(3)e} = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} dz; \\ N_z^{(3)\omega} &= \frac{2}{3} b_0 G_3 \int_{h_3} (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} dz + b_0 K_3 \int_{h_3} B_3 I dz; \\ M_z^{(3)\omega} &= \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)}) \omega^{(3)} z dz + b_0 K_3 \int_{h_3} B_3 I z dz; \quad M_{xz}^{(3)\omega} = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} z dz; \\ Q^{(3)\omega} &= 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} dz. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Подставив в обобщенные усилия (1.11) внутренние усилия (1.14), (1.15), в которых деформации выражены через перемещения (1.6), и далее, подставив полученное в уравнения (1.10), приходим к системе нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающей деформирование упругопластического стержня в нейтронном потоке.

## §2. Аналитическое решение.

Для решения полученной системы применим метод упругих решений Ильюшина [2]. В результате имеем следующую систему линейных дифференциальных уравнений в итерациях:

$$\begin{aligned} a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_1^n{}_{,xx} - a_5 u_2^n{}_{,xx} + a_2 w_1^n{}_{,x} + a_3 w_2^n{}_{,x} - 2a_6 w_1^n{}_{,xxx} + a_7 w_2^n{}_{,xxx} &= p_\omega^{(n-1)}; \\ -a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_1^n{}_{,xx} - a_9 u_2^n{}_{,xx} - a_{10} w_1^n{}_{,x} - a_{17} w_2^n{}_{,x} - a_6 w_1^n{}_{,xxx} + 2a_7 w_2^n{}_{,xxx} &= h_\omega^{(n-1)}; \\ -a_2 u_1^n{}_{,x} + a_{10} u_2^n{}_{,x} + 2a_6 u_1^n{}_{,xxx} + a_6 u_2^n{}_{,xxx} + a_{11} w_1^n{}_{,xx} - a_{12} w_2^n{}_{,xx} + \\ + a_{15} w_1^n{}_{,xxxx} - a_{16} w_2^n{}_{,xxxx} + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n &= q + q_\omega^{(n-1)}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
& -a_3 u_1^n{}_{,x} + a_{17} u_2^n{}_{,x} - a_7 u_1^n{}_{,xxx} - 2a_7 u_2^n{}_{,xxx} - a_{12} w_1^n{}_{,xx} + a_{14} w_2^n{}_{,xx} - \\
& -a_{16} w_1^n{}_{,xxxx} + a_{13} w_2^n{}_{,xxxx} - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{(n-1)},
\end{aligned}$$

где  $n$  – номер линейного приближения;  $u_k^n, w_k^n$  – линейные приближения искомым перемещений, коэффициенты –

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{G_3}{2c}; \quad a_2 = \frac{G_3}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}; \quad a_3 = \frac{G_3}{2} \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_5 &= \frac{K_3^+ c}{3}; \quad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}; \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6}; \quad a_8 = \frac{K_3^+}{2c}; \quad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \\
a_{10} &= \frac{G_3}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) + \frac{K_3^-}{2}; \quad a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \\
a_{12} &= \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2} \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6}; \\
a_{14} &= \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2} \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{15} = \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6}; \quad a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}; \\
a_{17} &= \frac{G_3}{2} \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) - \frac{K_3^-}{2}; \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k.
\end{aligned}$$

В дополнительных нагрузках  $p_\omega^{(n-1)}, h_\omega^{(n-1)}, q_\omega^{(n-1)}, g_\omega^{(n-1)}$  на первом шаге приближения нелинейные слагаемые принимаются равными нулю ( $\omega_k^{(1)} = 0$ ), а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущей итерации:

$$\begin{aligned}
p_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left( H_1^{\omega(n-1)} - P_1^{\omega(n-1)}{}_{,x} \right); \quad q_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} \left( S_1^{\omega(n-1)}{}_{,xx} + H_2^{\omega(n-1)} - T_1^{\omega(n-1)}{}_{,x} \right); \\
h_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left( H_1^{\omega(n-1)} + P_2^{\omega(n-1)}{}_{,x} \right); \quad g_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} \left( S_2^{\omega(n-1)}{}_{,xx} - H_2^{\omega(n-1)} - T_2^{\omega(n-1)}{}_{,x} \right). \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Обобщенные усилия в (2.2) вычисляются по формулам типа (1.11), в которых следует добавить в верхний индекс знак нелинейности  $\omega$  и номер приближения  $(n-1)$ , причем, в силу (1.15), изменятся только следующие нелинейные добавки:

$$\begin{aligned}
N_x^{(k)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} b_0 G_k \int_{h_k} \varepsilon_x^{(k)(n-1)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, I) dz + b_0 K_k \int_{h_k} B_k I dz; \\
M_x^{(k)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} b_0 G_k \int_{h_k} \varepsilon_x^{(k)(n-1)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, I) z dz + b_0 K_k \int_{h_k} B_k I z dz \quad (k = 1, 2, 3); \\
N_x^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 G_3 \int_{h_3} (2\varepsilon_x^{(3)(n-1)} - \varepsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}, I) dz + b_0 K_3 \int_{h_3} B_3 I dz; \\
N_z^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 G_3 \int_{h_3} (2\varepsilon_z^{(3)(n-1)} - \varepsilon_x^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}, I) dz + b_0 K_3 \int_{h_3} B_3 I dz;
\end{aligned}$$

$$M_x^{(3)\omega(n-1)} = \frac{2}{3} b_0 G_3 \int_{h_3} (2\varepsilon_x^{(3)(n-1)} - \varepsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}, I) dz + b_0 K_3 \int_{h_3} B_3 I dz ;$$

$$Q^{(3)\omega(n-1)} = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)(n-1)} \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}, I) dz \quad (k = 1, 2).$$

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения задачу об упругопластическом изгибе рассматриваемого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем в радиационном поле сводить к соответствующей линейной задаче упругости с дополнительными фиктивными нагрузками. Первым приближением будет служить решение задачи радиационной упругости.

В случае граничных условий свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры (1.12) на каждом шаге итерации должны выполняться следующие требования:

$$w_k^n = u_k^n, \quad w_k^n, \quad w_k^n, \quad w_k^n = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (2.3)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (2.1) принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (2.3):

$$u_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right); \quad u_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right);$$

$$w_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right); \quad w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad (2.4)$$

где  $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$  – искомые амплитуды перемещений.

Поперечная нагрузка и дополнительные усилия в слоях стержня также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx;$$

$$q_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx;$$

$$g_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad g_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l g_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx;$$

$$h_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad h_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx;$$

$$p_{\omega}^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad p_{\omega m}^{n-1} = \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx. \quad (2.5)$$

Пусть на исследуемый стержень действует поперечная поверхностная нагрузка  $q(x) = \text{const}$ . Ее коэффициенты разложения в ряд (2.5) имеют вид

$$q_m = \frac{2q_0}{\pi m} (1 - \cos(\pi m)). \quad (2.6)$$

Если поверхностная нагрузка, равномерно распределенная в интервале  $a \leq x \leq b$ , то ее аналитический вид и коэффициенты разложения в ряд (2.5) принимают вид

$$q(x) = q_0 (H_0(b-x) - H_0(a-x));$$



$$q_m = -\frac{2q_0}{\pi m} \left( \cos \frac{\pi m b}{l} - \cos \frac{\pi m a}{l} \right), \quad (2.7)$$

где  $H_0(x)$  – функция Хевисайда,  $q_0$  – интенсивность нагрузки.

После подстановки перемещений (2.4), дополнительных усилий (2.5) и коэффициентов (2.6) или (2.7) в уравнения равновесия (2.1) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений  $U_{1m}^n$ ,  $U_{2m}^n$ ,  $W_{1m}^n$ ,  $W_{2m}^n$ :

$$\begin{aligned} b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n &= p_{om}^{n-1}; \\ b_2 U_{1m}^n + b_3 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n &= h_{om}^{n-1}; \\ b_3 U_{1m}^n + b_6 U_{2m}^n + b_8 W_{1m}^n + b_9 W_{2m}^n &= q_m + q_{om}^{n-1}; \\ b_4 U_{1m}^n - b_7 U_{2m}^n + b_9 W_{1m}^n + b_{10} W_{2m}^n &= g_{om}^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где коэффициенты  $b_i$  зависят от параметра  $m$  и от интегрального нейтронного потока через коэффициенты  $a_n$ , определенные в (2.1):

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_4 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2; \quad b_2 = -a_1 + a_5 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2; \quad b_3 = a_2 \frac{\pi m}{l} + 2a_6 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^3; \\ b_4 &= a_3 \frac{\pi m}{l} - a_7 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^3; \quad b_5 = a_1 + a_9 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2; \quad b_6 = -a_{10} \frac{\pi m}{l} + a_6 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^3; \\ b_7 &= a_{17} \frac{\pi m}{l} + 2a_7 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^3; \quad b_8 = -a_{11} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2 + a_{15} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^4 + a_8; \\ b_9 &= a_{12} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2 - a_{16} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^4 - a_8; \quad b_{10} = -a_{14} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2 + a_{13} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^4 + a_8. \end{aligned}$$

Решение системы (2.8) можно выписать в определителях, либо решать численно. Далее по формулам (2.4) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (1.6), деформации – из соотношений Коши, напряжения – из (1.5).

*Численная реализация* полученного решения проведена для трехслойного стержня, слои которого набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, механические параметры взяты из [2]:  $K_1 = K_2 = 0,8 \cdot 10^{11}$  Па;  $G_1 = G_2 = 0,267 \cdot 10^{11}$  Па;  $K_3 = 345 \cdot 10^6$  Па;  $G_3 = 90 \cdot 10^6$  Па;  $B_1 = B_2 = B_3 = 10^{23}$  м<sup>2</sup>/нейтрон;  $\mu_1 = \mu_2 = 1,26$  м<sup>-1</sup>;  $\mu_3 = 3,21$  м<sup>-1</sup>. Относительные (к длине стержня) толщины слоев:  $h_1 = 0,04$ ;  $h_2 = 0,02$ ;  $h_3 = 0,18$ . Интенсивность внешней нагрузки  $q = -10$  МПа; время облучения – 60 мин.

На рис. 2 показано изменение поперечной деформации в заполнителе

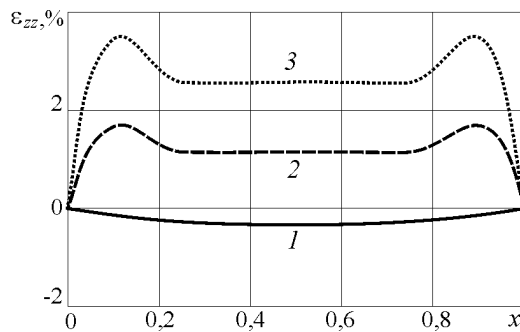


Рис. 2

$\varepsilon_{zz}$  при различных интенсивностях потока нейтронов: 1 –  $j = 0$ ; 2 –  $j = 0,5 \cdot 10^{18}$ ; 3 –  $\varphi = 10^{18}$  (нейтрон/( $m^2 \cdot c$ )). У необлученного стержня наполнитель сжат. С увеличением интенсивности потока растет объемная деформация наполнителя, что приводит к его поперечному растяжению.

Рис. 3 иллюстрирует влияние нейтронного потока  $\varphi = 10^{18}$  (нейтрон/( $m^2 \cdot c$ )) на прогибы (а) и продольные перемещения (б) в несущих слоях: 1, 3 – в первом слое – без радиации и после облучения; 2, 4 – во втором слое, соответственно. В результате облучения прогибы в слоях уменьшаются, причем в первом слое существенно, что обусловлено большим интегральным нейтронным потоком в нем. При действии на второй слой – поток уменьшается примерно в два раза, соответственно, изменяются дополнительная объемная деформация и ее влияние на прогиб. Продольное перемещение при этом меняет знак.

Влияние нейтронного потока на нелинейность материалов моделировалось увеличением предела текучести материала внешнего слоя на 20 %, предела физической нелинейности наполнителя – на 10 %.

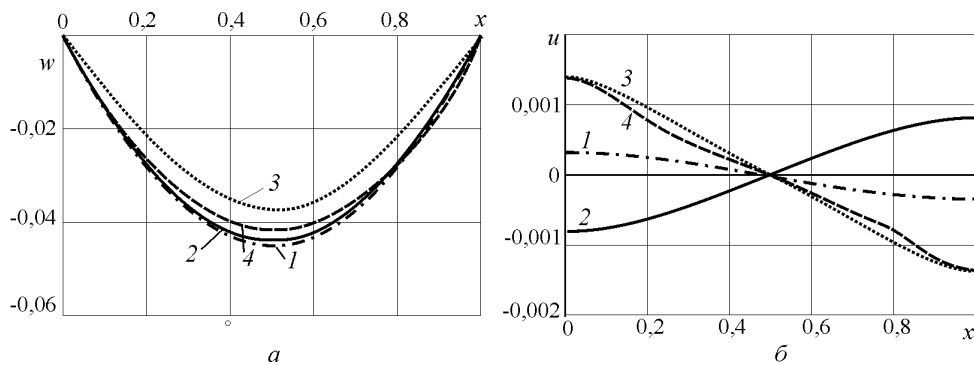


Рис. 3

Качественная картина изменения прогиба (а) и продольного перемещения (б) в первом слое в случае равномерно распределенной нагрузки показана на рис. 4: 1 – упругий стержень, 2 – упругопластический, 3 – упругопластический в нейтронном потоке. Нейтронное воздействие уменьшает упругопластический прогиб на 4 % за счет ослабления пластических свойств материала и увеличения его жесткости. Продольные упругопластические перемещения изменяются незначительно.

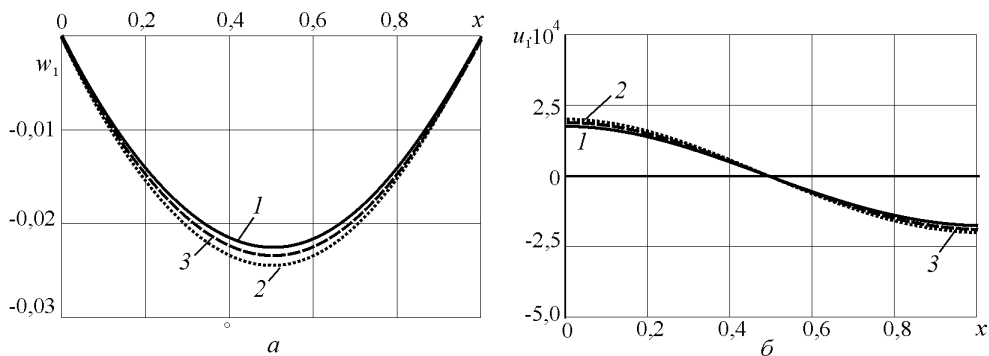


Рис. 4

### Заключение.

Предложена методика исследования деформирования трехслойных стержней со сжимаемым наполнителем. Она позволяет учитывать в инженерных расчетах воздействие нейтронного облучения и физическую нелинейность материалов слоев. Численные расчеты свидетельствуют об их существенном влиянии на перемещения в стержне.

*Робота виконана при фінансовій підтримці Білоруського республіканського фонду фундаментальних досліджень (проект Т18Р-090).*

РЕЗЮМЕ. Досліджено деформування тришарового пружнопластичного стержня зі стисливим заповнювачем у нейтронному потоці. Для опису кінематики несиметричного по товщині пакета прийнято гіпотези ламаної лінії: в тонких несучих шарах справедлива гіпотеза Бернуллі; в стисливому по товщині заповнювачі виконується гіпотеза Тимошенка з лінійною апроксимацією переміщень по товщині шару. Враховано роботу заповнювача в тангенціальному напрямку. Фізичні співвідношення зв'язку напружень і деформацій відповідають теорії малих пружнопластичних деформацій. Систему диференціальних рівнянь рівноваги отримано варіаційним методом. На границі прийнято кінематичні умови вільного оперття торців стержня на нерухомі в просторі жорсткі опори. Розв'язання крайової задачі зведено до визначення чотирьох функцій – прогинів і поздовжніх переміщень серединних поверхонь несучих шарів. Аналітичний розв'язок отримано на основі методу пружних розв'язків. Проведено його чисельний аналіз у випадку рівномірно розподіленого навантаження.

1. *Ильюшин А.А., Огибалов П.М.* Упругопластические деформации полых цилиндров. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1960. – 224 с.
2. *Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Деформирование металлополимерных систем. – Минск: Бел. наука, 2004. – 342 с.
3. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Korotkikh Yu.A.* Free Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 6. – P. 654 – 663.
4. *Grover N., Singh B.N., Maiti D.K.* An Inverse Trigonometric Shear Deformation Theory for Supersonic Flutter Characteristics of Multilayered Composite Plates // *Aerospace Science and Technology.* – 2016. – **52**. – P. 41 – 51.
5. *Havaladar S., Sharma R.* Experimental Investigation of Dynamic Characteristics of Multilayer PU Foam Sandwich Panels // *J. of Minerals and Materials Characterization and Engineering.* – 2013. – **1**, N 5. – P. 201 – 206.
6. *Kubenko V.D., Pleskachevskii Yu.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V.* Vibrations of Sandwich Beam on an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 5. – P. 541 – 547.
7. *Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I.* Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium // *Mechanics of Solids.* – 2015. – **50**, N 3. – P. 359 – 366.
8. *Leonenko D.V., Starovoitov E.I.* Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation // *Mechanics of Solids.* – 2012. – **47**, N 1. – P. 111 – 118.
9. *Leonenko D.V., Starovoitov E.I.* Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 4. – P. 359 – 367.
10. *Lugovoi P.Z., Meish Yu.A.* Nonstationary Deformation of Longitudinally and Transversely Reinforced Cylindrical Shells on an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 1. – P. 62 – 72.
11. *Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholy H.* The Effect of Functionally Graded Materials into the Sandwich Beam Dynamic Performance // *Materials Sciences and Applications.* – 2013. – 4. – P. 751 – 760.
12. *Salam M., Bondok N.* Free Vibration Characteristics for Different Configurations of Sandwich Beams // *Int. J. of Mechanics Mechatronics.* – 2010. – **10**. – P. 41 – 54.
13. *Škec L., Jelenić G.* Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // *Acta Mechanica.* – 2014. – **225**, N 2. – P. 523 – 541.
14. *Starovoitov E.I., Leonenko D.V.* Resonant Effects of Local on Circular Sandwich Plates on an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 1. – P. 86 – 93.
15. *Starovoitov E.I., Leonenko D.V.* Impact of Thermal and Ionizing Radiation on a Circular Sandwich plate on an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 5. – P. 580 – 589.
16. *Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V.* Circular Sandwich Plates under Local Impulsive Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 8. – P. 945 – 952.
17. *Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V.* Vibrations of Circular Sandwich Plates under Resonance Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 12. – P. 1458 – 1463.
18. *Starovoitov E.I., Leonenko D. V., Yarovaya A.V.* Vibrations of a Sandwich Rod under Local and Impulsive Forces // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 7. – P. 809 – 816.
19. *Starovoitov E.I., Leonenko, D.V., Yarovaya, A.V.* Elastoplastic Bending of a Sandwich Bar on an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 4. – P. 451 – 459.
20. *Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.* A Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels // *Materials Sciences and Applications.* – 2013. – 4, N 8. – P. 471 – 477.

Поступила 06.02.2017

Утверждена в печать 05.11.2019