

П.З.Луговой, В.Ф.Мейш, Ю.А.Мейш, С.П.Орленко

## К РАСЧЕТУ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул.Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e – mail: plugovyy@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A technique is developed for solving the dynamic problems of the behavior of compound shell structures (solving the oscillation equations with the corresponding boundary and initial conditions). The constructive – orthotropic model of a three – layer shell structure with a cellular filler is used, for which the integral values of the elastic modulus and Poisson's coefficients are determined according to the experimental data. The numerical algorithms are constructed, and the corresponding problems of mathematical theory of elasticity are solved. The obtained numerical results are analyzed.

**Key words:** compound shell structures, technique of solving the dynamic problems, numerical algorithms, numerical results.

### **Введение.**

Оболочки простейших канонических форм при динамических нагрузках, поддающиеся исследованию традиционными методами математической физики и численного анализа, исследованы сравнительно подробно [10 – 16]. Однако, в последнее время, создание прогрессивных технологий, объектов специального назначения и т.д. часто приводит к необходимости разработки конструктивных оболочечных элементов с усложненной геометрической структурой. Вопросы динамического поведения таких оболочек изучены недостаточно.

Сложность формы оболочки может быть обусловлена образованием поверхности оболочек в виде комбинации нескольких простых поверхностей (составные оболочки). Часто это связано с функциональным назначением тонкостенной конструкции. В частности, в авиастроении и космической технике: оболочки корпусов самолетов или элементов корпусов ракет. При этом указанные элементы поддаются динамическим нагрузкам различного вида, в том числе нестационарным нагрузкам.

В данной работе рассмотрены вопросы постановки динамических задач поведения составных конструкций (уравнения колебаний с соответствующими граничными и начальными условиями), построение численных алгоритмов, решение соответствующих задач математической физики. Проведен анализ полученных числовых результатов. Выполнено комплексное расчетно-экспериментальное исследование динамического поведения обтекателя, представляющего собой составную оболочку полушара – цилиндра, при действии на него плоской ударной волны. Особенно ответственный характер приобретают экспериментальные исследования по определению предельных нагрузок, при которых испытываемые объекты разрушаются или принимают качественные изменения. Отсюда следует актуальность разработки данной расчетно-экспериментальной методики. Также рассмотрена задача динамического поведения цилиндрической оболочки с деформируемой перегородкой (круглая пластина) при импульсном нагружении.

### §1. Постановка задачи. Моделирование динамического поведения составного обтекателя при действии ударных волн.

Необходимым этапом проектирования современных конструкций является математическое моделирование на ПК их поведения в штатных и аварийных режимах работы. Полученные знания позволяют более целенаправленно осуществлять физическое моделирование и ставить натурные эксперименты. Импульсные нагрузки являются определяющими при расчете поведения конструкций. Оценка таких нагрузок является исключительно важной, ибо она в значительной мере определяет точность окончательного решения задачи. Применение сложного математического аппарата для описания динамического поведения конструкции не дает желаемого результата, если внешние силы определены недостаточно точно.

Известно, что нагрузка, воспринимаемая поверхностью конструкции при падении на нее волны, складывается из трех составляющих: давления в падающей волне, давления в волне, отраженной от объекта как от твердого тела, и давления, излучаемого самой конструкцией в процессе перемещения и деформирования под действием ударной волны. В [1 – 3, 5, 7 – 9] показано, что процесс формирования нагрузки на поверхности деформируемого объекта при падении волн с давлением  $\Delta P < 0,5 \cdot 10^5$  Па можно определить, используя геометрически подобную модель и измеряя при этом дифракционное давление  $P_d$  (сумма давлений в падающей волне и в волне, отраженной от объекта как от твердого тела).

Дифракционный процесс исследовался на жесткой модели типа цилиндр-полусфера, повторяющей геометрию натурального обтекателя. Модель изготавливалась на токарном станке из дюралюминия (радиус цилиндрической и сферической частей составлял 35 мм). Модель крепилась на торце длинного стального цилиндра, ось которого проходила параллельно направлению распространения волны в канале ударной трубы прямоугольного сечения  $210 \times 140$  мм [5, 8]. Установка давала возможность получать ударные волны с крутым фронтом и давлением до  $1 \cdot 10^5$  Па и длительностью  $8 \cdot 10^{-3}$  с.

Регистрация нагрузок на поверхности модели проводилась миниатюрными пьезодатчиками [1], лицевая сторона которых устанавливалась заподлицо с поверхностью модели. Точки, в которых проводилась регистрация нагрузок, указаны на рис.1. При этом точка 1 имела угловую координату  $\varphi = 0$ ; точка 2 –  $\varphi = \pi / 6$ ; точка 3 –  $\varphi = \pi / 4$ ; точка 4 –  $\varphi = \pi / 3$ ; точка 5 –  $\varphi = \pi / 2$ . Точка 6 на цилиндрической поверхности отстояла от основания модели на расстоянии, равном 5 мм. В каждом опыте измерялась скорость фронта падающей ударной волны с погрешностью, не превышающей 1%, что приводило к ошибкам рассчитанных давлений не более  $\pm 2\%$  [5]. Общая ошибка измерения дифракционного давления не превышала  $\pm 7\%$ .

Измерения проводились при падении на модель ударных волн со скачком давления во фронте  $\Delta P$  от  $0,1 \cdot 10^5$  до  $0,4 \cdot 10^5$  Па. Численные значения фронтальных величин безразмерного дифракционного давления  $P_d / \Delta P$  в точках 1 – 6 модели для трех случаев падения волн с амплитудами  $0,1 \cdot 10^5$ ;  $0,2 \cdot 10^5$  и  $0,4 \cdot 10^5$  Па приведены в табл. 1.

Таблица 1

№№ точек	1	2	3	4	5	6
$\Delta P \cdot 10^{-5}$ Па	$P_d / \Delta P$					
0,1	2,1	1,8	1,7	1,5	1,4	1,0
0,2	2,2	1,9	1,8	1,5	1,5	1,1
0,4	2,3	2,1	2,0	1,7	1,6	1,2

На рис. 1 схематически показаны эпюры нагрузок, которые испытывала поверхность модели в различные моменты времени для случая  $\Delta P = 0,2 \cdot 10^5$  Па. Около каж-

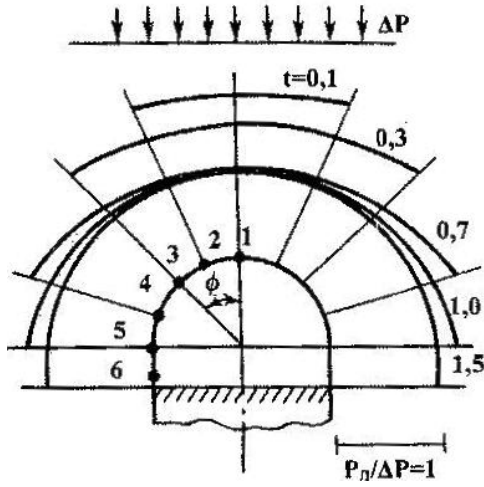


Рис. 1

**Уравнения колебаний обтекателя.** Исходя из полученных экспериментальных данных по определению параметров дифракционной картины на жесткой модели цилиндра – полусфера проведено математическое моделирование динамики составного обтекателя. Обтекатель рассматривался как трехслойная составная конструкция, которая состояла из полусферического купола, жестко соединенного с цилиндрическим отсеком того же радиуса. Элементы указанной структуры подвергались действию распределенной ударной нагрузки. Предполагается, что напряженно-деформированное состояние исходной упругой оболочечной структуры может быть определено в рамках геометрически нелинейного варианта теории тонких оболочек типа Тимошенко в квадратичном приближении – уравнения [2]

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} &= I_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \bar{T}_{13}) \right] - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3(\alpha_1, t) &= I_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right] - T_{13} &= I_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$T_{11} = B_{11} (\varepsilon_{11} + \nu_{21} \varepsilon_{22}); \quad T_{22} = B_{22} (\varepsilon_{22} + \nu_{12} \varepsilon_{11}); \quad \bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11} \Theta_1; \quad (1.2)$$

$$T_{13} = B_{13} k^2 \varepsilon_{13}; \quad M_{11} = D_{11} (\kappa_{11} + \nu_{21} \kappa_{22}); \quad M_{22} = D_{22} (\kappa_{22} + \nu_{12} \kappa_{11});$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \Theta_1^2 + k_1 u_3; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + k_2 u_3; \quad \varepsilon_{13} = \phi_1 + \Theta_1;$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1; \quad \kappa_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha_1}; \quad \kappa_{22} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \phi_1; \quad (1.3)$$

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}; \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}; \quad B_{13} = G_{13} h;$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}; \quad I_1 = \rho h; \quad I_2 = \frac{\rho h^3}{12}.$$

дой эпюры указано безразмерное время  $t = (\tau c)/R$ , где  $\tau$  – время от начала соприкосновения фронта волны с моделью в секундах;  $c$  – скорость звука в воздухе;  $R$  – радиус сферической и цилиндрической частей модели. По нормали к поверхности модели отложено отношение  $P_n / \Delta P$ , причем единичное значение указанного отношения выбрано равным радиусу модели. Общая длительность неустановившейся фазы формирования нагрузки примерно равна времени, за которое волна проходила линейный размер модели ( $t \approx 2$ ), после чего наступало одинаковое по величине всестороннее сжатие, равное давлению  $\Delta P$  за фронтом ступенчатой ударной волны.

В приведенных уравнениях величины  $\alpha_1, t$  – пространственная и временная координаты;  $A_1, A_2, k_1, k_2$  – параметры срединной поверхности оболочки, которые отвечают за геометрическую форму частей обтекателя;  $u_1, u_3, \phi_1$  – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки;  $T_{11}, T_{22}, T_{13}, M_{11}, M_{22}$  – интегральные характеристики напряжений, которые возникают в оболочке;  $I_1, I_2$  – приведенные инерционные жесткостные параметры;  $h$  – толщина оболочки;  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{21}$  – физико-механические параметры материала оболочки;  $P_3(\alpha_1, t)$  – нагрузка, которая формируется на поверхности обтекателя.

Уравнения движения составной оболочечной конструкции (1.1) – (1.3) дополняются соответствующими граничными условиями. Начальные условия при  $t = 0$  нулевые.

Отметим, что здесь используется конструктивно-ортотропная модель трехслойной оболочечной структуры с ячеистым наполнителем, для которой интегральные значения модулей упругости и коэффициентов Пуассона определяются согласно экспериментальным данным.

## §2. Численный алгоритм решения задачи.

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния обтекателя при нестационарных нагружениях проводилось численными методами. Для решения приведенных уравнений использовался интегро-интерполяционный метод построения конечно-разностных схем по пространственной координате  $\alpha_1$  и явная схема интегрирования по временной координате  $t$  – разностные уравнения [2].

При численных расчетах оболочечных структур, которые состоят из оболочечных элементов разной геометрии (сфера – цилиндр, конус – цилиндр, и т.д.) по линиям контактов указанных элементов возникают особенности. Для устранения особенностей в точках изменения геометрии оболочечных элементов используется специальный алгоритм. Предположим, что  $s_j$  – точка жесткого соединения оболочечных элементов разной геометрии по координате  $s$ . Выделим переходной элемент соединения оболочечных элементов разной геометрии  $s_{j-1/2} \leq s \leq s_{j+1/2}$ , и запишем для него следующие условия:

$$u_1^+ = u_1^-; \quad u_3^+ = u_3^-; \quad \phi_1^+ = \phi_1^-; \quad (2.1)$$

$$T_{11}^+ - T_{11}^- = I_1 \Delta s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \bar{T}_{13}^+ - \bar{T}_{13}^- - k_{1j} T_{11j} - k_{2j} T_{22j} + P_3 \Delta s = I_1 \Delta s \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (2.2)$$

$$M_{11}^+ - M_{11}^- - T_{13j} = I_2 \Delta s \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2},$$

где

$$T_{11j} = B_{11} \Delta s (k_{1j} + \nu_{21} k_{2j}) u_3; \quad T_{13j} = B_{13} \Delta s \phi_1; \quad T_{22j} = B_{22} \Delta s (k_{2j} + \nu_{12} k_{1j}) u_3,$$

а величины  $T_{11}^\pm, \bar{T}_{13}^\pm, M_{11}^\pm$  – компоненты обобщенного вектора усилий, которые действуют на переходной элемент  $s_{j-1/2} \leq s \leq s_{j+1/2}$  слева (верхний индекс минус) и справа (верхний индекс плюс).

Для обоснования достоверности и точности предлагаемой численной методики было проведено сопоставление численных результатов согласно уравнений (1.1) – (2.2) с известными экспериментальными данными [7] по динамическому деформированию замкнутых стальных составных оболочек полусфера – цилиндр при внутреннем взрыве заряда сферической формы. Для определения профиля давления, действующего на внутреннюю поверхность конструкции, использовалась эмпирическая зависимость для величины давления, возникающего от взрыва сферического заряда взрывчатого вещества (ВВ)

$$P_3(x, t) = \begin{cases} \frac{\kappa m Q}{x^3}, & \text{при } t \leq \frac{\kappa x}{\sqrt{Q}}; \\ 0, & \text{при } t \geq \frac{\kappa x}{\sqrt{Q}}; \end{cases} \quad \kappa = 8(3\gamma - 1) / [25(\gamma^2 - 1)].$$

В выше приведенной формуле  $m$  – масса сферического заряда ВВ;  $Q$  – теплотворная способность ВВ;  $x$  – расстояние от центра заряда до внутренней поверхности конструкции;  $\gamma$  – показатель адиабаты в уравнении состояния ВВ.

Параметры рассматриваемой конструкции полагались следующие:  $L = 4R_0$ ;  $L_c = 2R_0$ ;  $R_0 = 21,3 \cdot 10^{-2}$  м;  $h/R_0 = 0,047$ ;  $m = 1,327$  кг, где  $R_0$  – внутренний радиус цилиндрической и сферической частей конструкции;  $L$  – общая длина конструкции;  $L_c$  – длина цилиндрической части конструкции. При расчетах в уравнениях (1.1) – (2.2) полагалось  $A_1 = 1$ ;  $A_2 = R$ ;  $k_1 = 0$ ;  $k_2 = 1/R$  для цилиндрической части и  $A_1 = R$ ;  $A_2 = R \sin \alpha_1$ ;  $k_1 = k_2 = 1/R$  для сферической части. Сравнительный анализ теоретических и экспериментальных значений приведен в табл. 2, где  $t_1$  – интервал времени от начала радиального смещения стенок рассматриваемой конструкции до достижения ими максимальной скорости в сечении  $s = 2R_0$ ;  $\varepsilon_{22}$  – соответствующее этому моменту времени значение окружной деформации;  $t_2$  – время соответствующее достижению прогибом  $u_3$  максимального значения;  $T$  – период радиальных колебаний. Регистрация деформаций  $\varepsilon_{22}$  во времени центральном поперечном сечении составной оболочки в эксперименте [7] проводилась методом фоторегистрации и тензометрирования. Значительная разница в величине  $t_2$  объясняется тем, что в численных расчетах максимум прогиба достигается во втором полупериоде колебаний, а в эксперименте – в третьем полупериоде.

Таблица 2

Данные для сравнения	$t_1$ , мкс	$\varepsilon_{22}$	$t_2$ , мкс	$T$ , мкс
Эксперимент [7]	40	0,015	300	240
Численный расчет (1.1) – (2.2)	42	0,018	190	245

Использование явной конечно-разностной схемы интегрирования по координате  $t$  позволяет детально анализировать характеристики напряженно-деформированного состояния обтекателя в любой момент времени на исследуемом временном интервале.

### §3. Исследование динамического поведения обтекателя.

Рассматриваемый обтекатель представляет собой трехслойную структуру, которая состоит из двух обшивок толщиной  $1,3 \cdot 10^{-3}$  м и  $0,85 \cdot 10^{-3}$  м и расположенным между ними ячеистым наполнителем при общей толщине  $11 \cdot 10^{-3}$  м. Расчет по определению напряженно-деформированного состояния обтекателя согласно уравнений (1.1) – (2.2) при действии плоской ударной волны согласно экспериментальных данных, которые приведены в §1, были проведены при следующих геометрических и физико-механических параметрах:  $R = 1,425$  м;  $L = 0,89$  м;  $\rho = 1,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $E = 6 \cdot 10^9$  Па;  $\nu = 0,3$ , где  $L$  – длина цилиндрической части обтекателя. Интегральные физико-механические характеристики обтекателя брались согласно паспортных данных изделия. При расчетах сферической части обтекателя в уравнениях полагалось  $A_1 = R$ ;  $A_2 = R \sin \alpha_1$ ;  $k_1 = k_2 = 1/R$ , где  $\alpha_1$  – угол между осью вращения и нормалью в текущей точке; для цилиндрической части обтекателя полагалось  $A_1 = 1$ ;  $A_2 = R$ ;  $k_1 = 0$ ;  $k_2 = 1/R$ . Нагрузка  $P_3(\alpha_1, t)$  задавалась согласно экспериментальным данным, которые приведены в на-

чале параграфа при  $\Delta P = 0,2 \cdot 10^5$  Па. Расчет проводился на временном интервале  $0 \leq t \leq 10T$ , где  $T = R/c$ ,  $c$  – скорость звука в воздухе. При расчетах полагалось  $c = 340$  м/с. При численных расчетах анализировались величины прогиба  $u_3$ , поперечной деформации  $\varepsilon_{22}$  и поперечного напряжения  $\sigma_{22}$  по времени и по длине обтекателя на интервале  $0 \leq t \leq 10T$ . Как показали расчеты, максимальные величины  $\varepsilon_{22}$  и  $\sigma_{22}$  наблюдаются в области полюса полусферической оболочки и цилиндрической оболочки в области  $x \approx L/2$ . В частности, на рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости величины напряжения  $\sigma_{22}$  в области цилиндрической оболочки  $x \approx L/2$  и области полюса сферической части конструкции, соответственно, для временного интервала  $0 \leq t \leq 10T$ . Из приведенных расчетов можно отметить, что максимальная величина деформаций  $\varepsilon_{22}$  порядка  $10^{-3}$ , а максимальные значения напряжений  $\sigma_{22}$  не превышают величин порядка  $10^6$  Па.

На рис. 4 приведены зависимости величины прогиба  $u_3$  по центральному сечению обтекателя во времена  $t = 3T$  (кривая 1) и  $t = 6T$  (кривая 2), которые соответствуют достижению максимальных значений величины  $u_3$ . Качественная картина распределения максимальных величин  $u_3$  аналогична величинам  $\varepsilon_{22}$ ,  $\sigma_{22}$  – максимумы наблюдаются в области полюса и в области  $x \approx L/2$  цилиндрической части обтекателя. Максимальный прогиб  $u_3$  не превышает значения порядка  $0,2h$ . Следует отметить, что сравнение результатов по приведенным уравнениям в линейной постановке и геометрически нелинейной постановке отличаются в ряде точек по максимальным величинам до 20 – 25% (нелинейной теории соответствуют большие величины).

Таким образом, в данном исследовании, исходя из экспериментального определения вида дифракционной нагрузки, проведено математическое моделирование динамического поведения обтекателя. Следует отметить, что математическое моделирование динамики обтекателя при набегании на него ударной волны с  $\Delta P = 0,2 \cdot 10^5$  Па показало, что максимальные перемещения в самых опасных точках обтекателя (полюс полусферы и середина цилиндрической оболочки) не превышают  $0,2h$ , а деформации –  $\varepsilon \leq 10^{-3}$ . Анализ проведенных исследований показывает, что обтекатель сохраняет

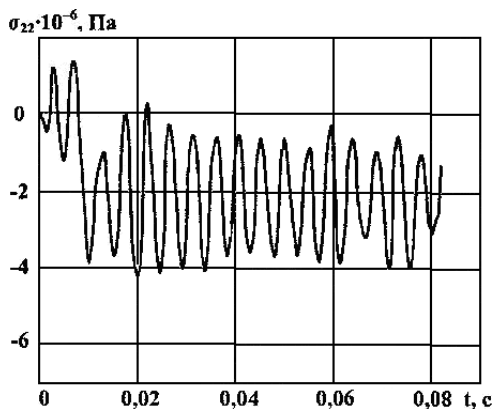


Рис. 2

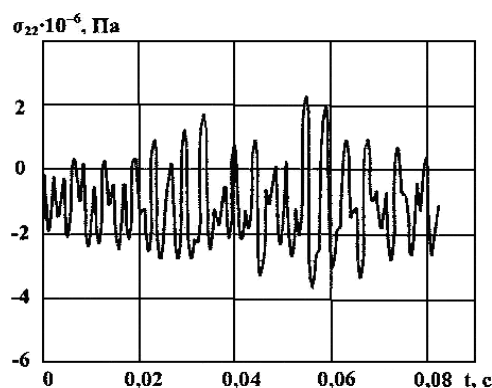


Рис. 3

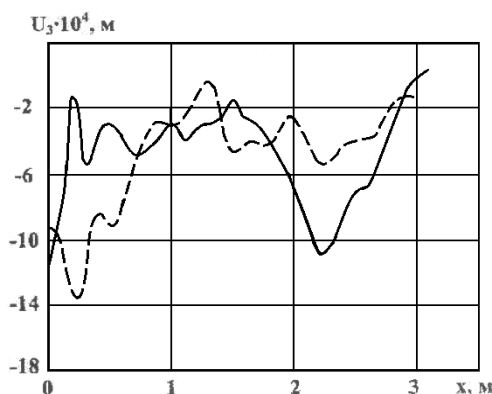


Рис. 4

свою работоспособность после воздействия на него в направлении оси ударной волны амплитудой до  $\Delta P = 0,2 \cdot 10^5$  Па. Представленная методика может быть использована при проектировании объектов сложной геометрии, устойчивых к действию ударных волн.

#### §4. Динамическое поведение цилиндрической оболочки деформируемыми перегородками при импульсных нагрузках.

**Постановка задачи.** Рассмотрим цилиндрическую оболочку с плоскими упругими перегородками. Перегородка представляет собой круглую пластину, прикрепленную перпендикулярно к внутренней поверхности оболочки. Предполагаются условия жесткого контакта пластинки – оболочки.

Математической моделью процесса нестационарного деформирования рассматриваемой конструкции является гиперболическая система нелинейных дифференциальных уравнений теории оболочек и пластин типа Тимошенко. При построении математической модели уравнений движения составной конструкции использовался упрощенный вариант геометрически нелинейной теории оболочек и пластин согласно В.В. Новожилова [2].

Уравнения движения изотропной тонкостенной цилиндрической оболочки в случае осесимметричного нагружения имеют вид

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \quad (4.2)$$

где

$$T_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}(\theta_1)^2 + \frac{\nu}{R} u_3 \right]; \quad T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{u_3}{x} + \nu \left( \frac{u_3}{R} + \frac{1}{2}(\theta_1)^2 \right) \right];$$

$$T_{13} = Gk^2 h(\theta_1 + \phi_1); \quad M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}; \quad \theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

В соотношениях (4.1) – (4.2)  $h$  – толщина оболочки;  $\rho$  – плотность материала;  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $G$  – модуль сдвига;  $u_1, u_3, \phi_1$  – компоненты вектора перемещений срединной поверхности оболочки;  $T_{11}, T_{22}, M_{11}, T_{13}$  – усилия и моменты срединной поверхности оболочки;  $k^2$  – коэффициент сдвига.

Уравнения движения круглой пластины в полярных координатах записываются следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rT_{11}^p) - \frac{1}{r} T_{22}^p = \rho h^p \frac{\partial^2 u_1^p}{\partial t^2}; \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rT_{13}^p) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rT_{11}^p \theta_1) T_{22}^p = \rho h^p \frac{\partial^2 u_3^p}{\partial t^2}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rM_{11}^p) - \frac{1}{r} M_{22}^p - T_{13}^p = \rho \frac{(h^p)^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1^p}{\partial t^2}.$$

Выражения для усилий и моментов круглой пластины представлены формулами

$$T_{11}^p = \frac{Eh^p}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_1^p}{\partial r} + \frac{1}{2}(\theta_1^p)^2 + \frac{\nu}{r} u_3^p \right]; \quad T_{22}^p = \frac{Eh^p}{1-\nu^2} \left[ \frac{u_3^p}{r} + \nu \left( \frac{\partial u_1^p}{\partial r} \right) + \frac{1}{2}(\theta_1^p)^2 \right];$$

$$M_{11}^p = \frac{E(h^p)^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \phi_1^p}{\partial r} + \nu \frac{\phi_1^p}{r} \right); \quad M_{22}^p = \frac{E(h^p)^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\phi_1^p}{r} + \nu \frac{\partial \phi_1^p}{\partial r} \right); \quad (4.4)$$

$$T_{13}^p = Gk^2 h^p (\theta_1^p + \phi_1^p).$$

В соотношениях (4.3), (4.4)  $h^p$  – толщина пластины;  $u_1^p$ ,  $u_3^p$ ,  $\phi_1^p$  – компоненты вектора перемещений срединной поверхности пластины;  $T_{11}^p$ ,  $T_{22}^p$ ,  $M_{11}^p$ ,  $M_{22}^p$ ,  $T_{13}^p$  – усилия и моменты в пластине.

В дальнейшем рассматривается конструкция, у которой левый торец цилиндрической оболочки ( $x=0$ ) подвергается нагружению, а правый торец ( $x=L$ ) жестко зашпелен. Граничные условия в этом случае для оболочки запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \text{для } x=0 \\ T_{11} = P_1(t); \quad \bar{T}_{13} = P_2(t); \quad M_{11} = 0; \quad \bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\theta_1; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{для } x=L \\ u_1 = u_3 = \phi_1 = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  – усилия, прилагаемые к свободному торцу цилиндрической оболочки.

Для пластины в качестве граничных условий используются условия стыковки, которые более подробно будут рассмотрены при построении числового алгоритма. В центре пластины должны выполняться условия

$$u_1 = 0; \quad \phi_1 = 0; \quad 2 \frac{\partial \bar{T}_{13}^p}{\partial r} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^p}{\partial t^2}. \quad (4.7)$$

Уравнения движения, описывающие нестационарное поведение конструкции, дополняются начальными условиями при  $t=0$

$$u_1 = u_3 = \phi_1 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = 0; \quad u_1^p = u_3^p = \phi_1^p = 0; \quad \frac{\partial u_1^p}{\partial t} = \frac{\partial u_3^p}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1^p}{\partial t} = 0. \quad (4.8)$$

**Построение численного алгоритма.** В основу построения числового алгоритма положена конечноразностная аппроксимация исходных дифференциальных уравнений (4.1) – (4.8) по пространственным и временной координатам. Определяется решение на гладких частях и «склеивается» на линиях разрыва. В рассматриваемой задаче линиями разрыва являются точки пересечения срединной поверхности цилиндрической оболочки со срединной поверхностью пластины.

Проводится дискретизация области изменения переменных  $x$ ,  $r$  таким образом, чтобы координаты точек пересечения срединных поверхностей оболочки – пластины попадали в целые точки сеточной области. Выделяется переходной элемент стыковки цилиндрическая оболочка – пластина (рис. 5) и записываются для него соответствующие уравнения колебаний

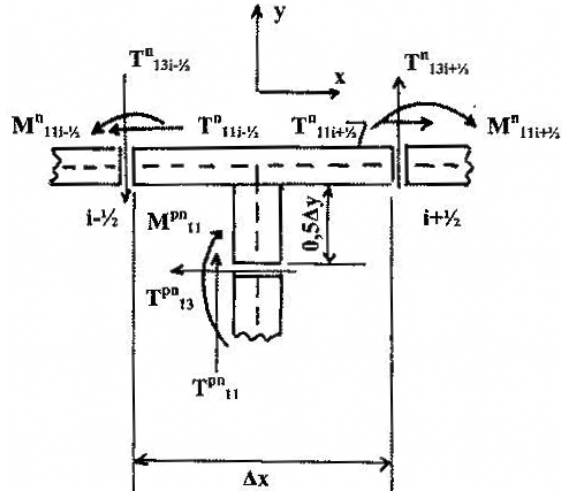


Рис. 5

$$\begin{aligned} T_{11i+1/2}^n - T_{11i-1/2}^n - \bar{Q}_{13m-1/2}^{pn} &= \rho(F_1 + F_2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \bar{T}_{13i+1/2}^n - \bar{T}_{13i-1/2}^n + \frac{(\bar{T}_{22i+1/2}^p + \bar{T}_{22i-1/2}^p)\Delta x}{2R} - \bar{T}_{11m-1/2}^{pn} &= \rho(F_1 + F_2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ M_{11i+1/2}^n - M_{11i-1/2}^n - (T_{13i+1/2}^n + T_{13i-1/2}^n) \frac{\Delta x}{2R} & \end{aligned} \quad (4.9)$$



$$-M_{11m-1/2}^{pn} - \frac{\Delta r}{4} T_{11m-1/2}^{pn} = \rho \left[ \frac{h^3}{12} \Delta x + \frac{(h^p)^3}{12} \frac{\Delta r}{2} \right] \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2},$$

где

$$F_1 = \Delta x \cdot h; \quad F_2 = \frac{\Delta r}{2} h^p; \quad \bar{T}_{13} = T_{13} + \theta_1 T_{11}; \quad \bar{T}_{13}^p = T_{13}^p + \frac{\partial u_3^p}{\partial r} T_{11}^p,$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta r$  – шаги дискретизации по пространственным переменным.

Компонентами искомого вектора решения системы уравнений (4.9) являются граничные условия для уравнений движения пластины (4.7) с учетом пространственной конфигурации.

Разностная схема для уравнений (4.1) – (4.3) на гладкой части решения запишем в виде

$$\rho h^p (u_{1j}^{p,n})_{11} = \frac{1}{r_j} (r_{j-1/2} T_{11,j-1/2}^{p,n})_r - \frac{1}{2r_j} (T_{22,j+1/2}^{p,n} + T_{22,j-1/2}^{p,n}); \quad (4.10)$$

$$\rho h^p (u_{3j}^{p,n})_{11} = \frac{1}{r_j} (r_{j-1/2} T_{13,j-1/2}^{p,n})_r - \frac{1}{r_j} \left( r_{j-1/2} T_{11,j-1/2}^{p,n} \frac{u_{3j} - u_{3j-1}}{\Delta r} \right)_r;$$

$$\frac{\rho(h^p)}{12} (u_{1j}^{p,n})_{11} = \frac{1}{r_j} (r_j M_{11,j-1/2}^{p,n})_r - \frac{1}{2r_j} (M_{22,j+1/2}^{p,n} + M_{22,j-1/2}^{p,n}) - \frac{1}{2} (T_{13,j+1/2}^{p,n} + T_{13,j-1/2}^{p,n});$$

$$T_{13,j-1/2}^n = Gk^2 h \left[ (u_{3i}^n)_{\bar{x}} + \frac{1}{2} (\phi_{1,i-1}^n + \phi_{1,i}^n) \right]; \quad (4.11)$$

$$T_{11,j-1/2}^{p,n} = \frac{Eh^p}{1-\nu^2} \left[ (u_{1j}^{p,n})_{\bar{r}} + \frac{1}{2} (u_{3j}^{p,n})_{\bar{r}}^2 + \frac{\nu}{2r_j} (u_{j-1}^{p,n} + u_j^{p,n}) \right];$$

$$T_{22,j-1/2}^{p,n} = \frac{Eh^p}{1-\nu^2} \left[ \nu (u_{1j}^{p,n})_{\bar{r}} + \frac{1}{2} (u_{3j}^{p,n})_{\bar{r}}^2 + \frac{\nu}{2r_j} (u_{1j-1}^{p,n} + u_{1j}^{p,n}) \right];$$

$$M_{11,j-1/2}^{p,n} = \frac{Eh^p}{12(1-\nu^2)} \left[ (\phi_{1j}^{p,n})_{\bar{r}} + \frac{\nu}{2r_j} (\phi_{1,j-1}^{p,n} + \phi_{1,j}^{p,n}) \right];$$

$$Q_{13,j-1/2}^{p,n} = Gk^2 h^p \left[ (u_{3j}^{p,n})_{\bar{r}} + \frac{1}{2} (\phi_{1,j-1}^{p,n} + \phi_{1,j}^{p,n}) \right].$$

В соотношениях (4.10), (4.11) введены обозначения разностных производных согласно работе [6]. Аналогичным образом аппроксимируются граничные и начальные условия (4.5) – (4.8).

Разностные соотношения (4.10), (4.11) позволяют получать дискретное решение системы уравнений (4.1) – (4.4) со вторым порядком точности по пространственным и временной координатам. Уравнения (4.9) – (4.11) позволяют сохранить разностный аналог закона сохранения полной механической энергии системы. При исследовании вопросов устойчивости линеаризованных разностных уравнений (4.9) – (4.11) воспользуемся необходимым условием устойчивости [2, 4], согласно которому

$$\Delta t \leq 2 / \omega, \quad (4.12)$$

где  $\omega = \max(\omega_1, \omega_2)$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – максимальные частоты собственных колебаний дискретных систем соответственно для цилиндрической оболочки и пластины;  $\Delta t$  – шаг дискретизации по временной координате.

Значения для  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имеют следующий вид:

$$\omega_1 = c_{11} \frac{2}{\Delta x} \left[ 1 + (1 - \nu^2) \frac{c_{13}^2 k^2}{c_{11}^2} 3 \left( \frac{\Delta x}{h} \right) + 3(1 - \nu^2) \frac{c_{13}^2 k^2}{c_{11}^2} 3 \left( \frac{\Delta x}{h} \right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\omega_2 = c_{11} \frac{2}{\Delta r} \left[ \frac{3}{2} + 3(1 - \nu^2) \frac{c_{13}^2 k^2}{c_{11}^2} \frac{\Delta r}{h^p} + 3(1 - \nu^2) \frac{c_{13}^2 k^2}{c_{11}^2} 3 \left( \frac{\Delta x}{h^p} \right)^2 \right]^{1/2},$$
(4.13)

где

$$c_{11}^2 = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}; \quad c_{13}^2 = \frac{G}{\rho}.$$

**Числовые результаты.** Для обоснования достоверности точности предлагаемой численной методики проведено сопоставление численных результатов согласно уравнений (4.9) – (4.11) с экспериментальными данными работы [7], где исследовалось поведение замкнутых стальных цилиндрических оболочек с плоскими днищами при взрыве внутри сферического заряда ВВ. Параметры рассматриваемой конструкции следующие:  $R = 15,25 \cdot 10^{-2}$  м;  $h / R_0 = 0,0025$ ;  $L = 44R_0$ ;  $h^p = 0,164R_0$ ;  $m = 245 \cdot 10^{-3}$  кг, где  $R_0$  – внутренний радиус оболочки;  $m$  – масса заряда ВВ. При задании профиля давления  $P_3(x, t)$ , действующего на внутреннюю поверхность оболочки, использовалась эмпирическая зависимость для величины давления, возникающего от взрыва сферического заряда ВВ, согласно материалам предыдущего параграфа.

Сравнительный анализ теоретических и экспериментальных значений приведен в табл. 3, где  $t_1$  – интервал времени от начала смещения стенок рассматриваемой оболочки до достижения ими максимальной скорости в сечении  $x = 22R_0$ ;  $\varepsilon_{22}$  – соответствующее этому моменту времени значение окружной деформации;  $t_2$  – время, соответствующее достижению прогибом максимального значения;  $T_c$  – период собственных радиальных колебаний рассматриваемой конструкции.

Таблица 3

Значение	$t_1$ , мкс	$\varepsilon_{22}$	$t_2$ , мкс	$T_c$ , мкс
Эксперимент	40	0,009	200	250
Теоретический расчет	50	0,010	165	210

В качестве числового примера рассматривается реакция составной изотропной конструкции при осесимметричном нагружении со следующими физико-механическими и геометрическими параметрами

$$E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu = 0,3; \quad \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad h = 10^{-2} \text{ м}; \quad R / h = 50;$$

$$L / R = 2; \quad h^p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad P_1(t) = - \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{t} \right) \quad \text{при } t \leq T;$$

$$P_1(t) = 0 \quad \text{при } t > T; \quad P_2(t) = 0 \quad \text{при } t \geq T, \quad T = \frac{L}{4c_{11}}.$$

Граничные условия – (4.7), (4.8). Пластина стыкуется с цилиндрической оболочкой в точке  $x = 0,5L$ .

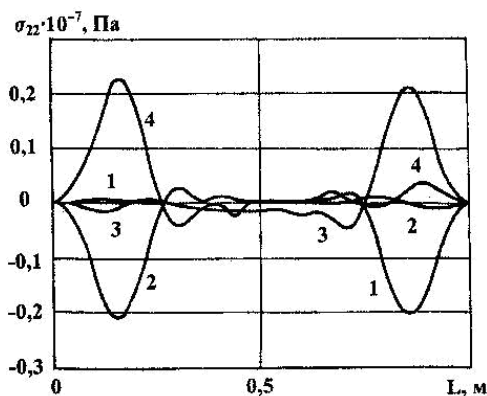


Рис. 6

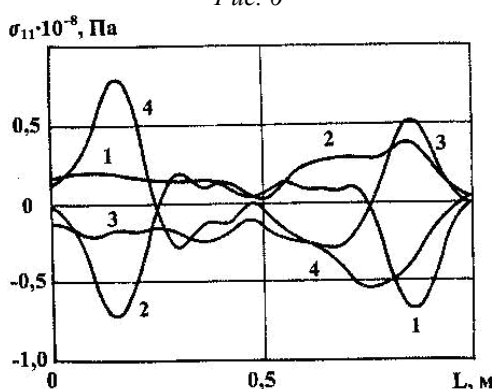


Рис. 7

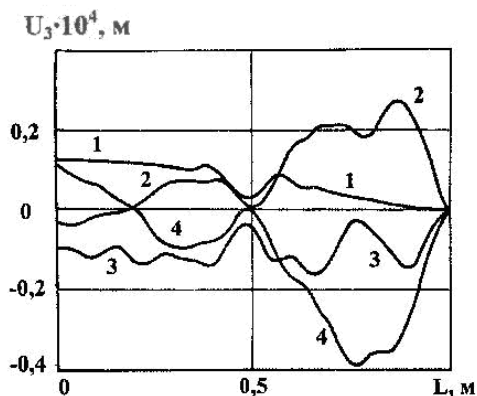


Рис. 8

На рис. 6 – 8 представлены зависимости  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $u_3$  от пространственной координаты  $x$ . Кривые 1 – 4 соответствуют конфигурациям величин  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $u_3$  в моменты времени  $t_j = jL/c_{11}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

Как показали вычисления, пластина практически не оказывает влияния на распределение продольных волн напряжения (рис. 6). Четко проявляется влияние деформируемой пластины на величины  $\sigma_{22}$ ,  $u_3$  в цилиндрической оболочке. Кривые 1 – 4 на рис. 7, 8 позволяют проследить отражение поперечных волн напряжения и волн прогиба от места стыковки цилиндрической оболочки – деформируемая пластина. Уменьшение значений напряжений  $\sigma_{22}$  и прогиба  $u_3$  в месте стыковки (значение  $\sigma_{22}$  уменьшается в 2,5-3 раза по сравнению со значениями в оболочке без пластины) ведет к увеличению градиента напряжений  $\sigma_{22}$  в области, близлежащей к месту стыковки. Наблюдается эффект квазизапираия волн прогиба в части цилиндрической оболочки при  $0,5 \leq x \leq L$ .

#### Выводы.

В данной статье создана комплексная методика расчета динамики составных оболочечных конструкций вращения при нестационарных нагрузках. Методика включает: постановку задач теории оболочек вращения, численный метод решения задач, графическую обработку полученных результатов. Для задачи динамического поведения обтекателя полусферы – цилиндрическая оболочка выполнено комплексное расчетно-экспериментальное исследование поведения обтекателя при действии на него плоской ударной волны. Важной особенностью являются экспериментальные исследования по определению плоской ударной волны. Постановка

задач теории оболочек вращения основана на применении уравнений колебаний оболочек на базе уточненной модели С.П. Тимошенко. Для численного решения динамических задач применен конечно-разностный подход, основанный на применении интегро-интерполяционного метода построения конечно-разностных схем по пространственной координате и явной аппроксимации по временной координате. Проведены теоретические исследования устойчивости приведенных конечно-разностных схем.

Рассмотрены задачи моделирования динамического поведения составного обтекателя при действии ударных волн и динамического поведения цилиндрической оболочки с деформируемой перегородкой при импульсной нагрузке. При математическом моделировании динамики обтекателя показано, что максимальное перемещение в самых опасных точках обтекателя (полус полусферы и середина цилиндрической

оболочки) не превышает  $0,2h$ , а деформации –  $\varepsilon \leq 10^{-3}$ . Анализ проведенных исследований показывает, что обтекатель сохраняет свою работоспособность после воздействия на него ударной волны в направлении оси давлением до  $\Delta P = 0,2 \cdot 10^5$  Па. При рассмотрении задачи динамического поведения цилиндрической оболочки с деформируемой перегородкой показано, что перегородка практически не оказывает влияния на распределение продольных волн напряжения  $\sigma_{11}$  при продольном ударе. Четко проявляется влияние деформируемой пластины на величины  $\sigma_{22}$  и  $u_3$  в цилиндрической оболочке. Полученные результаты позволяют проследить эффект отражения поперечных волн напряжения  $\sigma_{22}$  и волн прогиба  $u_3$  от места стыковки цилиндрическая оболочка – деформируемая пластина. Значение  $\sigma_{22}$  уменьшается в 2,5-3 раза по сравнению со значениями оболочки без пластины. Наблюдается эффект квазизапираания волн прогиба в части цилиндрической оболочки при  $0,5L \leq x \leq L$ .

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** Розроблено методику розв'язання динамічних задач поведінки складених оболонкових конструкцій (розв'язання рівнянь коливань з відповідними граничними і початковими умовами). Використано конструктивно-ортотропну модель тришарової оболонкової структури з чарункватим заповнювачем, для якої інтегральні значення модулів пружності і коефіцієнтів Пуансона визначаються з експерименту. Побудовано чисельні алгоритми, розв'язано відповідні задачі математичної теорії пружності. Проаналізовано отримані числові результати.

1. А.с. №1059456 (СССР). Датчик импульсных давлений / И.И.Аникьев, М.И.Михайлова, А.С. Спировский, Е.А. Сущенко. – Опубл. в Б.И., 1983, №45.-С.181.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд.-полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
3. Луговой П.З., Михайлова М.И., Мейш В.Ф., Малащенко С.П., Аникьев И.И., Сущенко Е.А. Взаимодействие ударных волн с объектами сложной геометрии // Проблемы прочности. – 2003. – № 6. – С. 56 – 66.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 536 с.
5. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.3. Прикладные исследования / Под общ. ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук.думка, 1983. – 264 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
7. Цыпкин В.И., Иванов А.Г., Минеев В.И., Шитов А.Н. Влияние масштаба, геометрии и заполняющей среды на прочность стальных сосудов при внутреннем импульсном нагружении // Атомная энергия. – 1976. – 41, № 5. – С. 303 – 308.
8. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций / Под ред. А.Н.Гузя и В.А. Заруцкого. – К.: Наук. думка, 1984. – 240 с.
9. Anik'ev I. I., Mikhailova M. I., Sushchenko E.A. Dynamic Loading of Cylindrical and Spherical Bodies Interacting with a Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 12 – P. 1405 – 1410.
10. Banerjee J.R., Cheung C. W., Morishima R., Perera M., Njuguna J. Free vibration of a three – layered sandwich beam using the dynamic stiffness method and experiment // Int. J. of Solids Struct. – 2007. – 44, N 22. – P. 7543 – 7563.
11. Lugovoi P.Z., Skosarenko Yu. V., Orlenko S.P., Shugailo A.P. Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 5. – P. 524 – 533.
12. Lugovoi P.Z., Shugailo A.P., Kruglyi Ya.D., Kolupaev A.M. Effect of Sludge on the Stress–Strain State of Heat-Exchange Tubes of a Steam Generator // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 86 – 94.
13. Meish V.F., MeishA Yu.A., Arnauta N.V Numerical Analysis of Nonstationary Vibrations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Different Geometry // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 4. – P. 426 – 433.
14. Meish V.F., MeishA Yu.A., Pavlyuk A.V. Dynamics of a Three-Layer Elliptical Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 172 – 179.
15. Qatu M.S. Vibration of Laminated Shells and Plates. – New York: Academic Press, 2004. – 426 p.
16. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000 – 2010 // Open J. of Composite Materials. – 2012. – 2, N 3. – P. 61 – 86.

Поступила 19.11.2018

Утверждена в печать 05.11.2019