ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2007

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 536.24

А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов

***R*-функции, вариационно-структурный и итерационные методы в идентификации и математическом моделировании нелинейных процессов теплопроводности в областях с источниками энергии**

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

The combined usage of R-functions, iterative, structural, and variational methods for solving the direct and inverse non-linear heat transfer problems is proposed. Indeterminate components of the approximate analytical solutions of the heat transfer problems are determined by iterative methods with solving the corresponding system of algebraic equations. The results of solving the direct and inverse non-linear heat transfer problems are presented. The results of solving the latter are compared with those for a test problem.

При применении аналитических методов к решению прямых и обратных линейных и нелинейных задач теплопроводности, механики, электродинамики и др. для областей сложной формы возникали математические трудности принципиального характера. Это объяснялось тем, что необходимо было решить проблему построения приближенных аналитических структур решения этих задач таким образом, чтобы они точно удовлетворяли заданным граничным условиям задачи и обладали свойствами универсальности относительно изменения геометрических параметров области и теплофизических параметров граничных условий. Актуальность решения этой проблемы заключалась в том, что приближенные аналитические решения выполняют роль качественно новых эмпирических формул, которые моделируют большой объем дискретной информации при проведении вычислительного или физического эксперимента.

Проблему точного учета информации о геометрии области при решении краевых задач математической физики приближенными аналитическими методами удалось эффективно решить с помощью R-функций [1] академиком НАН Украины В. Л. Рвачевым. С использованием R-функций впервые точно решена обратная задача аналитической геометрии для областей любой заданной сложной формы. После этого наступил период успешного развития приближенных аналитических методов (метод R-функций, вариационно-структурный

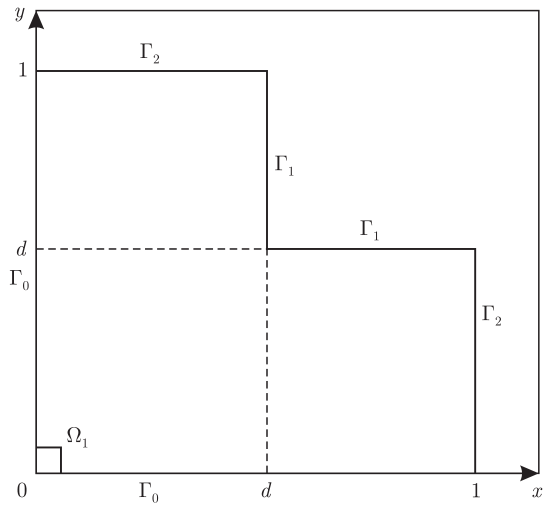

Рис. 1. Пластина с локальным источником энергии

метод, регионально-структурный метод) [2–11] и их эффективного применения к решению краевых задач теплофизики, механики, магнитной гидродинамики, электродинамики и др.

В данной работе, посвященной памяти академика НАН Украины В. Л. Рвачева, предлагается совместное применение метода прямых [12], итерационного [13] и вариационно-структурного [2–8] методов для решения обратной нелинейной нестационарной задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \Delta T - \mathrm{Bi} T + F(T) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0; \qquad T = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1; \qquad -\frac{\partial T}{\partial \nu} = \mathrm{Bi}_2 T \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{2}$$

$$T = T_0 \quad \text{в} \quad \Omega \quad \text{при} \quad Fo = 0, \tag{3}$$

$$T = T^*(t_k, x_m, y_m), \qquad (x_m, y_m) \in \Omega, \tag{4}$$

где $F(T) = \gamma e^{\beta T}$, $(x, y) \in \Omega_i$, в области неканонической формы с источником энергии (рис. 1); $\mathrm{Bi} = \alpha L^2/\lambda d$ — число Био; α — коэффициент теплоотдачи с поверхности пластины; L — характерный размер пластины; $T(x, y, Fo)$ — температура; t — время; $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ — граница области; λ — коэффициент теплопроводности.

Представим первую производную по времени в уравнении (1) посредством приближенного конечно-разностного выражения:

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} \approx \frac{T^{l+1} - T^l}{\Delta Fo}.$$

В результате этого дифференциальное уравнение теплопроводности (1) в точках сетки по временной переменной

$$\omega_{Fo} = \left\{ Fo_l \colon Fo_{l+1} = Fo_l + \Delta Fo,\ l = \overline{0, n_\tau - 1},\ \Delta Fo = \frac{\tau}{n_\tau},\ n_\tau \in \mathbb{N} \right\}$$

примет вид

$$\frac{T^{l+1} - T^l}{\Delta Fo} = \Delta T^{l+1} - \mathrm{Bi} T^{l+1} + F(T^{l+1}).$$

Аппроксимируем функцию мощности источника энергии в виде следующей двойной суммы:

$$F(T^{l+1}) = \gamma_{l+1} e^{\beta_{l+1} T^{l+1}} \approx \sum_{p+q=0}^{n_i} a_{p,q}^{l+1} P_p(x) P_q(y),$$

где $a_{p,q}^{l+1}$ — постоянные неопределенные коэффициенты; $P_p(x)$, $P_q(y)$ — полиномы Чебышева, нормированные относительно области их определения Ω_i.

Нестационарная краевая задача теплопроводности (1)–(3) для каждого момента времени Fo_{l+1} представляется в виде стационарных краевых задач

$$-\Delta T^{l+1} + \left(\mathrm{Bi} + \frac{1}{\Delta Fo}\right) T^{l+1} = \sum_{p+q=0}^{n_i} a_{p,q}^{l+1} P_p(x) P_q(y) + \frac{1}{\Delta Fo} T^l \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{5}$$

$$T^{l+1} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1; \qquad -\frac{\partial T^{l+1}}{\partial \nu} = \mathrm{Bi}_2 T^{l+1} \quad \text{на} \quad \Gamma_2; \qquad \frac{\partial T^{l+1}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{6}$$

$l = 0, 1, 2, \ldots$, $T^0 = T_0$ в Ω. Представим решение краевых задач теплопроводности в виде суммы двух решений: $T^{l+1} = \overline{T}^{l+1} + \sum\limits_{p+q=0}^{n_i} a_{p,q}^{l+1} T_{p,q}^{l+1}$, тогда, следуя принципу суперпозиции, функция температуры $\overline{T}^{l+1}$ будет решением следующей стационарной краевой задачи теплопроводности для моментов времени Fo_{l+1}:

$$-\Delta \overline{T}^{l+1} + \left(\mathrm{Bi} + \frac{1}{\Delta Fo}\right) \overline{T}^{l+1} = \frac{1}{\Delta Fo} \overline{T}^l \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7}$$

$$\overline{T}^{l+1} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1; \qquad -\frac{\partial \overline{T}^{l+1}}{\partial \nu} = \mathrm{Bi}_2 \overline{T}^{l+1} \quad \text{на} \quad \Gamma_2; \qquad \frac{\partial \overline{T}^{l+1}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{8}$$

$l = 0, 1, 2, \ldots$, $\overline{T}^0 = T_0$ в Ω. Аналитические структуры решения, построенные с использованием R-функций, точно удовлетворяющие граничным условиям (2) задачи (1)–(4), имеют вид

$$T = (T_0 \omega_0^{-2} + T_1 \omega_1^{-1} + T_2 \omega_2^{-2})(\omega_0^{-2} + \omega_1^{-1} + \omega_2^{-2})^{-1} = \sum_{i,j=0}^{n} C_{ij} \chi_{ij}(x, y), \tag{9}$$

где

$$T_1 = \omega_1 \Phi = \sum_{i,j=0}^{n} C_{ij} \chi_{ij}^{(1)}(x, y), \qquad T_0 = \Phi - \omega_0 D_1^{(0)} \Phi = \sum_{i,j=0}^{n} C_{ij} \chi_{ij}^{(0)}(x, y),$$

$$T_0 = \Phi - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi + \omega_2 \mathrm{Bi}_2 \Phi = \sum_{i,j=0}^{n} C_{ij} \chi_{ij}^{(2)}(x, y), \qquad \Phi = \sum_{i,j=0}^{n} C_{ij} \varphi_{ij},$$

$\varphi_{ij} = P_i(x) P_j(y)$, $\quad P_k(z)$, $k = i, j$ — полиномы Чебышева, $\quad \omega_0 = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\omega_1 = 2d - x - y + \sqrt{(d-x)^2 + (d-y)^2}, \qquad \omega_2 = 2 - x - y + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2},$$

$$D_1^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega_k}{\partial y}, \qquad k = 0, 2, \qquad \chi_{ij}(x, y) = \frac{\chi_{ij}^{(0)} \omega_0^{-2} + \chi_{ij}^{(1)} \omega_1^{-1} + \chi_{ij}^{(2)} \omega_2^{-2}}{\omega_0^{-2} + \omega_1^{-1} + \omega_2^{-2}}.$$

Краевую задачу теплопроводности (7), (8) сведем к проблеме минимума квадратичного функционала

$$\overline{I}^{l+1} = \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla \overline{T}^{l+1})^2 + \left(\mathrm{Bi} + \frac{1}{\Delta Fo} \right) (\overline{T}^{l+1})^2 - 2\frac{1}{\Delta Fo} \overline{T}^{l} \overline{T}^{l+1} \right] d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} \mathrm{Bi}_2 (\overline{T}^{l+1})^2 d\Gamma_2$$

при условии, что $\overline{T}^{l+1} = 0$ на Γ_1. Для определения неизвестных коэффициентов $\overline{C}_{i,j}^{l+1}$ получим

$$\sum_{i,j}^{n} \overline{C}_{i,j}^{l+1} \left\{ \int\limits_{\Omega} \left[\nabla \chi_{ij} \nabla \chi_{ks} + \left(\mathrm{Bi} + \frac{1}{\Delta Fo} \right) \chi_{ij} \chi_{ks} \right] d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} \mathrm{Bi}_2 \chi_{ij} \chi_{ks} d\Gamma_2 \right\} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\Delta Fo} T^{l} \chi_{ks} d\Gamma_2, \qquad k, s = \overline{0, n}.$$

Функция $T_{p,q}^{l+1}$ является решением краевой задачи теплопроводности:

$$-\Delta T_{p,q}^{l+1} + \left(\mathrm{Bi} + \frac{1}{\Delta Fo} \right) T_{p,q}^{l+1} = P_p(x) P_q(y) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{10}$$

$$T_{p,q}^{l+1} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1; \quad -\frac{\partial T_{p,q}^{l+1}}{\partial \nu} = \mathrm{Bi}_2 T_{p,q}^{l+1} \ \text{ на } \ \Gamma_2; \quad \frac{\partial T_{p,q}^{l+1}}{\partial \nu} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0, \quad p, q = \overline{0, n_i} \tag{11}$$

и выбирается в виде структуры решения (9). Краевая задача (10), (11) эквивалентна проблеме минимума квадратичного функционала

$$I^{l+1} = \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla T_{p,q}^{l+1})^2 + \left(\mathrm{Bi} + \frac{1}{\Delta Fo} \right) (T_{p,q}^{l+1})^2 - 2 P_p(x) P_q(y) T_{p,q}^{l+1} \right] d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} \mathrm{Bi}_2 (T_{p,q}^{l+1})^2 d\Gamma_2$$

при условии, что $T_{p,q}^{l+1} = 0$ на Γ_1. Для определения неизвестных коэффициентов $C_{pq,ij}^{l+1}$ получаем

$$\sum_{i,j}^{n} C_{pq,ij}^{l+1} \left\{ \int\limits_{\Omega} \left[\nabla \chi_{ij} \nabla \chi_{ks} + \left(\mathrm{Bi} + \frac{1}{\Delta Fo} \right) \chi_{ij} \chi_{ks} \right] d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} \mathrm{Bi}_2 \chi_{ij} \chi_{ks} d\Gamma_2 \right\} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} P_p(x) P_q(y) \chi_{ks} d\Gamma_2, \qquad k, s = \overline{0, n}.$$

В результате решения краевых задач теплопроводности (7), (8); (10), (11) на последовательных временных шагах Fo_{l+1} сетки ω_{Fo} получены функции температур $\overline{T}^{l+1}$, $T_{p,q}^{l+1}$, p, $q = \overline{0, n_i}$, учитывающих соответственно начальное условие (3) задачи (1)–(4) для каждого момента времени (источник энергии $\overline{T}^{l} / \Delta Fo$) в уравнении (7) и составляющую источника энергии в уравнении (9) $P_p(x) P_q(y)$, $p, q = \overline{0, n_i}$. Используя точечный метод наименьших квадратов для учета данных теплофизического эксперимента (4), получим систему линейных

Таблица 1. Идентификация параметров γ и β функции мощности источника энергии во времени

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
γ	9,999	9,966	9,980	9,991	9,997	10,999	10,001	10,002	10,002	10,002
β	−0,499	−0,464	−0,481	−0,493	−0,499	−0,502	−0,504	−0,504	−0,504	−0,504

алгебраических уравнений, из решения которой находим коэффициенты аппроксимации a_{pq}^{l+1} для функции мощности источника энергии:

$$\sum_{p+q=0}^{n_i} a_{pq}^{l+1} \sum_{m=1}^{M} T_{pq}^{l+1}(x_m, y_m) T_{rs}^{l+1}(x_m, y_m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} [T^{*l+1}(x_m, y_m) - \overline{T}^{l+1}(x_m, y_m)] T_{rs}^{l+1}(x_m, y_m), \qquad r, s = \overline{0, n_i}.$$

Полученные коэффициенты a_{pq}^{l+1}, p, $q = \overline{0, n_i}$ дают возможность перейти к определению параметров γ_{l+1}, β_{l+1} функции мощности источника энергии на каждом шаге по временной переменной. Пусть в задаче (1)–(4) $F(T^{l+1}) = \gamma_{l+1} e^{\beta_{l+1} T^{l+1}}$, тогда $\ln F(T^{l+1}) = \ln \gamma_{l+1} + \beta_{l+1} T^{l+1}$. Для нахождения параметров $\ln \gamma_{l+1}$ и β_{l+1} используем метод наименьших квадратов в интегральной форме: $\int\limits_{\Omega_i} \left[\ln F(T^{l+1}) - \ln \gamma_{l+1} - \beta_{l+1} T^{l+1}\right]^2 d\Omega_i = 0$. При этом для определения параметров $\ln \gamma_{l+1}$ и β_{l+1} получим

$$\begin{cases} \ln \gamma_{l+1} \int\limits_{\Omega_i} d\Omega_i + \beta_{l+1} \int\limits_{\Omega_i} T^{l+1} d\Omega_i = \int\limits_{\Omega_i} \ln F(T^{l+1}) d\Omega_i, \\ \ln \gamma_{l+1} \int\limits_{\Omega_i} T^{l+1} d\Omega_i + \beta_{l+1} \int\limits_{\Omega_i} (T^{l+1})^2 d\Omega_i = \int\limits_{\Omega_i} T^{l+1} \ln F(T^{l+1}) d\Omega_i, \end{cases} \qquad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

При проведении вычислительного эксперимента для функции источника энергии в задаче (1)–(4) в виде $F(T) = 10{,}0e^{-0{,}5T}$ была решена прямая задача с целью определения данных вычислительного эксперимента для температуры в точках (x_m, y_m) в условии (4). При решении обратной задачи (1)–(4) выбирались 4, 8, 12 точек, в которых температура для каждого из моментов времени Fo_{l+1} определялась из решения прямой нелинейной нестационарной задачи теплопроводности (1)–(3). Результаты вычислительного эксперимента при решении обратной задачи теплопроводности (1)–(4) приведены в табл. 1 при использовании данных теплофизического эксперимента в восьми точках. Использование данных теплофизического эксперимента в четырех точках приводит к рассогласованию результатов с точными значениями для параметров γ и β в пределах, не превышающих 1%.

Предложенный в работе подход к идентификации параметров функции, характеризующей мощность источника энергии, по данным теплофизического эксперимента позволяет уточнять математические модели тепловых процессов в двумерных системах с источниками энергии. К данным системам относятся платы электронных устройств, приборные панели космических аппаратов и др. Это позволяет значительно повысить степень адекватности моделирования тепловых процессов по отношению к реально протекающим в системах с источниками энергии.

1. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
2. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
3. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. – Киев: Наук. думка, 1978. – 140 с.
4. *Стоян Ю. Г., Проценко В. С., Шейко Т. И. и др.* Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики. – Киев: Наук. думка, 1986. – 264 с.
5. *Стоян Ю. Г., Путятин В. П.* Размещение источников физических полей. – Киев: Наук. думка, 1981. – 184 с.
6. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. – Киев: Наук. думка, 1977. – 235 с.
7. *Рвачев В. Л., Синекоп Н. С.* Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наук. думка, 1990. – 212 с.
8. *Рвачев В. Л., Курпа Л. В.* R-функции в задачах теории пластин. – Киев: Наук. думка, 1987. – 176 с.
9. *Слесаренко А. П., Меша Ю. В.* Математическое моделирование температурных полей в многослойном анизотропном теле сложного сечения // Доп. НАН України. – 2003. – № 5. – С. 82–85.
10. *Слесаренко А. П., Котульский Д. А.* Регионально-аналитическое моделирование конвективного теплообмена с учетом взаимного влияния стенок трубы и движущейся жидкости // Там же. – № 4. – С. 77–82.
11. *Слесаренко А. П., Сафонов Н. А., Зарубин С. А.* R-функции, структурный и проекционные методы в математическом моделировании нелинейных тепловых процессов в областях неканонической формы с источниками энергии // Там же. – 2005. – № 3. – С. 78–82.
12. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1969. – 368 с.
13. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975. – 558 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 03.07.2006