

В. П. Голуб, Ю. М. Кобзарь, П. В. Фернати

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ
ИЗОТРОПНЫХ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ
ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; creep@inmech.kiev.ua*

Abstract. The relationships between the heredity kernels of isotropic nonlinear viscoelastic materials under the complex and one-dimensional stress states are formulated. The constitutive equations are given in the form that corresponds to the hypothesis of deviators proportionality. The nonlinearity of viscoelastic properties is given by the models of the Rabotnov's type one. The problems of analysis of the creep strains and stress relaxation in the thin-walled tubular elements under combined load of tension with torsion are solved and experimentally approved.

Key words: nonlinear viscoelasticity, isotropic material, the complex stress state, hypothesis of deviators proportionality, creep kernel, stress relaxation kernel, thin-walled tubular element, tension with torsion.

Введение.

Решение задач линейной и нелинейной теорий вязкоупругости наследственного типа тесно связано с выбором структуры ядер наследственности, включающих ядра ползучести и ядра релаксации. Ядра задаются некоторыми заранее выбранными функциями, удовлетворяющими ряду требований и содержащими необходимое число параметров, которые подлежат определению из экспериментов.

При одномерном напряженном состоянии ядра наследственности и параметры ядер определяются непосредственно по результатам аппроксимации данных прямых измерений деформаций ползучести или релаксации напряжений функциями, задающими ядра. Детальный анализ методов выбора функций, задающих ядра наследственности, и методов определения параметров ядер наследственности линейно- и нелинейно-вязкоупругих материалов при одномерном напряженном состоянии представлен в [1, 2, 8 – 14, 21, 23].

Задача идентификации ядер наследственности при сложном напряженном состоянии является существенно более сложной и её решение ограничивается рассмотрением некоторых частных случаев.

В случае линейно-вязкоупругих материалов эта задача сводится, в основном, к установлению зависимости между ядрами наследственности при сложном и одномерном напряженных состояниях [3, 4, 16, 19]. Определяющие уравнения линейной теории вязкоупругости при сложном напряженном состоянии задаются в виде суперпозиции уравнения для сдвигов и уравнения объемного деформирования [3, 4, 19] и исходя из гипотезы пропорциональности девиаторов [13, 14]. В качестве одномерного напряженного состояния рассматривались одноосное растяжение гладких цилиндрических образцов с измерением продольных и поперечных деформаций ползучести и чистое кручение тонкостенных трубчатых образцов с измерением угловых деформаций ползучести.

Исследования по идентификации ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии весьма немногочисленны и ограничиваются, как правило, двумерными задачами [8, 9, 17]. Обзор соответствующих процедур, основанных на использовании кратно-интегрального представления Volterra – Freshet, изложен в [22].

В настоящей работе задача идентификации ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии решается путем формулировки соотношений, устанавливающих зависимость между ядрами ползучести при сложном и одномерном напряженных состояниях в рамках модели вязкоупругости, основанной на гипотезе пропорциональности девиаторов и на задании нелинейности вязкоупругих свойств в форме уравнений типа уравнения Работнова.

§1. Постановка задачи. Исходные соотношения.

Рассматриваются процессы ползучести и релаксации напряжений изотропных, однородных, нестареющих нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. Определяющие уравнения ползучести, задающие зависимость между компонентами тензора деформаций ε_{ij} , тензора напряжений σ_{ij} и временем t при постоянной температуре записываются для таких материалов в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) \quad (i, j = \overline{1, 3}); \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) &= \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) &= \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.1)$$

решением которых являются уравнения релаксации

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t) &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i(t); t)}{\varepsilon_i(t)} \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \right) \quad (i, j = \overline{1, 3}); \\ \sigma_i(t) &= \varphi_i(\varepsilon_i(t)) - \lambda_i \int_0^t R_i(t-\tau) \varphi_i(\varepsilon_i(\tau)) d\tau; \\ \sigma_0(t) &= \varphi_v(\varepsilon_v(t)) - \lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau) \varphi_v(\varepsilon_v(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\varepsilon_v(\cdot)$ – объемная деформация; $\varepsilon_i(\cdot)$ – интенсивность деформаций; $\sigma_0(t)$ – среднее напряжение; $\sigma_i(t)$ – интенсивность напряжений; $\varphi_i(\varepsilon_i(t))$, $\varphi_v(\varepsilon_v(t))$ – функции, задающие нелинейность скалярных вязкоупругих свойств; $K_i(t-\tau)$, $K_v(t-\tau)$ и $R_i(t-\tau)$, $R_v(t-\tau)$ – ядра ползучести и релаксации, соответственно; λ_i , λ_v – реологические параметры; δ_{ij} – дельта-функция Кронекера.

Идентификация ядер ползучести $K_i(t-\tau)$ и $K_v(t-\tau)$ в (1.1) и ядер релаксации $R_i(t-\tau)$ и $R_v(t-\tau)$ в (1.2) осуществляется с использованием результатов испытаний на ползучесть при постоянных напряжениях двух групп одномерных базовых экспериментов.

Первая группа базовых экспериментов включает испытания на ползучесть сплошных цилиндрических образцов при одноосном растяжении с замером продольных и поперечных деформаций. Зависимости между напряжениями, деформациями и временем задаются в этом случае уравнениями [11, 13]

$$\varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) = \sigma_{11}(t) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau;$$

$$\varphi_{22}(\varepsilon_{22}(t)) = - \left[\sigma_{11}(t) + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right], \quad (1.3)$$

где $\sigma_{11}(t)$ – одноосное растягивающее напряжение; $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{22}(t)$ – продольная и поперечная деформации, включающие упругую деформацию и деформацию ползучести; $\varphi_{11}(\cdot)$ и $\varphi_{22}(\cdot)$ – функции, задающие нелинейность вязкоупругих свойств в продольном и поперечном направлениях; $K_{11}(t-\tau)$ и $K_{22}(t-\tau)$ – ядра продольной и поперечной ползучести; λ_{11} , λ_{22} – реологические параметры.

Вторая группа базовых экспериментов включает испытания на ползучесть сплошных цилиндрических образцов при одноосном растяжении с замером продольных деформаций и тонкостенных трубчатых образцов при чистом кручении с замером угловых деформаций. Зависимости между напряжениями, деформациями и временем задаются в этом случае уравнениями [2, 3]

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) &= \sigma_{11}(t) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau; \\ \varphi_{21}(\varepsilon_{21}(t)) &= \sigma_{21}(t) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{21}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\sigma_{21}(t)$ – напряжение кручения; $\varepsilon_{21}(t)$ – сдвиговая деформация, включающая упругую деформацию и деформацию ползучести; $\varphi_{21}(\cdot)$ – функция, задающая нелинейность вязкоупругих свойств при чистом сдвиге; $K_{21}(t-\tau)$ – ядро сдвиговой ползучести; λ_{21} – реологический параметр. Остальные обозначения в (1.4) совпадают с принятыми в (1.3).

Уравнения в (1.1), а также уравнения (1.3) и (1.4), задающие физико-механические свойства нелинейно-вязкоупругих материалов, используя модифицированный принцип суперпозиции Leaderman – Rersoz [18, 20], могут быть разрешены относительно деформаций в форме

$$\varepsilon(t) = \psi(\sigma(t)) + \lambda_{\psi} \int_0^t K_{\psi}(t-\tau) \psi(\sigma(\tau)) d\tau \quad (1.5)$$

при условии, что при $\sigma = \text{const}$

$$\lambda_{\psi} K_{\psi}(t-\tau) = \frac{\sigma}{\psi(\sigma)} \frac{d}{dt} \psi \left(\sigma \left(1 + \lambda \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right) \right) \lambda K(t-\tau). \quad (1.6)$$

Здесь $\psi(\cdot) = \varphi^{-1}(\cdot)$ – обращения функций $\varphi(\cdot)$; $K(t-\tau)$ и λ – ядра ползучести и реологические параметры в исходных определяющих уравнениях; $K_{\psi}(t-\tau)$ и λ_{ψ} – ядра ползучести и реологические параметры в обращениях исходных определяющих уравнений вида (1.5); $\varepsilon(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ – компоненты и инварианты напряженно-деформированного состояния в уравнениях (1.1) – (1.4).

В дальнейшем считается, что коэффициенты пропорциональности в соотношениях (1.6) при $\lambda K(t-\tau)$ соизмеримы с единицей и не зависят от уровня напряжений, так что

$$\begin{aligned} \lambda_{\psi i} &= \lambda_i; \quad K_{\psi i}(t-\tau) = K_i(t-\tau); \quad \lambda_{\psi v} = \lambda_v; \quad K_{\psi v}(t-\tau) = K_v(t-\tau); \\ \lambda_{\psi 11} &= \lambda_{11}; \quad K_{\psi 11}(t-\tau) = K_{11}(t-\tau); \quad \lambda_{\psi 22} = \lambda_{22}; \quad K_{\psi 22}(t-\tau) = K_{22}(t-\tau); \\ \lambda_{\psi 21} &= \lambda_{21}; \quad K_{\psi 21}(t-\tau) = K_{21}(t-\tau). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Нелинейность вязкоупругих свойств в уравнениях (1.1) – (1.4) задается функциями $\varphi(\cdot)$ и их обращениями $\psi(\cdot)$, структура которых выбирается в форме сглаживающих кубических сплайнов [3, 14], так что

$$\varphi(\varepsilon) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon + a_{2,j}\varepsilon^2 + a_{3,j}\varepsilon^3; \quad \psi(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3, \quad (1.8)$$

где коэффициенты $a_{0,j}; \dots$ и $b_{0,j}; \dots$ определяются по результатам обработки соответствующих экспериментальных данных (см. раздел 4); j – количество интервалов разбиения осей деформаций и напряжений в графическом представлении экспериментальных данных.

Ядра наследственности в (1.1) – (1.5) задаются дробно-экспоненциальными функциями [20]

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]};$$

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda + \beta)^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \quad (1.9)$$

где α, β – параметры ядер, подлежащие определению из экспериментов.

Задача заключается в установлении зависимости между ядрами ползучести нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном и одномерном напряженных состояниях, в определении параметров ядер и в экспериментальной апробации сформулированных соотношений между ядрами на задачах расчета деформаций ползучести и релаксации напряжений в тонкостенных трубчатых элементах из полимерных материалов при комбинированном нагружении растяжением с кручением.

§2. Идентификация скалярных ядер наследственности при сложном напряженном состоянии.

Устанавливается зависимость между ядрами интенсивности деформаций ползучести и объемной ползучести, задающими скалярные свойства ползучести при сложном напряженном состоянии, и ядрами продольной, поперечной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении, задающими базовые характеристики ползучести.

2.1. Компоненты и инварианты тензоров напряжений и деформаций. При одноосном растяжении компоненты тензоров напряжений и деформаций в случае измерения в эксперименте продольных и поперечных деформаций записываются в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(t) \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

в случае измерения в эксперименте только продольных деформаций – в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{11}(t) \end{Bmatrix}, \quad (2.2)$$

а при чистом кручении – в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} 0 & \tau_{21}(t) & 0 \\ \tau_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} 0 & \varepsilon_{12}(t) & 0 \\ \varepsilon_{21}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь $\sigma_{11}(t)$ – одноосное растягивающее напряжение; $\varepsilon_{11}(t)$, $\varepsilon_{22}(t)$, $\varepsilon_{33}(t)$ – продольная и поперечные деформации при одноосном растяжении; $\tau_{12}(t)$, $\tau_{21}(t)$ – касательные напряжения при чистом кручении; $\varepsilon_{12}(t)$, $\varepsilon_{21}(t)$ – сдвиговые деформации при чистом кручении; ν – коэффициент Пуассона.

Зависимости интенсивности напряжений σ_i , интенсивности деформаций ε_i , среднего напряжения σ_0 , объемной деформации ε_v от компонент тензора напряжений σ_{ij} и тензора деформаций ε_{ij} задаются в (1.1) и (1.2) уравнениями

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)}; \\ \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)}; \\ \sigma_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}); \quad \varepsilon_v = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},\end{aligned}\quad (2.4)$$

которые с учетом (2.1), (2.2) и (2.3) записываются в виде

$$\sigma_i(t) = \sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_i(t) = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_{22}(t)); \quad \sigma_0(t) = \frac{1}{3}\sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_v(t) = \varepsilon_{11}(t) + 2\varepsilon_{22}(t), \quad (2.5)$$

в виде

$$\sigma_i(t) = \sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_i(t) = \frac{2(1+\nu)}{3}\varepsilon_{11}(t); \quad \sigma_0(t) = \frac{1}{3}\sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_v(t) = (1-2\nu)\varepsilon_{11}(t) \quad (2.6)$$

и, соответственно, в виде

$$\sigma_i(t) = \sqrt{3}\sigma_{21}(t); \quad \varepsilon_i(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{21}(t); \quad \sigma_0 = 0; \quad \varepsilon_v(t) = 0, \quad (2.7)$$

где в (2.6) принято, что $\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t) = -\nu\varepsilon_{11}(t)$. Деформации ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{22}(t)$ в (2.5) и $\varepsilon_{21}(t)$ в (2.7) измеряются в эксперименте.

2.2. Идентификация скалярных ядер наследственности по ядрам продольной и поперечной ползучести. Устанавливается зависимость между ядрами интенсивности деформаций ползучести $K_i(t-\tau)$ и ядрами объемной ползучести $K_v(t-\tau)$ при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной $K_{11}(t-\tau)$ и поперечной $K_{22}(t-\tau)$ ползучести при одноосном растяжении. Зависимость между ядрами устанавливается исходя из совместного решения уравнений в (1.1), разрешенных относительно $\varepsilon_i(t)$ и $\varepsilon_v(t)$, и уравнений (1.3), разрешенных относительно $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{22}(t)$.

Уравнения в (1.1), разрешенные относительно $\varepsilon_i(t)$ и $\varepsilon_v(t)$ с использованием представления (1.5) и соотношений (1.7), сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(t) &= \psi_i(\sigma_i(t)) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \psi_i(\sigma_i(\tau)) d\tau; \\ \varepsilon_v(t) &= \psi_v(\sigma_0(t)) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \psi_v(\sigma_0(\tau)) d\tau,\end{aligned}\quad (2.8)$$

а уравнения (1.3), разрешенные относительно $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{22}(t)$, – соответственно к уравнениям

$$\varepsilon_{11}(t) = \psi_{11}(\sigma_{11}(t)) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \psi_{11}(\sigma_{11}(\tau)) d\tau;$$

$$\varepsilon_{22}(t) = - \left[\psi_{22}(\sigma_{11}(t)) + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t-\tau) \psi_{22}(\sigma_{11}(\tau)) d\tau \right]. \quad (2.9)$$

Здесь $K_{11}(t-\tau)$, λ_{11} , $K_{22}(t-\tau)$, λ_{22} – ядра и реологические параметры, удовлетворяющие условию (1.6) и равенствам (1.7).

При $\sigma_i(t) = \text{const}$ и $\sigma_0(t) = \text{const}$ уравнения (2.8) записываются с учетом соотношений (2.5) и (2.6) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{3}{2} \psi_i(\sigma_i) \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(\tau) d\tau \right) + \varepsilon_{22}(t); \\ \varepsilon_{22}(t) &= \frac{1}{2} \psi_v(\sigma_0) \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_{11}(t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

а уравнения (2.9) – соответственно, в виде

$$\varepsilon_{11}(t) = \psi_{11}(\sigma_{11}) \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(\tau) d\tau \right); \quad \varepsilon_{22}(t) = -\psi_{22}(\sigma_{11}) \left(1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(\tau) d\tau \right), \quad (2.11)$$

где принято $\psi_i(\cdot) = \varphi_i^{-1}(\cdot)$, $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$, $\psi_{11}(\cdot) = \varphi_{11}^{-1}(\cdot)$, $\psi_{22}(\cdot) = \varphi_{22}^{-1}(\cdot)$.

Уравнения (2.10) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \psi_i(\sigma_{11}) \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(\tau) d\tau \right); \\ \varepsilon_{22}(t) &= \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2} \psi_i(\sigma_{11}) \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где, как и в (2.5), принято

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}; \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}).$$

Из совместного решения уравнений (2.11) и (2.12) для зависимости между ядрами ползучести $K_i(t)$, $K_v(t)$, $K_{11}(t)$, $K_{22}(t)$ и между функциями $\psi_i(\sigma_{11})$, $\psi_v(\sigma_{11})$, $\psi_{11}(\sigma_{11})$, $\psi_{22}(\sigma_{11})$ получаем две системы уравнений

$$\begin{cases} \psi_i(\sigma_{11}) \lambda_i K_i(t) + \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) \lambda_v K_v(t) = \psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t); \\ \frac{1}{2} \psi_i(\sigma_{11}) \lambda_i K_i(t) - \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) \lambda_v K_v(t) = \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t); \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \psi_i(\sigma_{11}) = \frac{2}{3} [\psi_{11}(\sigma_{11}) + \psi_{22}(\sigma_{11})]; \\ \psi_v(\sigma_{11}) = \psi_{11}(\sigma_{11}) - 2\psi_{22}(\sigma_{11}), \end{cases}$$

определители которых не равны нулю, что свидетельствует о существовании нетривиальных решений систем уравнений (2.13).

Решение первой системы уравнений в (2.13) с учетом второй системы уравнений позволяет установить зависимость между ядрами ползучести $K_i(t)$ и $K_{11}(t)$ и $K_{22}(t)$ в (1.1) в виде

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) + \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) + \psi_{22}(\sigma_{11})}, \quad (2.14)$$

а между ядрами ползучести $K_v(t)$ и $K_{11}(t)$ и $K_{22}(t)$ в (1.3) в виде

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\psi_{11}(\sigma_{11})\lambda_{11}K_{11}(t) - 2\psi_{22}(\sigma_{11})\lambda_{22}K_{22}(t)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) - 2\psi_{22}(\sigma_{11})}, \quad (2.15)$$

которые позволяют рассчитывать дискретные значения скалярных ядер ползучести нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии, используя значения ядер продольной и поперечной ползучести при одноосном растяжении.

2.3. Идентификация скалярных ядер наследственности по ядрам продольной и сдвиговой ползучести. Устанавливается зависимость между ядрами интенсивности деформаций ползучести $K_i(t-\tau)$ и ядрами объемной ползучести $K_v(t-\tau)$ при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной $K_{11}(t-\tau)$ и сдвиговой $K_{21}(t-\tau)$ ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении.

Зависимость между ядрами устанавливается исходя из совместного решения уравнений в (1.1) разрешенных относительно $\varepsilon_i(t)$ и $\varepsilon_v(t)$ и уравнений (1.4), разрешенных относительно $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{21}(t)$.

Уравнения в (1.1), разрешенные относительно $\varepsilon_i(t)$ и $\varepsilon_v(t)$, записываются в виде (2.8), а уравнения (1.4), разрешенные относительно $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{21}(t)$, соответственно в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \psi_{11}(\sigma_{11}(t)) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau)\psi_{11}(\sigma_{11}(\tau))d\tau; \\ \varepsilon_{21}(t) &= \psi_{21}(\sigma_{21}(t)) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau)\psi_{21}(\sigma_{21}(\tau))d\tau, \end{aligned} \quad (2.16)$$

в котором также использованы представление (1.5) и соотношения (1.7).

Представим далее первое уравнение в (2.8) с учетом соотношений (2.7) в виде

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_i(\sqrt{3}\sigma_{21}(t)) + \frac{\sqrt{3}\lambda_i}{2} \int_0^t K_i(t-\tau)\psi_i(\sqrt{3}\sigma_{21}(\tau))d\tau,$$

приравнявая которое правой части второго уравнения в (2.16) при $\sigma_{21}(t) = \text{const}$, получаем соотношение

$$\psi_{21}(\sigma_{21}) \left[1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(\tau)d\tau \right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_i(\sqrt{3}\sigma_{21}) \left[1 + \lambda_i \int_0^t K_i(\tau)d\tau \right]. \quad (2.17)$$

Функция $\psi_i(\cdot)$, исходя из гипотезы существования единой диаграммы мгновенного деформирования в координатах « $\sigma_i - \varepsilon_i$ », может быть представлена равенством

$$\psi_i(\sigma_i) = \frac{2}{\sqrt{3}}\psi_{21}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}}\right), \quad (2.18)$$

подставляя которое в уравнение (2.17) получаем соотношение

$$1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(\tau)d\tau = 1 + \lambda_i \int_0^t K_i(\tau)d\tau. \quad (2.19)$$

Дифференцируя далее обе части уравнения (2.19) по t и используя теорему Ньютона – Лейбница [10], получаем соотношение

$$\lambda_i K_i(t) = \lambda_{21} K_{21}(t), \quad (2.20)$$

позволяющее рассчитывать дискретные значения ядер интенсивности деформаций ползучести при сложном напряженном состоянии, используя значения ядер сдвиговой ползучести при чистом кручении.

Зависимость между ядрами объемной ползучести $K_v(t-\tau)$ и ядрами продольной $K_{11}(t-\tau)$ и сдвиговой $K_{21}(t-\tau)$ ползучести устанавливается исходя из совместного решения уравнений в (1.1) и уравнений (2.8).

Уравнение объемной деформации в (2.8) с учетом соотношений для $\sigma_0(t)$ и $\varepsilon_v(t)$ в (2.5) представим в виде

$$\varepsilon_{11}(t) + 2\varepsilon_{22}(t) = \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11}(t) \right) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11}(\tau) \right) d\tau, \quad (2.21)$$

а первое уравнение в (1.1) – в виде

$$\varepsilon_{11}(t) - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}(t) + 2\varepsilon_{22}(t)) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(t)}{\sigma_i(t)} \left(\sigma_{11}(t) - \frac{1}{3} \sigma_{11}(t) \right)$$

или, после некоторых упрощений, соответственно, в виде

$$2(\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_{22}(t)) = 3 \frac{\varepsilon_i(t)}{\sigma_i(t)} \sigma_{11}(t). \quad (2.22)$$

Из совместного решения уравнений (2.21) и (2.22) получаем уравнение

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11}(t) \right) + \frac{1}{3} \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11}(\tau) \right) d\tau + \frac{\varepsilon_i(t)}{\sigma_i(t)} \sigma_{11}(t),$$

которое с учетом первого соотношения в (2.8) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = & \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11}(t) \right) + \frac{1}{3} \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11}(\tau) \right) d\tau + \\ & + \psi_i(\sigma_{11}(t)) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \psi_i(\sigma_{11}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Полагая далее, что $\sigma_{11} = \text{const}$ и подставляя (2.18) и (2.20) в (2.23), получаем с учетом (2.18) соотношение

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\sigma_{11}) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(\tau) \psi_{11}(\sigma_{11}) d\tau = & \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \psi_{21} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{11} \right) + \\ & + \frac{1}{3} \lambda_v \int_0^t K_v(\tau) \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) d\tau + \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(\tau) \psi_{21} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{11} \right) d\tau, \end{aligned}$$

в котором примем, что

$$\psi_{11}(\sigma_{11}) = \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \psi_{21} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{11} \right), \quad (2.24)$$

а

$$\lambda_{11} \int_0^t K_{11}(\tau) \psi_{11}(\sigma_{11}) d\tau = \frac{1}{3} \lambda_v \int_0^t K_v(\tau) \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) d\tau + \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(\tau) \psi_{21} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{11} \right) d\tau, \quad (2.25)$$

где неизвестными считаются функции $\psi_i(\cdot)$ и $\lambda_v K_v(\cdot)$.

Дифференцируя далее обе части уравнения (2.25) по t и используя теорему Ньютона – Лейбница [7], а также соотношение для $\psi_v(\cdot)$ из (2.24), для функции $\lambda_v K_v(t)$ получаем соотношение

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) \psi_{11}(\sigma_{11}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_{21} K_{21}(t) \psi_{21}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}}\right)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \psi_{21}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}}\right)}, \quad (2.26)$$

позволяющее рассчитывать дискретные значения ядер объемной ползучести при сложном напряженном состоянии, используя значения ядер продольной ползучести при одноосном растяжении и сдвиговой ползучести при чистом кручении.

§3. Экспериментальная апробация методов идентификации ядер наследственности при сложном напряженном состоянии.

Методы идентификации ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии, изложенные в разделе 2, апробируются экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести и релаксации напряжений при двухосном нагружении.

3.1. Объект исследования. Материальные константы. В качестве объекта исследования выбраны тонкостенные трубчатые образцы из полиэтилена высокой плотности ПЭВП наружным диаметром $d_H = 51$ мм и толщиной стенки $h = 5$ мм. Образцы испытывались на ползучесть и на релаксацию при одноосном растяжении и чистом кручении и комбинированном нагружении растяжением с кручением. Экспериментальные данные заимствованы из [9].

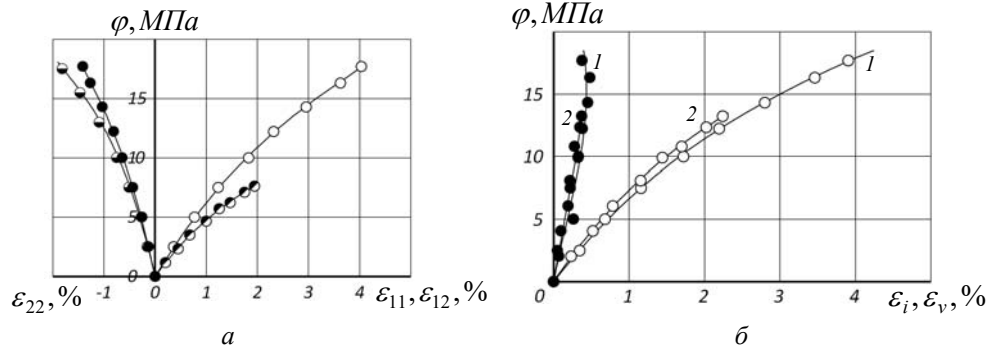


Рис. 1

На рис. 1 приведены «мгновенные» диаграммы деформирования для полиэтилена ПЭВП, построенные по данным базовых экспериментов, для одномерного (а) и сложного (б) напряженных состояний. Для одномерного напряженного состояния построены «мгновенные» диаграммы продольного растяжения (○) в координатах « $\varphi_{11} - \varepsilon_{11}$ » и поперечного сжатия в координатах « $\varphi_{22} - \varepsilon_{22}$ » (●) и « $\bar{\varphi}_{22} - \bar{\varepsilon}_{22}$ » (◐) при одноосном растяжении и мгновенная диаграмма сдвига (◑) в координатах « $\varphi_{21} - \varepsilon_{21}$ » при чистом кручении. Для сложного напряженного состояния построены единые диаграммы деформирования (○) в координатах « $\varphi_i - \varepsilon_i$ » и диаграммы объемного деформирования (●) в координатах « $\varphi_v - \varepsilon_v$ ». Диаграмма поперечного сжатия в координатах « $\varphi_{22} - \varepsilon_{22}$ » построена по результатам замеров величины ε_{22} при одноосном растяжении напряжениями σ_{11} , а диаграмма « $\bar{\varphi}_{22} - \bar{\varepsilon}_{22}$ » по значениям величины ε_{22} , рассчитанной на основе данных о величине ε_{11} и коэффициенте Пуассона ν_0 . Диаграммы деформирования в координатах « $\varphi_i - \varepsilon_i$ » и « $\varphi_v - \varepsilon_v$ » построены для двух групп базовых экспериментов.

Точками на рис. 1, а нанесены исходные экспериментальные данные, а на рис. 1, б – дискретные значения величин ε_i и ε_v , соответствующих выбранным значениям $\varphi_i = \sigma_i$ и $\varphi_v = \sigma_0$ и рассчитанных согласно (2.6). Сплошными линиями на рис. 1, а

нанесена аппроксимация экспериментальных данных сглаживающими кубическими сплайнами (1.8). Линиями 1 на рис. 1, б нанесена аппроксимация дискретных значений функций $\varepsilon_i(\sigma_i)$ и $\varepsilon_v(\sigma_0)$, рассчитанных на основе данных первой группы базовых экспериментов, а линиями 2 – на основе второй группы базовых экспериментов.

В табл. 1 приведены значения коэффициентов сглаживающих кубических сплайнов (1.8) для диаграмм деформирования, приведенных на рис. 1, и для их обращений.

Таблица 1

$\varphi_{11}(\varepsilon_{11})$	$\varepsilon_{11,j}$	$a_{3,j}$, МПа	$a_{2,j}$, МПа	$a_{1,j}$, МПа	$a_{0,j}$, МПа
	0 – 0,042	73407,25	-9730,52	710,0067	0
$\varphi_{22}(\varepsilon_{22})$	$\varepsilon_{22,j}$	$c_{3,j}$, МПа	$c_{2,j}$, МПа	$c_{1,j}$, МПа	$c_{0,j}$, МПа
	0 – 0,019	1460660	-75822,6	1865,488	0
$\varphi_{12}(\varepsilon_{12})$	$\varepsilon_{12,j}$	$p_{3,j}$, МПа	$p_{2,j}$, МПа	$p_{1,j}$, МПа	$p_{0,j}$, МПа
	0 – 0,018	154859,8	-13365,8	593,4515	0
$\varphi_i(\varepsilon_i)$	$\varepsilon_{i,j}$	$f_{3,j}$, МПа	$f_{2,j}$, МПа	$f_{1,j}$, МПа	$f_{0,j}$, МПа
	0 – 0,04	$9,650 \cdot 10^{-4}$	$-1,197 \cdot 10^{-4}$	$7,724 \cdot 10^{-2}$	
$\varphi_v(\varepsilon_v)$	$\varepsilon_{v,j}$	$f_{3,j}$, МПа	$f_{2,j}$, МПа	$f_{1,j}$, МПа	$f_{0,j}$, МПа
	0 – 0,00436	$5,4602 \cdot 10^7$	$-2,6578 \cdot 10^5$	$1,2085 \cdot 10^3$	
$\psi_{11}(\sigma_{11})$	$\sigma_{11,j}$	$b_{3,j}$, МПа ⁻³	$b_{2,j}$, МПа ⁻²	$b_{1,j}$, МПа ⁻¹	$b_{0,j}$, МПа
	0 – 0,018	$1,67 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	0,001422	0
$\psi_{22}(\sigma_{11})$	$\sigma_{11,j}$	$d_{3,j}$, МПа ⁻³	$d_{2,j}$, МПа ⁻²	$d_{1,j}$, МПа ⁻¹	$d_{0,j}$, МПа
	0 – 18	$1,37 \cdot 10^{-6}$	$2,84 \cdot 10^{-6}$	0,000552	0
$\psi_{12}(\sigma_{12})$	$\sigma_{12,j}$	$r_{3,j}$, МПа ⁻³	$r_{2,j}$, МПа ⁻²	$r_{1,j}$, МПа ⁻¹	$r_{0,j}$, МПа
	0 – 7,7	$1,02 \cdot 10^{-5}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$	0,001734	0
$\psi_i(\sigma_i)$	$\sigma_{i,j}$	$g_{3,j}$, МПа ⁻³	$g_{2,j}$, МПа ⁻²	$g_{1,j}$, МПа ⁻¹	$g_{0,j}$, МПа
	0 – 18	$2,03 \cdot 10^{-6}$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	0,001316	0
$\psi_v(\sigma_0)$	σ_0	$m_{3,j}$, МПа ⁻³	$m_{2,j}$, МПа ⁻²	$m_{1,j}$, МПа ⁻¹	$m_{0,j}$, МПа
	0 – 5	$-2,9064 \cdot 10^{-5}$	$1,2844 \cdot 10^{-4}$	$9,5664 \cdot 10^{-4}$	0
	5 – 7	0	0	0	0,004361

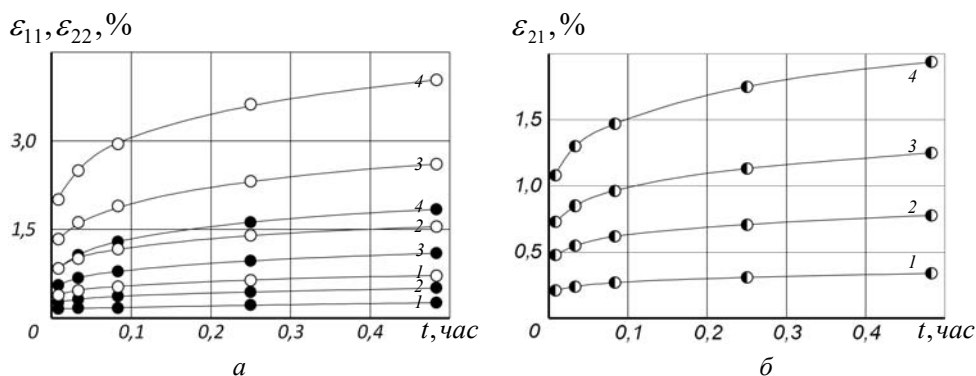


Рис. 2

На рис. 2 приведены базовые кривые продольной (○) и поперечной (●) ползучести полиэтилена ПЭВП при одноосном растяжении (а) напряжениями $\sigma_{11} = 2,5$ (1); 5,0 (2); 7,5 (3); 10,0 (4) МПа и кривые сдвиговой ползучести (●) при чистом кручении (б) напряжениями $\sigma_{21} = 1,17$ (1); 2,34 (2); 3,51 (3); 4,68 (4) МПа. Точками нанесены экспериментальные данные, а линиями – аппроксимация экспериментальных данных сглаживающими кубическими сплайнами [15].

Нелинейность вязкоупругих свойств полиэтилена ПЭВП обосновывается нелинейностью мгновенных диаграмм деформирования (см. рис. 1 и табл. 1) и нарушением условия линейности [13]

$$t_{\alpha,k} = \frac{\delta \bar{J}(t_j) \sqrt{n}}{S_j(t_j)} \geq t_{\alpha,k}^* ; (j = \overline{1, m}), \quad (3.1)$$

где $t_{\alpha,k}$, $t_{\alpha,k}^*$ – расчетное и, соответственно, табличное значения квантиля статистики; $\bar{J}(t_j)$ – выборочное среднее значение функции ползучести $J(t_j)$; $S_j(t_j)$ – выборочное среднее квадратичное отклонение функции ползучести $J(t_j)$; m – число временных интервалов разбиения базовых кривых ползучести; n – объем выборки (число функций ползучести); δ – погрешность.

Нарушение условия линейности (3.1) иллюстрируется сопоставлением на рис. 3 расчетных $t_{\alpha,k}$ и табличных $t_{\alpha,k}^*$ значений квантиля статистики для функций ползучести полиэтилена ПЭВП при одноосном растяжении (а) и чистом кручении (б). Расчетные значения квантиля статистики $t_{\alpha,k}$ нанесены штриховыми линиями для продольной и сдвиговой ползучести и штрихпунктирной линией для поперечной ползучести. Табличные значения квантиля статистики $t_{\alpha,k}^*$ [6] нанесены жирными сплошными линиями.

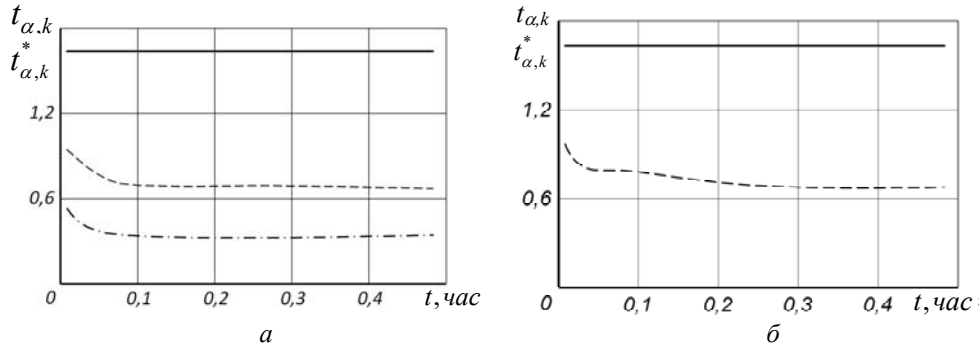


Рис. 3

Из данных, приведенных на рис. 3 следует, что условие линейности (3.1) для всех рассмотренных видов ползучести не выполняется, поскольку $t_{\alpha,k} < t_{\alpha,k}^*$, так что полиэтилен ПЭВП для заданного диапазона напряжений относится к классу нелинейно-вязкоупругих материалов.

Параметры ядер интенсивности деформаций ползучести $K_i(t-\tau)$ и объемной ползучести $K_v(t-\tau)$ в (1.1) определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер, рассчитанных по соотношениям (2.14), (2.15) и (2.20), (2.26), дробно-экспоненциальными функциями (1.9). Соотношения (2.14) и (2.15) позволяют рассчитывать дискретные значения ядер $K_i(t-\tau)$ и $K_v(t-\tau)$ по ядрам продольной $K_{11}(t-\tau)$ и поперечной $K_{22}(t-\tau)$ ползучести, а соотношения (2.20) и (2.26) – по ядрам продольной $K_{11}(t-\tau)$ и сдвиговой $K_{21}(t-\tau)$ ползучести. Методика определения параметров ядер $K_{11}(t-\tau)$, $K_{22}(t-\tau)$ и $K_{21}(t-\tau)$ нелинейно-вязкоупругих материалов изложена в [12, 15]. Параметры этих ядер определяются исходя из условия подобия мгновенных диаграмм деформирования и изохронных диаграмм ползучести.

В табл. 2 приведены рассчитанные по изложенной в [13, 14] методике параметры дробно-экспоненциальных ядер продольной $K_{11}(t-\tau)$ и поперечной $K_{22}(t-\tau)$ ползучести, а в табл. 3 – продольной $K_{11}(t-\tau)$ и сдвиговой $K_{21}(t-\tau)$ ползучести полиэтилена высокой плотности ПЭВП.

Таблица 2

Полиэтилен ПЭВП	$K_{11}(t-\tau), \text{ час}^{-1}$			$K_{22}(t-\tau), \text{ час}^{-1}$		
	α_{11}	$\beta_{11}, \text{ час}^{-(1+\alpha_{11})}$	$\lambda_{11}, \text{ час}^{-(1+\alpha_{11})}$	α_{22}	$\beta_{22}, \text{ час}^{-(1+\alpha_{22})}$	$\lambda_{22}, \text{ час}^{-(1+\alpha_{22})}$
	-0,1681	5,4039	4,5723	-0,2720	3,9906	3,6874
	$K_i(t-\tau), \text{ час}^{-1}$			$K_v(t-\tau), \text{ час}^{-1}$		
	α_i	$\beta_i, \text{ час}^{-(1+\alpha_i)}$	$\lambda_i, \text{ час}^{-(1+\alpha_i)}$	α_v	$\beta_v, \text{ час}^{-(1+\alpha_v)}$	$\lambda_v, \text{ час}^{-(1+\alpha_v)}$
-0,1988	4,9293	4,2870	-0,0574	8,3649	8,0242	

При определении параметров ядер продольной и поперечной ползучести использованы результаты испытаний на ползучесть при одноосном растяжении с замером продольных и поперечных деформаций (см. рис. 2, а), а при определении параметров ядер сдвиговой ползучести – результаты испытаний на ползучесть при чистом кручении с замером угловых деформаций (см. рис. 2, б).

Таблица 3

Полиэтилен ПЭВП	$K_{11}(t-\tau), \text{ час}^{-1}$			$K_{22}(t-\tau), \text{ час}^{-1}$		
	α_{11}	$\beta_{11}, \text{ час}^{-(1+\alpha_{11})}$	$\lambda_{11}, \text{ час}^{-(1+\alpha_{11})}$	α_{22}	$\beta_{22}, \text{ час}^{-(1+\alpha_{22})}$	$\lambda_{22}, \text{ час}^{-(1+\alpha_{22})}$
	-0,1681	5,4039	4,5723	-0,2059	4,6747	3,3220
	$K_i(t-\tau), \text{ час}^{-1}$			$K_v(t-\tau), \text{ час}^{-1}$		
	α_i	$\beta_i, \text{ час}^{-(1+\alpha_i)}$	$\lambda_i, \text{ час}^{-(1+\alpha_i)}$	α_v	$\beta_v, \text{ час}^{-(1+\alpha_v)}$	$\lambda_v, \text{ час}^{-(1+\alpha_v)}$
-0,2059	4,6747	3,3220	-0,0987	7,0030	10,1678	

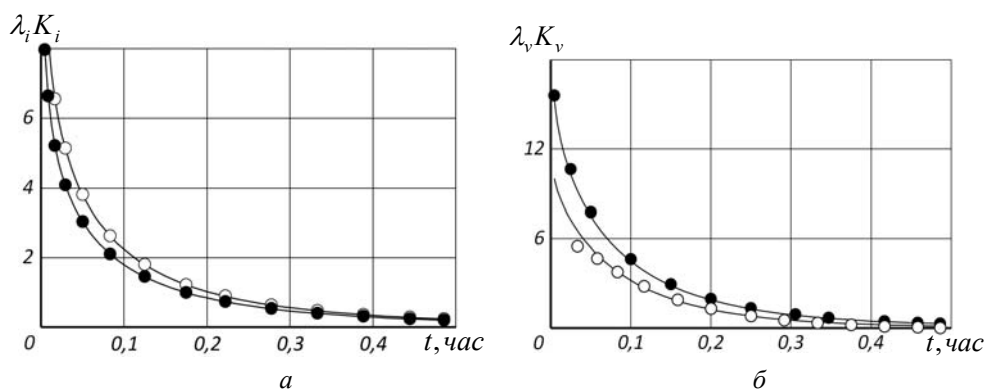


Рис. 4

На рис. 4 приведены дискретные значения (точки) и их аппроксимация дробно-экспоненциальными функциями (линии) ядер интенсивности деформаций ползучести (а) и объемной ползучести (б) для полиэтилена высокой плотности ПЭВП. Дискретные значения ядер, рассчитанных по формулам (2.14) и (2.15), нанесены светлыми точками, а их аппроксимация – линиями. Дискретные значения ядер, рассчитанных по формулам (2.20) и (2.26), нанесены темными точками, а их аппроксимация – линиями. Расчеты по формулам (2.14), (2.15), (2.20) и (2.26) выполнены при условии, что $\sigma_{11} = \text{const}$, $\tau_{21} = \text{const}$, $\tau = 0$. Параметры дробно-экспоненциальных ядер ползучести α_i , β_i , λ_i и α_v , β_v , λ_v , найденные по результатам аппроксимации их дискретных значений, приведены в табл. 2 и 3.

3.2. Ползучесть тонкостенных трубчатых элементов. Методы идентификации ядер наследственности, изложенные в разделе 2, апробируются экспериментально на задачах расчета деформаций продольной, поперечной и сдвиговой ползучести тонкостенных трубчатых элементов при одноосном растяжении, чистом кручении и растяжении с кручением.

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ при комбинированном нагружении тонкостенных трубчатых образцов одноосным растяжением с кручением и соответствующие компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$ записываются в виде

$$\sigma_{ij}(t) = h(t) \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ и } \varepsilon_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) & \varepsilon_{21}(t) & 0 \\ \varepsilon_{12}(t) & \varepsilon_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

где σ_{11} – одноосное растягивающее напряжение; τ_{21} – касательное напряжение кручения; $\varepsilon_{11}(t)$, $\varepsilon_{22}(t)$, $\varepsilon_{33}(t)$ – продольная и поперечные деформации ползучести соответственно; $\varepsilon_{21}(t)$ – сдвиговая деформация ползучести; $h(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Для компонент тензора деформаций ползучести $\varepsilon_{ij}(t)$ из системы уравнений (1.1) с учетом (1.9) получаем уравнение

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_i(t)} \psi_i \left[\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t \frac{(-\beta_i)^n (t-\tau)^{(1+\alpha_i)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]} \sigma_i(\tau) d\tau \right] \left[\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t) \right] + \frac{1}{3} \delta_{ij} \psi_v \left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t \frac{(-\beta_v)^n (t-\tau)^{(1+\alpha_v)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \sigma_0(\tau) d\tau \right], \quad (3.3)$$

где $\psi_i[\cdot]$, $\psi_v[\cdot]$ – обращения функций $\varphi_i(\cdot)$, $\varphi_v(\cdot)$, задающих нелинейность скалярных вязкоупругих свойств в (1.1); α_i , β_i , λ_i и α_v , β_v , λ_v – параметры дробно-экспоненциальных ядер интенсивности деформаций ползучести и объемной ползучести соответственно. Остальные обозначения совпадают с принятыми в (1.1) и (1.9).

Продольная ползучесть. Рассчитываются деформации продольной ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП при одноосном растяжении напряжениями $\sigma_{11} = \text{const}$ ($\tau_{21} = \tau_{12} = 0$) и при комбинированном нагружении одноосным растяжением напряжениями $\sigma_{11} = \text{const}$ и кручением напряжениями $\tau_{21} = \tau_{22} = \text{const}$.

Для деформаций продольной ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ из (3.3) при $\sigma_{11} = \text{const}$ и $\tau_{21} = \tau_{12} = 0$ получаем с учетом (2.5) уравнение

$$\varepsilon_{11}(t) = \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sigma_{11} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^3 m_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \right\}^k, \quad (3.4)$$

а при $\sigma_{11} = \text{const}$ и $\tau_{21} = \tau_{22} = \text{const}$ – с учетом (2.4) уравнение

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k +$$

$$+ \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=0}^3 m_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \right\}^k. \quad (3.5)$$

Здесь $g_{k,j}$ и $m_{k,j}$ – коэффициенты сглаживающих кубических сплайнов вида (1.8) обращений $\psi_i[\cdot]$ и $\psi_v[\cdot]$ функций $\varphi_i(\cdot)$, $\varphi_v(\cdot)$, имеющие размерность деформаций и зависящие от j -го интервала разбиения оси напряжений.

Результаты расчетов деформаций продольной ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП, выполненных по уравнениям (3.4) и (3.5) с использованием приведенных в табл. 1 – 3 значений материальных констант, сопоставлены на рис. 5 с экспериментальными данными при одноосном растяжении (а) и комбинированном нагружении растяжением с кручением (б). Здесь и далее экспериментальные данные нанесены точками, а результаты расчетов – линиями. Штриховыми линиями нанесены результаты расчетов с использованием параметров ядер $K_i(t-\tau)$ и $K_v(t-\tau)$, приведенных в табл. 2, а штрихпунктирными линиями – с использованием параметров ядер $K_i(t-\tau)$ и $K_v(t-\tau)$, приведенных в табл. 3.

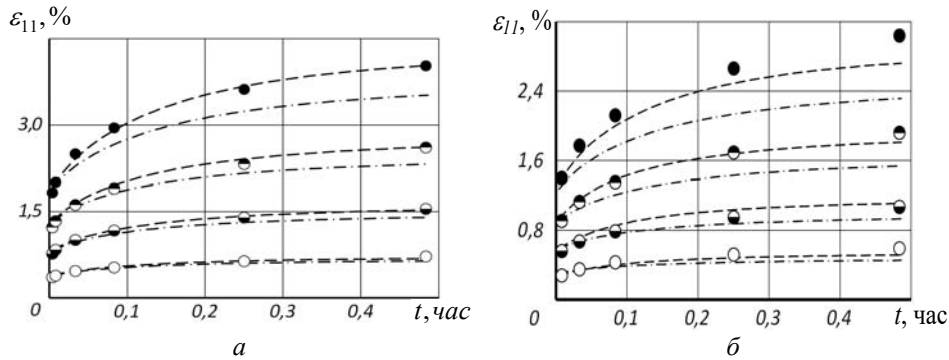


Рис. 5

При одноосном растяжении сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными выполнено при напряжениях $\sigma_{11} = 2,5$ (○); $5,0$ (◻); $7,5$ (◻); $10,0$ (●) МПа, а при комбинированном нагружении растяжением с кручением – при напряжениях $\sigma_{11} = 1,77$; $\tau_{21} = 0,83$ (○) МПа; $\sigma_{11} = 3,54$; $\tau_{21} = 1,66$ (◻) МПа; $\sigma_{11} = 5,31$; $\tau_{21} = 2,49$ (◻) МПа; $\sigma_{11} = 7,08$; $\tau_{21} = 3,32$ (●) МПа.

Поперечная ползучесть. Рассчитываются деформации поперечной ползучести $\varepsilon_{22}(t)$ тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП при одноосном растяжении напряжениями $\sigma_{11} = \text{const}$ ($\tau_{21} = \tau_{12} = 0$) и при комбинированном нагружении одноосным растяжением напряжениями $\sigma_{11} = \text{const}$ и кручением напряжениями $\tau_{21} = \tau_{12} = \text{const}$.

Для деформаций поперечной ползучести $\varepsilon_{22}(t)$ из (3.3) при $\sigma_{11} = \text{const}$ и $\tau_{21} = \tau_{12} = 0$ получаем с учетом (2.5) уравнение

$$\varepsilon_{22}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sigma_{11} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^3 m_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \right\}^k, \quad (3.6)$$

а при $\sigma_{11} = \text{const}$ и $\tau_{21} = \tau_{12} = \text{const}$ с учетом (2.4) – уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}(t) = & -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k + \\ & + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^3 m_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \right\}^k, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (3.4) и (3.5).

Результаты расчетов деформаций поперечной ползучести $\varepsilon_{22}(t)$ тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП, выполненным по уравнениям (3.6) и (3.7) с использованием приведенных в табл. 1 – 3 значений материальных констант, сопоставлены на рис. 6 с экспериментальными данными при одноосном растяжении (а) и комбинированном нагружении растяжением с кручением (б). При одноосном растяжении сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными выполнено при напряжениях $\sigma_{11} = 2,5$ (○); 5,0 (◐); 7,5 (◑); 10,0 (●) МПа. При комбинированном нагружении растяжением с кручением сравниваются значения деформаций ползучести при напряжениях $\sigma_{11} = 1,77$; $\tau_{21} = 0,83$ (○) МПа; $\sigma_{11} = 3,54$; $\tau_{21} = 1,66$ (◐) МПа; $\sigma_{11} = 5,31$; $\tau_{21} = 2,49$ (◑) МПа; $\sigma_{11} = 7,08$; $\tau_{21} = 3,32$ (●) МПа, рассчитанные с использованием параметров ядер ползучести $K_i(t-\tau)$ и $K_v(t-\tau)$, приведенных в табл. 2 (штриховая линия) и в табл. 3 (штрихпунктирная линия).

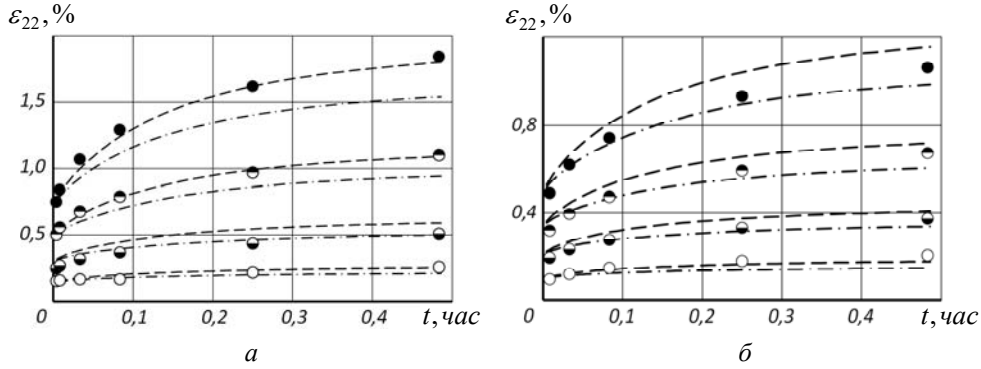


Рис. 6

Сдвиговая ползучесть. Рассчитываются деформации сдвиговой ползучести $\varepsilon_{21}(t)$ тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП при чистом кручении напряжениями $\tau_{21} = \text{const}$ ($\sigma_{11} = 0$) и при комбинированном нагружении одноосным растяжением напряжениями $\sigma_{11} = \text{const}$ и кручением напряжениями $\tau_{21} = \tau_{12} = \text{const}$.

Для деформаций сдвиговой ползучести $\varepsilon_{21}(t)$ из (3.3) при $\tau_{21} = \tau_{12} = \text{const}$ и $\sigma_{11} = 0$ получаем с учетом (2.7) уравнение

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{3}\tau_{21} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k, \quad (3.8)$$

а при $\sigma_{11} = \text{const}$ и $\tau_{21} = \tau_{12} = \text{const}$ с учетом (2.5) и (2.7) – уравнение

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k, \quad (3.9)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (3.4) и (3.5).

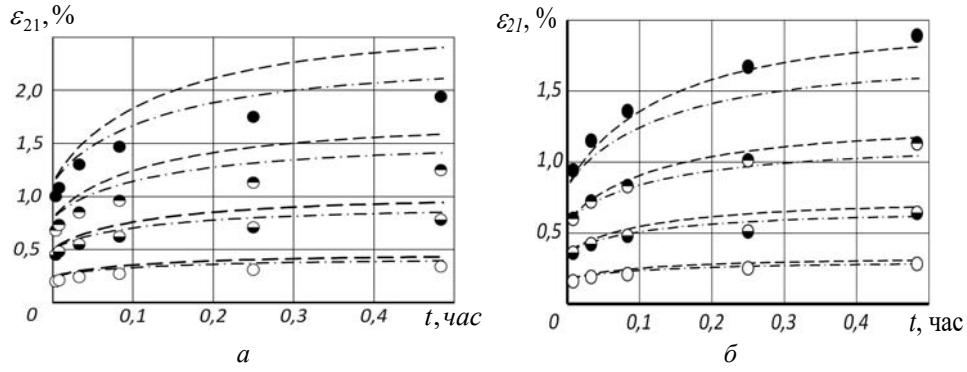


Рис. 7

Результаты расчетов деформаций сдвиговой ползучести $\varepsilon_{21}(t)$ тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП, выполненных по уравнениям (3.8) и (3.9) с использованием приведенных в табл. 1 – 3 значений материальных констант, сопоставлены на рис. 7 с экспериментальными данными при чистом кручении (а) и комбинированном нагружении растяжением с кручением (б). При чистом кручении сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными выполнено при напряжениях $\tau_{21} = 1,17$ (○); 2,34 (◐); 3,51 (◑); 4,68 (●) МПа, а при комбинированном нагружении растяжением с кручением – при напряжениях $\sigma_{11} = 1,77$; $\tau_{21} = 0,83$ (○) МПа; $\sigma_{11} = 3,54$; $\tau_{21} = 1,66$ (◐) МПа; $\sigma_{11} = 5,31$; $\tau_{21} = 2,49$ (◑) МПа; $\sigma_{11} = 7,08$; $\tau_{21} = 3,32$ (●) МПа.

3.3. Релаксация напряжений в тонкостенных трубчатых элементах. Методы идентификации ядер наследственности, изложенные в разделе 2, апробируются экспериментально на задачах расчета релаксации нормальных и касательных напряжений в тонкостенных трубчатых элементах при одноосном растяжении, чистом кручении и комбинированном нагружении растяжением с кручением.

Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$ и соответствующие компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ при комбинированном деформировании тонкостенных трубчатых образцов одноосным растяжением с кручением записываются в виде

$$\varepsilon_{ij}(t) = h(t) \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}; \quad \sigma_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) & \tau_{21}(t) & 0 \\ \tau_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.10)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (3.2).

Для компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ в (3.10) из системы уравнений (1.2) получаем с учетом (1.9) уравнение

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon_i(\sigma_i(t), t)} \left[\varphi_i(\varepsilon_i(t)) - \lambda_i \int_0^t \frac{(-1)^n (\lambda_i + \beta_i)^n (t - \tau)^{(1+\alpha_i)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]} \varphi_i(\varepsilon_i(\tau)) d\tau \right] \times \\ \times \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \right) + \delta_{ij} \left[\varphi_v(\varepsilon_v(t)) - \lambda_v \int_0^t \frac{(-1)^n (\lambda_v + \beta_v)^n (t - \tau)^{(1+\alpha_v)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \varphi_v(\varepsilon_v(\tau)) d\tau \right], \quad (3.11)$$

где $\varepsilon_i(t)$ и $\varepsilon_v(t)$ – интенсивность деформаций ползучести и деформация объемной ползучести; $\varphi_i(\cdot)$ и $\varphi_v(\cdot)$ – функции, задающие нелинейность скалярных вязкоупругих свойств. Остальные обозначения совпадают с принятыми в (3.3).

Релаксация нормальных напряжений. Рассчитывается уменьшение во времени растягивающих напряжений $\sigma_{11}(t)$ в тонкостенных трубчатых элементах из полиэтилена ПЭВП при одноосном деформировании удлинениями $\varepsilon_{11} = \text{const}$ ($\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0$) и комбинированном деформировании удлинениями $\varepsilon_{11} = \text{const}$ и сдвигами $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \text{const}$.

Для расчета релаксации нормальных напряжений $\sigma_{11}(t)$ из (3.11) при $\varepsilon_{11} = \text{const}$ и $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0$ получаем с учетом (2.4) и (2.6) уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t) = & \frac{2}{3} \sum_{k=0}^3 f_{k,j} \left[\frac{2(1+\nu_*)}{3} \varepsilon_{11} \right]^k \left[1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] + \\ & + \sum_{m=0}^3 k_{m,j} [(1-2\nu_*)\varepsilon_{11}]^m \left[1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

а при $\varepsilon_{11} = \text{const}$ и $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \text{const}$ – уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t) = & \frac{3}{2} \frac{(1+\nu_*)}{\sqrt{[(1+\nu_*)\varepsilon_{11}]^2 + 3\varepsilon_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 f_{k,j} \left[\frac{2}{3} \sqrt{[(1+\nu_*)\varepsilon_{11}]^2 + 3\varepsilon_{21}^2} \right]^k \times \\ & \times \left[1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] + \sum_{m=0}^3 k_{m,j} [(1-2\nu_*)\varepsilon_{11}]^m \times \\ & \times \left[1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где ν_* – коэффициент Пуассона нелинейно-упругого материала; $f_{k,j}$ и $k_{m,j}$ – коэффициенты сглаживающих кубических сплайнов вида (1.8) функций $\varphi_i(\cdot)$ и $\varphi_v(\cdot)$, имеющие размерность напряжений и зависящие от j -го интервала разбиения оси деформаций.

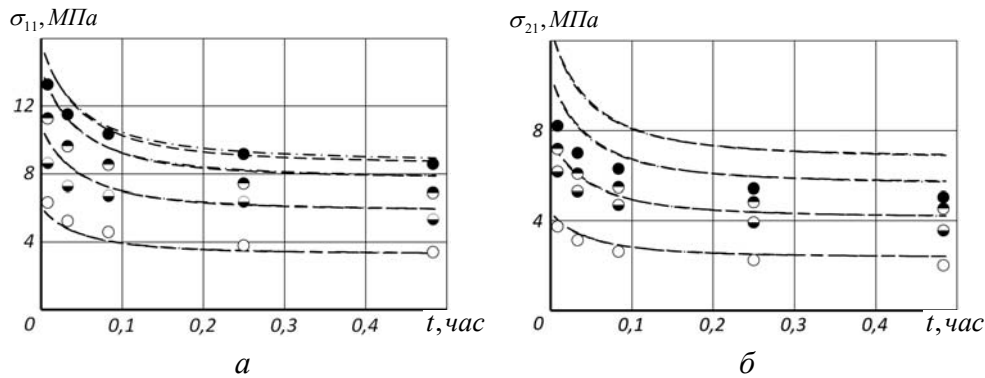


Рис. 8

Результаты расчетов релаксации нормальных напряжений $\sigma_{11}(t)$ в тонкостенных трубчатых элементах из полиэтилена высокой плотности ПЭВП, выполненных по уравнениям (3.12) и (3.13) с использованием приведенных в табл. 1 – 3 значений материальных констант, сопоставлены на рис. 8 с экспериментальными данными при одноосном растяжении (а) и комбинированном нагружении растяжением с кручением (б). При одноосном растяжении фиксировались значения удлинений $\varepsilon_{11} = 1,0$ (○); $2,0$ (○); $3,0$ (⊖); $4,0$ (●) %, а при комбинированном нагружении растяжением с кручени-

ем фиксировались значения удлинений ε_{11} и сдвигов ε_{21} : 0,71 и 0,61 (○); 1,41 и 1,22 (◐); 2,12 и 2,84 (◑); 2,83 и 2,45 (●) %.

Релаксация касательных напряжений. Рассчитывается уменьшение во времени касательных напряжений $\tau_{21}(t)$ в тонкостенных трубчатых элементах из полиэтилена высокой плотности ПЭВП при чистом кручении сдвиговыми деформациями $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \text{const}$ ($\varepsilon_{11} = 0$) и при комбинированном деформировании удлинениями $\varepsilon_{11} = \text{const}$ и сдвигами $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \text{const}$.

Для расчета релаксации касательных напряжений $\tau_{21}(t)$ из (3.10) при $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \text{const}$ и $\varepsilon_{11} = 0$ получаем с учетом (2.4) и (2.7) уравнение

$$\tau_{21}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{m=0}^3 f_{k,j} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{21} \right]^m \left[1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right], \quad (3.14)$$

а при $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \text{const}$ и $\varepsilon_{11} = \text{const}$ – уравнение

$$\tau_{21}(t) = \frac{\varepsilon_{21}}{\sqrt{[(1+\nu_*)\varepsilon_{11}]^2 + 3\varepsilon_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 f_{k,j} \left[\frac{2}{3} \sqrt{[(1+\nu_*)\varepsilon_{11}]^2 + 3\varepsilon_{21}^2} \right]^k \times \left[1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right], \quad (3.15)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (3.12) и (3.13).

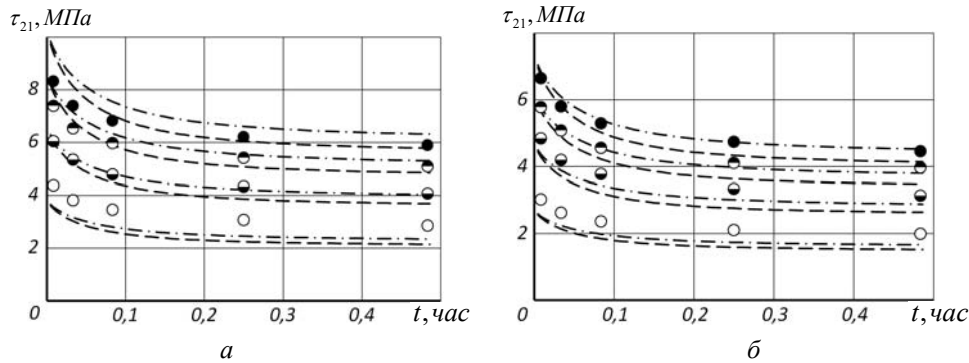


Рис. 9

Результаты расчетов релаксации касательных напряжений $\tau_{21}(t)$ в тонкостенных трубчатых элементах из полиэтилена высокой плотности ПЭВП, выполненных по уравнениям (3.14) и (3.15) с использованием приведенных в табл. 1 – 3 значений материальных констант сопоставлены на рис. 9 с экспериментальными данными при чистом кручении (а) и комбинированном нагружении растяжением с кручением (б). При чистом кручении фиксировались значения сдвигов $\varepsilon_{21} = 0,87$ (○); 1,73 (◐); 2,60 (◑); 3,40 (●) %, а при комбинированном нагружении растяжением с кручением фиксировались значения удлинений ε_{11} и сдвигов ε_{21} : 0,71 и 0,61 (○); 1,41 и 1,22 (◐); 2,12 и 2,84 (◑); 2,83 и 2,45 (●) %.

§4. Обсуждение результатов.

Эффективность сформулированных в работе методов идентификации скалярных ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии основывается на решении задач расчета деформаций ползучести и релаксации напряжений в тонкостенных трубчатых элементах из поли-

этилена высокой плотности ПЭВП. Рассмотрено нагружение трубчатых элементов одноосным растяжением, чистым кручением и комбинированным нагружением растяжением с кручением. Рассчитывались деформации продольной, поперечной и сдвиговой ползучести, а также релаксация нормальных и касательных напряжений. Уровень приложенных напряжений изменялся примерно на порядок.

В целом, как это следует из сопоставления расчетных и экспериментальных данных, приведенных на рис. 5 – 9, получено вполне удовлетворительное согласование результатов расчетов с результатами экспериментов. Максимальная погрешность при расчетах деформаций ползучести не превышает 25% и получена для деформаций продольной ползучести ε_{11} (см. рис. 5, б) при комбинированном нагружении растяжением с кручением. При расчетах релаксации напряжений максимальная погрешность составляет 41% и получена для нормальных напряжений σ_{11} (см. рис. 8, б) также при комбинированном нагружении растяжением с кручением. С экспериментальными данными лучше согласуются результаты расчетов деформаций ползучести, выполненные с использованием параметров ядер, которые найдены по методике, основанной на замерах деформаций продольной и поперечной ползучести при одноосном растяжении. В этом случае максимальная погрешность не превышает 10%. Результаты расчетов релаксации напряжений от методики определения параметров ядер наследственности практически не зависят.

При расчете деформаций ползучести и релаксации напряжений с использованием параметров ядер $K_i(t)$ и $K_v(t)$, дискретные значения для которых рассчитывались по формулам (2.14) и (2.15), нелинейность вязкоупругих свойств задавалась только функциями $\psi_{11}(\sigma_{11})$ и $\psi_{22}(\sigma_{11})$. Решение первой системы уравнений в (2.13) позволяет установить зависимость между ядрами ползучести $K_i(t)$, $K_v(t)$ в (1.1) и $K_{11}(t)$, $K_{22}(t)$ в (1.3) в виде

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{2 \psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) + \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{3 \psi_i(\sigma_{11})} \quad (4.1)$$

и, соответственно, в виде

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) - 2 \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right)}, \quad (4.2)$$

где нелинейность вязкоупругих свойств при сложном напряженном состоянии задается также нелинейностью зависимости интенсивности деформаций ε_i от интенсивности напряжений σ_i и нелинейностью зависимости объемной деформации ε_v от среднего напряжения σ_0 .

На рис. 10, в качестве примера, приведены результаты расчета (линии) деформаций сдвиговой ползучести (а) и релаксации касательных напряжений (б) в тонкостенных трубчатых элементах из полиэтилена высокой плотности ПЭВП, выполненные с использованием соотношений для ядер ползучести (2.14) и (2.15) – штриховые линии и (4.1) и (4.2) – штрихпунктирные линии при комбинированном нагружении растяжением с кручением. Точками нанесены экспериментальные данные, заимствованные из [9]. Расчетные и экспериментальные значения деформаций ползучести соответствовали значениям напряжений на рис. 7, б, а расчетные и экспериментальные значения релаксации напряжений – значениям деформаций на рис. 9, б.

Результаты расчетов деформаций ползучести и релаксации напряжений, выполненные для двух форм соотношений между ядрами ползучести при сложном и одномерном напряженном состояниях, практически, как видно из рис. 10, совпадают. Аналогичные оценки получены для деформаций продольной и поперечной ползучести и для релаксации нормальных напряжений.

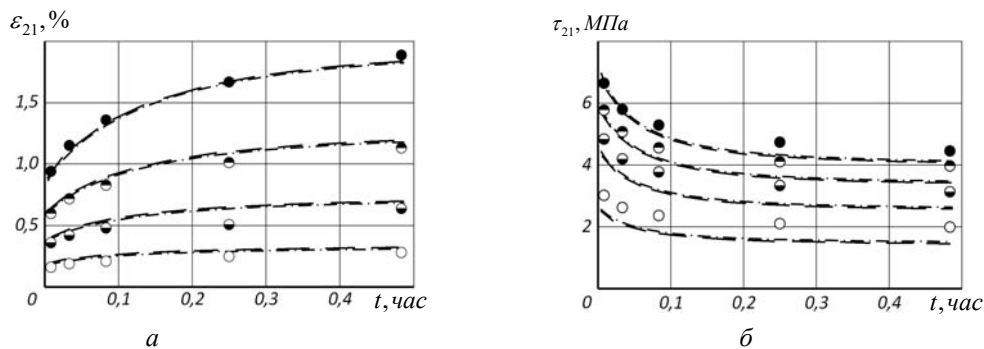


Рис. 10

Заключение.

Задача идентификации ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии сводится, по существу, к установлению зависимости между ядрами, задающими вязкоупругие свойства при сложном и одномерном напряженных состояниях. При сложном напряженном состоянии в качестве ядер наследственности, подлежащих идентификации, рассматриваются ядра интенсивности деформаций ползучести и ядра объемной ползучести. В качестве базовых ядер наследственности при одномерном напряженном состоянии может быть использована комбинация ядер продольной и поперечной ползучести при одноосном растяжении или комбинация ядер продольной ползучести при одноосном растяжении и сдвиговой ползучести при чистом кручении.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Сформульовано залежності між ядрами спадковості ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного та одновимірного напружених станів. Визначальні рівняння нелінійної в'язкопружності задані у формі, що відповідає гіпотезі пропорційності девіаторів. Нелінійність в'язкопружних властивостей задається моделями типу моделі Работнова. Розв'язано та апробовано експериментально задачі розрахунку деформацій повзучості та релаксації напружень у тонкостінних трубчастих елементах за умов комбінованого навантаження розтягом із скрученням.

1. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. Теория и приложения. – М.: Наука, 1973. – 288 с.
2. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1977. – 248 с.
3. Колтунов А.А. Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие) // Механика полимеров. – 1969. – № 4. – С. 754 – 758.
4. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высш. шк., 1976. – 277 с.
5. Крегерс А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – № 2. – С. 195 – 201.
6. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х томах. Том 2. – Ленинград: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1960. – 860 с.
8. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction. – New-York: Academic Press Inc., 1971. – 338 p.
9. Ferry J.D. Viscoelastic Properties of Polymers. 2nd ed. – New-York: John Willey and Sons, 1971. – 633 p.
10. Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976. – 367 p.
11. Golub V.P., Application of Fractional Exponential Hereditary Kernels in the Nonlinear Theory of Viscoelasticity // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 6. – P. 727 – 734.

12. Golub V.P., Fernati P.V., Lyashenko Ya.G. Determining the Parameters of the Fractional Exponential Hereditary Kernels of Linear Viscoelastic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 9. – P. 963 – 974.
13. Golub V.P., Kobzar' Yu.M., Ragulina V.S. A Method for Determining the Parameters of the Hereditary Kernels in the Nonlinear Theory of Viscoelasticity // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 3. – P. 290 – 301.
14. Golub V.P., Pavlyuk Ya.V., Fernati P.V. Determining Parameters of Fractional-Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 4. – P. 419 – 433.
15. Golub V.P., Pogrebnyak A.D., Romanenko I.B. Application of Smoothing Spline Approximations in Problems on Identifications of Creep Parameters // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 6. – P. 477 – 484.
16. Kobzar' Yu.M. Models of Long-Term Brittle Fracture of Rods in Tension and Compression under Creep Conditions // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 4. – P. 444 – 453.
17. Lai J.S.Y., Findley W.N. Behavior of nonlinear viscoelastic material under simultaneous stress relaxation in tension and creep in torsion // *ASME J. Appl. Mech.* – 1969. – N 36 – P. 22 – 37.
18. Leaderman H. Elastic and Creep Properties of Filaments Materials and Other High Polymers. – Washington: Textile Foundation, 1943. – 289 p.
19. Maslov B.P. Combined Numerical and Analytical Determination of Poisson's Ratio for Viscoelastic Isotropic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 2. – P. 220 – 230.
20. Persoz B. Le principe de superposition de Boltzman // *Cahier Groupe Frans. Études Rhéol.* – 1957. – **2**, N 1. – P. 237 – 245.
21. Rabotnov Y.N. Creep problems in structural members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.
22. Stafford R.O. On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1969. – **17**, N 5. – P. 339 – 354.
23. Ward I.M. Mechanical Properties of Solid Polymers. – New York: Willey and Sons, 1971. – 345 p.

Поступила 13.11.2018

Утверждена в печать 04.06.2019

