

В. Г. Карнаухов<sup>1</sup>, В. И. Козлов<sup>1</sup>, Т. В. Карнаухова<sup>2</sup>

**КРИТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА НА ШАРНИРНО ОПЕРТУЮ  
ТЕРМОВЯЗКОУПРУГУЮ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ПЛАСТИНУ  
С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ И АКТУАТОРАМИ**

<sup>1</sup> *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: karn@inmech.kiev.ua*

<sup>2</sup> *Национальный технический университет «КПИ»  
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: karn@inmech.kiev.ua.*

**Absrtact.** A criterion of losses of the working capacity of control system of the forced vibrations of hinged rectangular thermoviscoelastic plate by the piezoelectric sensors and actuators is proposed. This criterion is associated with reaching of temperature of dissipative heating of some critical value. Basing on this criterion, the critical electric load is found.

**Key words:** thermoviscoelastic plate, sensors and actuators, vibrations, dissipative heating, critical electrical load.

**Введение.**

Тонкие пластины из композитных материалов на полимерной основе являются наиболее распространенными элементами конструкций современной техники [1, 3, 12, 20, 30 – 32]. Одним из основных режимов их работы являются вынужденные гармонические колебания, в частности, резонансные [1, 2, 5 – 8, 18, 19, 26]. Многие полимерные материалы при гармонических колебаниях имеют существенные гистерезисные потери. Этот эффект широко используется при разработке методов демпфирования вынужденных резонансных колебаний элементов конструкций с целью уменьшения их динамической напряженности, когда в структуру элемента с малым гистерезисом включаются компоненты с высокими гистерезисными потерями. Такой тип демпфирования называется пассивным. Исследованию пассивного демпфирования колебаний посвящена обширная литература в виде энциклопедий, монографий и статей [3, 4, 11, 16, 18, 23]. Однако увеличение гистерезисных потерь может сопровождаться существенным повышением температуры диссипативного разогрева (ТДР), которая влияет на все стороны механического и теплового состояния конструкции: на распределение напряжений и деформаций в деформируемом теле, на динамические характеристики резонансных колебаний (амплитудно-, температурно-частотные характеристики, на частотную зависимость коэффициента демпфирования), на динамическую и статическую устойчивость тонкостенных элементов, на их механическое и тепловое разрушение, на ползучесть [1, 5 – 9, 21, 24, 27].

Кроме пассивных методов демпфирования колебаний, в последние годы для этой цели широко применяются активные методы, базирующиеся на включении пьезоактивных компонент в структуру пассивного тонкостенного элемента из металлического, полимерного или композитного материала. В большинстве случаев в качестве активных элементов выступают пьезоэлектрические компоненты. Существует несколько основных подходов к активному демпфированию колебаний тонкостенных элементов при действии на них механической нагрузки. Первый из них заключается в использовании пьезоэлектрических актуаторов, к которым подводится разность по-

тенциалов, компенсирующая механическую нагрузку. Второй подход основан на совместном использовании пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов: к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная скорости изменения снимаемой с сенсора разности потенциалов, при этом в уравнениях движения в перемещениях появляются члены, пропорциональные скорости изменения перемещений. В результате к демпфированию, обусловленному гистерезисными потерями в материале конструкции, появляется дополнительное демпфирование, пропорциональное скорости изменения перемещений. Третий подход состоит в использовании комбинированного демпфирования, когда пассивное демпфирование используется совместно с указанным выше активным демпфированием. Обзор зарубежных работ по активному управлению стационарными и нестационарными колебаниями элементов конструкций представлен в [20, 22, 31, 32]. Из сказанного следует важность исследования влияния различных факторов на эффективность работы сенсоров и актуаторов при гармоническом деформировании элементов конструкций. Особенно важной задачей является разработка критериев потери функциональной способности сенсоров и актуаторов.

Существуют различные критерии потери несущей способности тонкостенных элементов конструкций при механическом и температурном нагружении: статическая и динамическая потеря устойчивости, развитие недопустимого уровня деформаций и др. Любой конструктивный элемент с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом электромеханическом нагружении имеет предельную рабочую температуру  $\theta_{кр}$ , при достижении которой резко ухудшается работоспособность пьезоэлемента. Эту точку будем называть критической. Как правило, она намного ниже точки Кюри, при приближении к которой коэффициент электромеханической связи стремится к нулю [2, 7, 9, 21, 22, 24, 27]. Нагрузку, при которой температура диссипативного разогрева достигает критического значения, также назовем критической. Для ее определения необходимо решить связанную задачу термоэлектромеханики для различных амплитуд гармонической нагрузки и найти ту амплитуду, при которой температура диссипативного разогрева становится равной  $\theta_{кр}$ . В работе [1] представлено аналитическое решение задачи о колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой пластины с сенсорами и актуаторами.

Целью данной статьи является получение с использованием указанного решения аналитического выражения для критической нагрузки. При изложении содержания настоящей работы применяются основные соотношения, обозначения и результаты работы [1].

### 1. Постановка задачи и ее решение.

Рассматривается трехслойная прямоугольная пластина с внутренним пассивным слоем толщиной  $h_0$  и двумя внешними пьезоактивными слоями с противоположной поляризацией, каждый толщиной  $h_1$ . В плане пластина имеет размеры  $a \times b$ . Определяющие уравнения для усилий и моментов с учетом деформаций сдвига для такой пластины имеют вид [6, 7, 10, 28]:

$$N_{xx} = A_{11}\varepsilon_{xx} + A_{12}\varepsilon_{yy}; \quad N_{yy} = A_{12}\varepsilon_{xx} + A_{22}\varepsilon_{yy}; \quad N_{xy} = A_{66}\varepsilon_{xy};$$

$$M_{xx} = D_{11}\kappa_{xx} + D_{12}\kappa_{yy} - M_9; \quad M_{yy} = D_{12}\kappa_{xx} + D_{22}\kappa_{yy} - M_9; \quad M_{xy} = D_{66}\kappa_{xy};$$

$$Q_x = K_S A_{55}\varepsilon_{xz}; \quad Q_y = K_S A_{44}\varepsilon_{yz}.$$

Для шарнирно опертой прямоугольной пластины диссипативная функция, представленная в [10] через деформации, при использовании кинематических соотношений и полученного в [10] решения задачи электромеханики может быть приведена к виду ( $x, y$  – декартовы координаты):

$$D = d_0 + d_1 \cos(2k_m x) + d_2 \cos(2p_n y) + d_3 \cos(2k_m x) \cos(2p_n y), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{\omega}{8}(D_1 + D_2 + D_3 + D_4); \quad d_1 = \frac{\omega}{8}(-D_1 + D_2 + D_3 - D_4); \\ d_2 &= \frac{\omega}{8}(D_1 + D_2 - D_3 - D_4); \quad d_3 = \frac{\omega}{8}(D_1 + D_2 - D_3 - D_4); \\ D_1 &= (A_{11}'' + D_{11}'')|U|^2 k_m^2 + 2(A_{12}'' + D_{12}'')|UV|k_m p_n + (A_{22}'' + D_{22}'')|V|^2 p_n^2; \\ D_2 &= 2(A_{66}'' + D_{66}'')[(p_n U' + k_m V')^2 + (p_n U'' + k_m V'')^2]; \\ D_3 &= K_S A_{44}''[(p_n w' + U')^2 + (p_n w'' + U'')^2]; \\ D_4 &= K_S A_{55}''[(k_m w' + U')^2 + (p_n w'' + U'')^2]; \quad |UV| = U'V' + U''V''; \\ U' &= x_{11}' M + (w_1' w' - w_1'' w''); \quad U'' = x_{11}'' M + (w_1' w'' + w_1'' w'); \\ V' &= y_{11}' M + (w_2' w' - w_2'' w''); \quad V'' = y_{11}'' M + (w_2' w'' + w_2'' w'); \\ k_m &= \frac{m\pi}{a}; \quad p_n = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots); \\ M &= \frac{16}{mn\pi^2} M_0; \quad M_0 = m_0 V_0; \quad m_0 = \frac{h_0 + h_1}{S_{11}'(1-\nu)} d_{31}'; \quad \nu = -\frac{S_{12}'}{S_{11}'} \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) опущены индексы  $mn$  во всех обозначениях: например, вместо  $M_{mn}$  использовано обозначение  $M$  и т.д. Комплексные величины  $x_{11} = x_{11}' + ix_{11}''$ ;  $y_{11} = y_{11}' + iy_{11}''$ ;  $w_1 = w_1' + iw_1''$ ;  $w_2 = w_2' + iw_2''$  определяются выражениями:

$$\begin{aligned} (x_{11}, y_{11}) &= \frac{(a_{12} p_n - a_{22} k_m, a_{12} k_m - a_{11} p_n)}{\Delta}; \\ (w_1, w_2) &= \frac{[K_S(a_{12} A_{44} p_n - a_{22} A_{55} k_m), K_S(a_{12} A_{55} k_m - a_{11} A_{44} p_n)]}{\Delta}; \\ \Delta &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2; \quad a_{11} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 D_{11} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 D_{66} + K_S A_{55}; \\ a_{22} &= \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 D_{22} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 D_{66} + K_S A_{44}; \quad a_{12} = \left(\frac{m\pi}{a}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right) (D_{12} + D_{66}). \end{aligned}$$

Определяемая из уравнения энергии температура диссипативного разогрева равна

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos(2k_m x) + \theta_2 \cos(2p_n y) + \theta_3 \cos(2k_m x) \cos(2p_n y). \quad (3)$$

Максимальная температура определяется по формуле

$$\theta_{\max} = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \quad (4)$$

В (3), (4) введены обозначения:

$$\theta_0 = \frac{d_0}{h}; \quad \theta_1 = \frac{d_1}{4h\lambda k_m^2 + 2\delta}; \quad \theta_2 = \frac{d_2}{4h\lambda p_n^2 + 2\delta}; \quad \theta_3 = \frac{d_3}{4h\lambda(k_m^2 + p_n^2) + 2\delta}. \quad (5)$$

Здесь  $h$  – общая толщина пластины;  $\lambda$  – приведенный коэффициент теплопроводности;  $\delta$  – коэффициент теплообмена с внешней средой.

Критическая нагрузка находится путем приравнивания максимальной температуры (4) критической точке  $\theta_{кр}$ :

$$\theta_{\max} = \theta_{кр}.$$

В результате получим квадратное уравнение для определения величины  $M$ :

$$M^2 + \frac{m_1}{m_2} M - \frac{1}{m_2} \theta_{кр} = 0, \quad (6)$$

где

$$m_1 = \frac{d_{01}}{h} + \frac{d_{11}}{4h\lambda k_m^2 + 2\delta} + \frac{d_{21}}{4h\lambda p_m^2 + 2\delta} + \frac{d_{31}}{4h\lambda(k_m^2 + p_m^2) + 2\delta};$$

$$m_2 = \frac{d_{02}}{h} + \frac{d_{12}}{4h\lambda k_m^2 + 2\delta} + \frac{d_{22}}{4h\lambda p_m^2 + 2\delta} + \frac{d_{32}}{4h\lambda(k_m^2 + p_m^2) + 2\delta}.$$

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$M = -\frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{m_1^2}{m_2^2} + \frac{1}{m_2} \theta_{кр}}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что критическое значение  $M$  равно:

$$M_{кр} = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} \left( \sqrt{1 + \frac{4m_2}{m_1^2} \theta_{кр}} - 1 \right). \quad (8)$$

Подводимая к пластине критическая разность потенциалов находится с использованием последней из формул (2):

$$V_{0кр} = \frac{m\pi^2}{16m_0} M_{кр} = \frac{m\pi^2 m_1}{32m_0 m_2} \left( \sqrt{1 + \frac{4m_2}{m_1^2} \theta_{кр}} - 1 \right). \quad (9)$$

### Заключение.

Тонкостенные элементы типа стержней, пластин и оболочек из композитных материалов на полимерной основе находят широкое применение в различных областях современной техники. Колебательный режим их работы, в частности резонансный является одним из самых распространенных. Для активного управления колебаниями указанных элементов в последние годы интенсивно используются пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы. Из-за присущих полимерным материалам гистерезисных потерь в таких элементах может наблюдаться значительное повышение температуры диссипативного разогрева, которая оказывает существенное влияние на работоспособность сенсоров и актуаторов. При достижении температурой критической точки существенно ухудшается работоспособность системы управления колебаниями пластины. В данной статье получена простая формула для критической электрической нагрузки, при достижении которой температура достигает критической точки.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Запропоновано критерій втрати роботоздатності системи керування вимушеними коливаннями шарнірно опертої в'язкопружної прямокутної пластини за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Критерій пов'язаний з досягненням температурою дисипативного розігріву деякого критичного значення. На його основі знайдено критичне електричне навантаження.

1. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Прикладная механика упругонаследственных сред: в 3-х томах. Т. 3. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. – К.: Наук. думка, 2014. – 520 с.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т. 5. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.

3. Гузь А.Н., Кабелка И., Маркуш Ш. и др. Динамика и устойчивость слоистых композитных материалов / Под ред. Гузя А.Н. – К.: Наук. думка, 1991. – 368 с.
4. Дубенец В.Г., Хильчевский В.В. Колебания демпфируемых композитных конструкций. Т.1. – К.: Вища школа, 1995. – 226 с.
5. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. – К.: Наук. думка, 1982. – 260 с.
6. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
7. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т. 4. Электротермовязкоупругость. – К.: Наук. думка, 1988. – 328 с.
8. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т.В. Тепловое разрушение неупругой шарнирно опертой прямоугольной пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при вынужденных резонансных изгибных колебаниях // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – 2011. – Вип.15. – 2, № 5. – С. 68 – 75.
9. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – № 95. – С. 75 – 95.
10. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
11. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
12. Механика композитов: в 12-ти томах. Т. 1 – 12 / Под общей редакцией А.Н.Гузя. – К.: «А.С.К.», 1992 – 2005.
13. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Выща школа, 1976. – 589 с.
14. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.
15. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К.: Институт математики НАН Украины, 1997. – 344 с.
16. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
17. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
18. Савченко Е.В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: Аспект – Поліграф, 2006. – 232 с.
19. Шульга Н.А., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
20. Gabbert U., Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2001. – 384 p.
21. Guz I.A., Zhuk Y.A., Kashtalyan M. Dissipative Heating and Thermal Fatigue Life Prediction for Structures Containing Piezoactive Layers // Technische Mechanik. – 2012. – 32, 2 – 5. – P. 238 – 250.
22. Encyclopedia of Smart Materials. In 2 vols. – New York: John Wiley and Sons, 2002. – 1176 p.
23. Jones D.I. Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: John Wiley and Sons, 2001. – 412 p.
24. Karnaukhova T.V. Thermal Depolarization of a Piezoelectric Layer Under Harmonic Quasistatic Electric Loading // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, N 4. – P. 373 – 376.
25. Karnaukhova T.V. Forced Vibrations and Dissipative Heating of a Hinged Bimorph Rectangular Plate with Open Electrodes // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 207 – 212.
26. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations (Review) // J. of Therm. Stress. – 2005. – 28, N 6 – 7. – P. 783 – 815.
27. Karnaukhov V.G., Karnaukhova T.V., McGilicaddy O. Thermal failure of flexible rectangular viscoelastic plates with distributed sensors and actuators // J. of Engng. Mathematics. – 2013. – 78, N 1. – P. 199 – 212.
28. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I. Thermomechanics of Inelastic Thin-Walled Structural Members with Piezoelectrical Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 1. – P. 6 – 59.
29. Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V. Forced Vibrations and Dissipative Heating of Hinged Flexible Viscoelastic Rectangular Plates with Actuators under Shear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 1. – P. 85 – 93.
30. Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. – Boca Raton: Taylor and Francis, 2007. – 547 p.
31. Tani J., Takagi T., Qui J. Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – 51, N 8. – P. 505 – 521.
32. Tzou H.S. Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 382 p.

Поступила 17.07.2018

Утверждена в печать 04.06.2019