

Н. В. Никитина

О СУЩЕСТВОВАНИИ АТТРАКТОРОВ
В ДИССИПАТИВНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. The theorems on the birth of a periodic orbits from homoclinic loops are given. An application of theorems is considered.

Key words: nonlinear systems, symmetry principles, limit cycle, bifurcation, chaos.

Введение.

В динамических системах гомоклинические траектории свидетельствуют о присутствии траекторий со сложным поведением. Эти траектории играют важную роль в теории бифуркаций. Проблема образования периодических орбит из гомоклинических петель (ГП) в трехмерных системах обсуждалась в работах [1 – 7, 9 – 16].

В данной работе приведены условия существования периодических орбит в диссипативных трехмерных системах в виде теорем и рассмотрено приложение этих теорем к образованию аттракторов. Образование странных аттракторов связано с рассмотрением механизма потери устойчивости орбиты и конструктивно – с условиями приведенных ниже теорем.

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu); \quad x(t) \in R^n; \quad \mu \in R^m, \quad (1)$$

где $n = 3$, $F(x, \mu)$ – гладкая функция; R^m – пространство параметров. Введем малое отклонение в окрестности частных решений \bar{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n$): $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) уравнений (1). Рассмотрим δx_i в качестве новых координат. Линейная система, соответствующая системе (1) в координатах δx_i

$$d\delta x / dt = A(\bar{x})\delta x; \quad \delta x \in R^n, \quad (2)$$

где $A(\bar{x}) = \partial F / \partial x |_{x=\bar{x}}$, называется *системой уравнений в вариациях* [16]. При помощи анализа корней характеристического уравнения, которое соответствует матрице $A(\bar{x})$ можно изучить механизм образования периодических и сложных движений. Представим матрицу $A(\bar{x})$ системы (2) в виде суммы двух матриц

$$A(\bar{x}) = N + M(\bar{x}), \quad (3)$$

где матрица N соответствует спектру линейной системы (2), не содержащей частных решений. Матрица $M(\bar{x})$ соответствует той части спектра уравнений (2), которая содержит частные решения $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$.

Приведем некоторые обозначения и теорему Шильникова [17]. Обозначим характеристические показатели (ХП) особой точки O в начале координат системы (1) $\gamma, \lambda_1, \lambda_2$, так что $\gamma > 0 > \operatorname{Re}\lambda_{1,2}$.

Неустойчивое многообразие W^u седла O одномерное, устойчивое многообразие W^s двумерно. Неустойчивое многообразие состоит из трех орбит: самого седла O и двух сепаратрис: Γ_1 и Γ_2 . Предполагаем, что система имеет петлю сепаратрис, т. е. Γ_1 стремится к O при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим отрицательную седловую величину в седлофокусе, которая равна $\sigma = \gamma + \operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$.

Теорема 13.6 (Шильников [17]). *Когда седловая величина σ отрицательна, из гомоклинической петли образуется единственная устойчивая периодическая орбита L .*

В данной работе также речь идет о гомоклинической петле. Теорема Шильникова сосредоточена на существовании ГП, на которой седловая величина имеет отрицательный знак. В работе [7] рассматривался принцип симметрии в трехмерных системах. Было установлено, что существуют ГП, которые замыкаются в силу симметрии (кососимметрии). Таким образом, можно с помощью принципа симметрии установить существование периодической орбиты в гомоклинической петле и знак седловой величины. С помощью одного подхода устанавливаются знаки седловых величин и притяжение всех точек на петле. Приведенные ниже теоремы предполагают и доказывают существование аттрактора. В одном случае – это замкнутая траектория. Изменение параметров переносит замыкание траектории на $t \rightarrow \infty$, тогда образуется странный аттрактор.

Вернемся к теореме 13.6 Шильникова Л.П. [17]. Теорема обсуждалась в научной публикации [1]. В данной работе рассмотрен конструктивный принцип определения знака седловой величины гомоклинической петли. Это связано с притягивающим характером точек траектории и образованием предельных циклов, либо странного аттрактора в трехмерных системах. Этот принцип накладывает определенные условия на значения параметров, делая теоремы достаточными. Приведенные ниже теоремы охватывают некоторую часть парка базовых моделей, образующих аттракторы.

Принципы симметрии (кососимметрии) для двумерных систем [6, 13] могут быть применены для анализа бифуркаций и установления симметрии аттракторов и замыкания траекторий в трехмерных системах. Критерии устойчивости орбиты (замыкание) в двумерных системах изложены в монографии [13]. Запишем двумерную систему в следующем виде:

$$dx_1/dt = F_1(x); \quad dx_2/dt = F_2(x), \quad (4)$$

где $x_1, x_2 \in R$ и $F_1 \in C(R^2, R), F_2 \in C(R^2, R)$, и $F_i(0) = 0 (i = 1, 2)$.

Приведем геометрический принцип симметрии, на основе которого можно установить условия замыкания фазовой траектории.

В системе (4) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_1(x)$ относительно x_1 и нечетности функции $F_2(x)$ относительно x_1 , т. е.

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2); \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \quad (5)$$

Это утверждение основано на том, что на плоскости Ox_1x_2 ось Ox_2 является осью симметрии, и всякая интегральная кривая слева от оси x_2 является зеркальным отображением кривой справа.

На основе принципа симметрии можно заключить, что *в системе (4) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_2(x)$ относительно x_2 и нечетности $F_1(x)$ относительно x_2 , т. е.*

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(x_1, x_2); F_2(x_1, -x_2) = F_2(x_1, x_2). \quad (6)$$

Здесь (согласно [13]) ось Ox_1 является осью симметрии.

Принцип кососимметрии для нелинейных систем был сформулирован в работе [6]. В нелинейной системе (4) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (4), связаны следующими условиями:

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2); F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2). \quad (7)$$

Кососимметрия связана с двумя осями координат, т.е., если ось Ox_1 является осью кососимметрии, то ось Ox_2 также является осью кососимметрии.

В нелинейной системе (4) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (1) связаны следующими условиями

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2); F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2). \quad (8)$$

Кососимметрией обладают линейные осцилляторы с положительной и отрицательной диссипацией, но траектории таких систем не замкнуты.

1. Теоремы о существовании аттракторов в трехмерной системе. Здесь доказываются теоремы для гладких систем. О системе (1) сделаем следующие предположения.

Предположение 1. В системе (1) имеет место особая точка $O(0,0,0)$ (седлоузел с отрицательной седловой величиной), так что характеристические показатели точки O имеют вид $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$. Существует окрестность особой точки O , заполненная седлоузловыми точками, которые в соответствии с теоремой Гробмана – Хартмана [15] переходят в седлофокусные, так что $\text{Re}\lambda_1 < 0, \text{Re}\lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ и $\text{Re}\lambda_1 + \text{Re}\lambda_2 + \lambda_3 < 0$.

Предположение 2. Характеристическое уравнение, соответствующее системе $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$, где E – единичная матрица, имеет такие собственные значения: одно нулевое, и два мнимых. Дифференциальная система уравнений (1) при $\bar{x} \neq 0$ образует ГП.

Теорема 1. Пусть для дифференциальной системы (1) выполняются условия Предположений 1, 2 и сумма собственных значений характеристического уравнения системы $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$ равна нулю: $\bar{\lambda}_1(\bar{x}) + \bar{\lambda}_2(\bar{x}) + \bar{\lambda}_3(\bar{x}) = 0$. Тогда в окрестности особой точки $O(0,0,0)$ системы (1) ГП образует аттрактор.

Доказательство. При выполнении условий Предположений 1, 2 седловая величина точек на траектории определяется системой $|A(\bar{x}) - \lambda E| = 0$ из уравнения (согласно (3)), т.е., $|A(\bar{x}) - \lambda E| = |N - \lambda E| = 0$.

Бифуркационный процесс в поле трехмерной системы (1) происходит в соответствии с теоремой Гробмана – Хартмана. Окрестность, заполненная седлоузловыми точками, так что $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$, переходит в седлофокусный континуум с отрицательным знаком седловой величины. Для седлофокусной области – $\text{Re}\lambda_1 < 0, \text{Re}\lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ седлофокусная петля имеет седловую величину $\sigma = \text{Re}\lambda_1 + \text{Re}\lambda_2 + \lambda_3 < 0$ во всех точках траектории. Эта величина определяется корнями линейной системы, тогда $\sigma = \sigma_O = \sigma_A = \sigma_B$, где σ_A, σ_B – величины любых точек A, B , включая особые. ГП имеет отрицательную седловую величину во всех точках. Из гомоклинической петли с отрицательной величиной σ , так что $\text{Re}\lambda_1 < 0, \text{Re}\lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$, возникает аттрактор.

Следствие. Пусть для дифференциальной системы (1) выполняются условия Предположений 1, 2, и в системе (1) образуются две седловые петли. Тогда из петель образуются аттракторы, если орбиты петель не пересекаются.

Теорема 2. Пусть дифференциальная система (1) образует ГП. Пусть особая точка $O(0,0,0)$ системы (1) – седлофокус с седловой величиной равной нулю ($\sigma_0 = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3 = 0$). Пусть седловая величина точек, определяемых характеристическим уравнением системы $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$, отрицательна при $\bar{x} \neq 0$. Тогда в окрестности особой точки $O(0,0,0)$ системы (1) существует аттрактор.

Доказательство. При выполнении условий теоремы матрица $A(\bar{x})$ имеет собственные значения, удовлетворяющие уравнению $|A(\bar{x}) - \lambda E| = |M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$. Тогда образуется ГП с отрицательной седловой величиной и притяжением в каждой точке петли. Такая петля образует аттрактор.

Теорема 3. Пусть дифференциальная система (1) образует ГП. Пусть особая точка $O(0,0,0)$ системы (1) – седлофокус с седловой величиной $\sigma_0 = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3 > 0$; седловая величина точек, определяемых характеристическим уравнением системы $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$, $\sigma_{\bar{x}}$ – отрицательная. Тогда, если алгебраическая сумма $\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\bar{x}} < 0$, система (1) образует аттрактор.

Доказательство. При выполнении условий теоремы особая точка $O(0,0,0)$ – седлофокус. Седловая величина уравнений $|N - \lambda E| = 0$ положительная. Тогда, учитывая равенство (3), ГП с отрицательной седловой величиной и притяжением в каждой точке образует аттрактор.

Доказанные теоремы опираются на теорему 13.6 Шильникова Л.П. [17] и имеют одну конструкцию доказательств. В приложении реализуются два вопроса: установление отрицательного значения седловой величины; в случае странного аттрактора – рассмотрение механизма потери устойчивости орбиты.

ПРИЛОЖЕНИЯ.

Приложение теоремы 1. Пример 1. Рассмотрим систему Лоренца

$$dx/dt = s(-x + y); \quad dy/dt = rx - y - xz; \quad dz/dt = -bz + xy, \quad (9)$$

где b, r, s – положительные параметры ($r > 1$). Введем малые отклонения $\delta x, \delta y, \delta z$ в системе (9) от частных решений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и составим уравнения в вариациях

$$\delta \dot{x} = -s\delta x + s\delta y; \quad \delta \dot{y} = (r - \bar{z})\delta x - \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \delta \dot{z} = -b\delta z + \bar{y}\delta x + \bar{x}\delta y. \quad (10)$$

Система (9) имеет следующие особые точки:

$$O(0, 0, 0); \quad A(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}; r-1); \quad B(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Из характеристического уравнения системы (10)

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + s + 1) + \lambda(s(1 - r + \bar{z}) + b(s + 1) + \bar{x}^2) + s(b(1 - r + \bar{z}) + \bar{x}(\bar{x} + \bar{y})) = 0 \quad (11)$$

можно определить характеристические показатели точек в поле трехмерного пространства системы (9). В точке O уравнение (11) принимает вид

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + \lambda(1 + s) + s(1 - r)) = 0,$$

из которого находим

$$\lambda_{1,2} = -(s+1)/2 \pm \sqrt{((s+1)/2)^2 + s(r-1)}; \quad \lambda_3 = -b. \quad (12)$$

Особая точка O – седлоузел с седловой величиной $\sigma = -(s+1) - b$. Запишем матричное равенство на основе уравнений в вариациях (10). Выпишем соотношение (3) в виде

$$\begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r - \bar{z} & -1 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z} & 0 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В левой части равенства (13) находится матрица системы в вариациях (10). Первая матрица в правой части равенства (13) представляет спектр линейной системы, соответствующей системе (9). Вторая матрица $M(\bar{x})$ соответствует той части уравнений (10), которая содержит частные решения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и имеет корни характеристического уравнения:

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \pm i\sqrt{\bar{x}^2}; \quad \bar{\lambda}_3 = 0.$$

Заметим, что частные решения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ системы уравнений (9) неизвестны. В системе (9) существуют несколько аттракторов.

Представим систему (9) в виде трех двумерных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = s(-x + y); \quad \frac{dy}{dt} = rx - y; \quad (14)$$

$$\frac{dx}{dt} = sx; \quad \frac{dz}{dt} = -bz; \quad (15)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y; \quad \frac{dz}{dt} = -bz. \quad (16)$$

Согласно Теореме 1 линейная система, состоящая из (14) – (16) подсистем, определяет замыкание системы (9). Подсистемы (14) – (16) определяют симметрию системы (9) (для некоторых значений параметров), что тождественно замыканию траектории. На плоскости xu в соответствии с уравнениями (14) в нуле имеет место особая устойчивая точка со следующими ХП: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -(s+1)$. Подсистема (14) удовлетворяет условиям (7) (либо (8)). Обозначим правые части в подсистеме (15): $F_x = sx, F_z = -bz$. В подсистеме (15) выполняются условия четности функции F_x относительно z и нечетности функции F_z относительно z , т. е.

$$F_x(x, -z) = F_x(x, z); \quad F_z(x, -z) = -F_z(x, z).$$

В системе (15) ось Oz на плоскости Oxz является осью симметрии (см. (6)). Обозначим правые части в системе (16): $F_y = -y, F_z = -bz$. В системе (16) выполняются условия четности функции F_y относительно z и нечетности функции F_z относительно z , т. е.

$$F_y(x, -z) = F_y(x, z); \quad F_z(y, -z) = -F_z(x, z).$$

В системе (16) ось Oz на плоскости Oyz является осью симметрии (см. (6)). На плоскостях xu, xz, yz имеют место устойчивые особые точки (согласно систем (14) – (16)).

В системе (14) выполняются условия (7) (либо (8)). В системах (14) – (15) выполняются условия вида (8) и в этих системах ось Oz является осью симметрии. На трех координатных плоскостях имеет место выполнение условий симметрии и кососимметрии. Это указывает на то, что в трехмерной системе существуют значения параметров, которым соответствуют трехмерные аттракторы с симметрией.

При значениях параметров $(b, r, s) = (9, 5/3; 280; 7)$ (рис. 1, а, б, в) траектория Лоренца превращается в «бабочку». «Бабочка» имеет замыкание траектории в силу Теоремы 1. При определенных значениях параметров «бабочка» обладает симметрией, либо кососимметрией на каждой координатной плоскости. Тогда, согласно принципа симметрии, траектория замыкается. «Бабочка» образуется также при других значениях параметров, например, при $(b, r, s) = (8/3; 280; 7)$. Таким образом, существует об-

ласть значений параметров, при которых траектория замыкается и образует регулярные аттракторы, имеющие симметричные на координатных плоскостях (либо близкие к симметрии) портреты.

При значениях параметров $(b, r, s) = (8/3; 153; 10)$ (рис. 1, *з, д*) жирными линиями отмечены совокупности точек траектории седлоузлового характера, тонкими линиями – узлофокусные, для которых $\text{Re}\lambda_1 < 0, \text{Re}\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$. Уменьшение параметра r приводит к появлению дополнительных периодических движений (тип этих движений имеет название «кратное увеличение периода»). Параметр r связан с изменением топологии трехмерного пространства в окрестности нуля и особых точек O, A, B . Изображающая точка замыкает траекторию; модель Лоренца саморегулирует процесс за счет дополнительных регулярных движений (рис. 1, *з, д*).

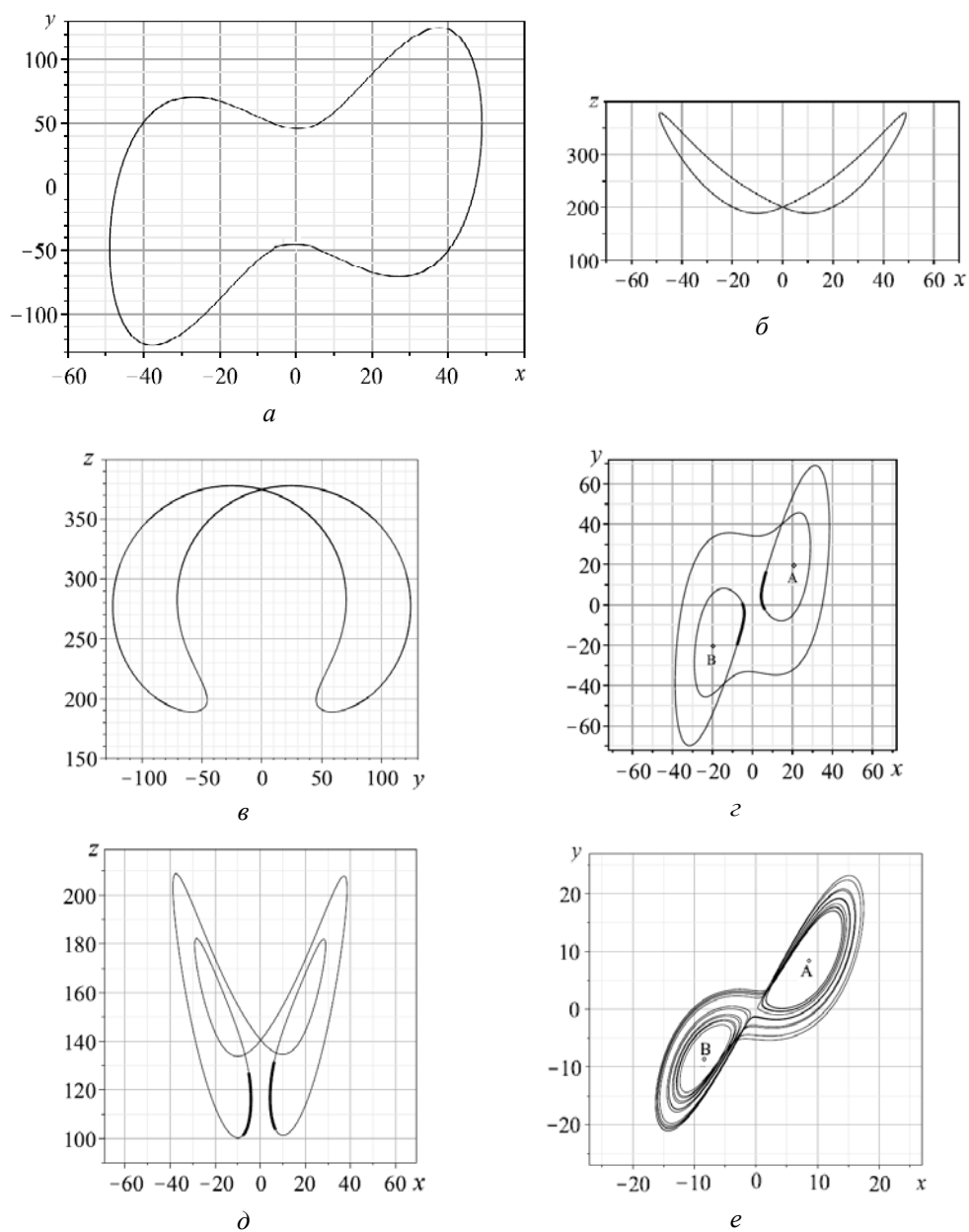


Рис. 1

Альтернативой регулярного аттрактора является странный аттрактор, который возникает при потери устойчивости орбиты движения изображающей точки.

В этом случае также выполняется условие теоремы Шильникова: седловая величина σ отрицательна. Примем следующие значения параметров: $(b, r, s) = (8/3; 28; 10)$. Особая точка O – седлоузел. Плоскость xu разделена на области влияния особых точек A, B . На рис. 1, e представлен фрагмент вращения траектории относительно особой точки A а также переход и вращение относительно особой точки B . В случае регулярного аттрактора вращение относительно особой точки должно иметь определенную повторяемость относительно особой точки B . Поведение изображающей точки обусловлено топологией пространства в окрестности особых точек $A, B, O(0,0,0)$. Однако, при данных значениях параметров топология показывает хаотичный процесс колебаний. Полупетля пытается компенсировать периодическими колебаниями неравномерность решения при движении в окрестности особых точек A, B . Таким образом, путь к хаосу лежит через кратное увеличение периода. Если периодические траектории не компенсируют неустойчивость движения, то происходит бесконечно неповторяющееся периодическое движение, которое образует хаотический аттрактор. Хаосу, причина которого неустойчивость орбиты, предшествует регулярное движение с кратным увеличением периода (рис. 1, z, d), а также при значениях параметров: $(b, r, s) = (9/3; 200; 10)$; рис. 2, $a, b, в$.

Итак, вначале может возникнуть кратное увеличение периода, которое идентифицируется как реакция саморегулирования модели на определенную топологию в окрестности особых точек. Хаотические движения появляются в том случае, когда система не может стабилизировать кратными периодическими движениями неравномерность движения в целом. Топология многомерного (в данном случае трехмерного) пространства задает программы кратного периода и хаоса. В целом образуются аттракторы – регулярные и хаотические.

Система уравнений Лоренца, полученная в результате упрощения уравнений Навье – Стокса, описывает термоконвекцию в тонком слое вязкой жидкости. Система представляет собой недостаточно реалистичную, но поучительную модель турбулентности в жидкости. Возможно, что она реализуется в лазерах и спиновых системах [8]. Модель Лоренца в виде «бабочки» может быть также моделью устойчивой средней фирмы [3].

Приложение теоремы 2. Пример 2. Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений Чуа

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y); \quad \frac{dy}{dt} = x - y + z; \quad \frac{dz}{dt} = -\beta y, \quad (17)$$

где a, b, α, β – положительные параметры. Несмотря на то, что динамика цепи Чуа широко описана в литературе [5, 17], предполагается привлечь Теорему 2 для установления образования аттрактора из гомоклинической траектории. Система (12) имеет три состояния равновесия: особая точка $O(0,0,0)$, особые точки $A(x_A = \sqrt{a/b}, y_A = 0, z_A = -\sqrt{a/b})$, $B(x_B = -\sqrt{a/b}, y_B = 0, z_B = \sqrt{a/b})$. Введем малые отклонения $\delta x, \delta y, \delta z$ от частных решений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ системы (17) и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = \alpha(a\delta x - 3b\bar{x}^2\delta x + \delta y); \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta x - \delta y + \delta z; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -\beta\delta y.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе в вариациях имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(-a + 3b\bar{x}^2)) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a - 3b\bar{x}^2)) + \alpha\beta(-a + 3b\bar{x}^2) = 0. \quad (18)$$

Бифуркационный процесс в системе связан с изменением координаты x , т.к. характеристическое уравнение зависит лишь от частного решения \bar{x} . Характеристическое

кие показатели точки O определяются на основе уравнения $\lambda^3 + \lambda^2(1 - \alpha a) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a)) - \alpha\beta a = 0$. Зададим параметры

$$(a, \alpha) = (1/6, 6); b = a; \beta \in (7, \dots, 10, 1). \quad (19)$$

Требование к параметрам (19) такое: седловая величина точки $O(0, 0, 0)$ равна нулю. Чтобы начальные возмущения породили замкнутую кривую относительно точки O в системе (17), следует выбрать начальные условия согласно следующих оценок:

$$|x(0)| > |x_A|; |y(0)| \geq 0; |z(0)| > |z_A|. \quad (20)$$

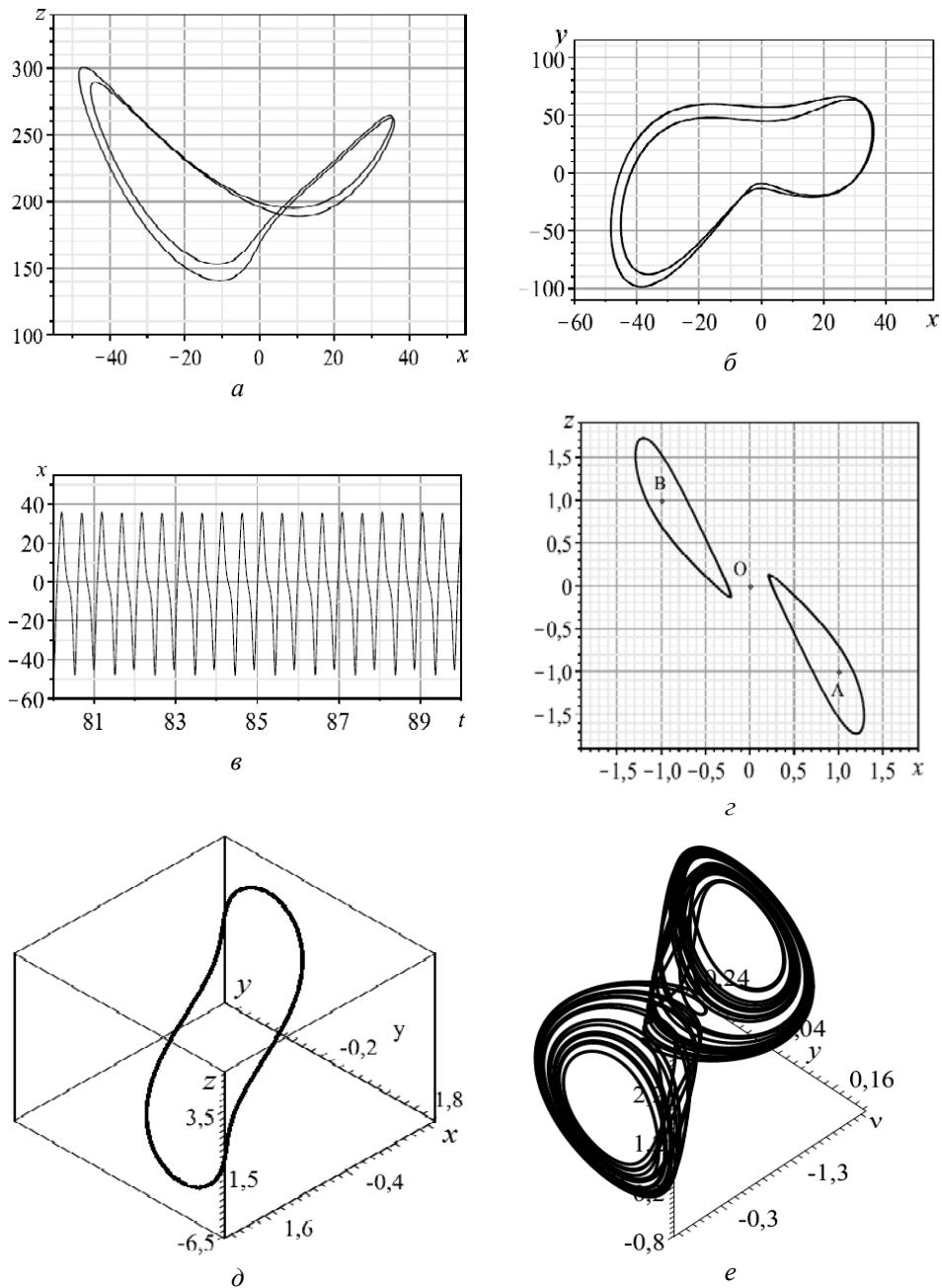


Рис. 2

Такой выбор исключает влияние особых точек A , B , которые также, как и особая точка O , организуют определенное движение системы (17). Выбор начальных условий можно уточнить численным способом (в рамках неравенств (20)). Характеристическое уравнение $\lambda^2(\lambda + 3ab\bar{x}^2) = 0$ матрицы $M(\bar{x})$ имеет собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -3ab\bar{x}^2$. Нулевые корни не кратные. При выполнении условий на параметры (19) и выборе начальных условий (20) в системе (17) существует притягивающая периодическая орбита (согласно Теореме 2).

Заметим, что седловая величина $\sigma = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3$, которая вычислена на основе уравнения (18), зависит лишь от координаты x .

Рассмотрим поведение решений в системе Чуа, обусловленные особыми точками A, B . Точки A, B могут организовывать замкнутые кривые, исключая точку O . Точки A, B кососимметричны. Поэтому рассмотрим движение относительно лишь одной особой точки. Параметр β может влиять на расположение траекторий относительно точек A, B . Основное требование – траектории не должны пересекаться. Свяжем с точкой A систему координат $Auvw$ и составим уравнения движения в новых координатах

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(-2av - bv^2(3\sqrt{a/b} + v) + y); \quad \frac{dy}{dt} = v - y + w; \quad \frac{dw}{dt} = -\beta y, \quad (21)$$

где $v = x - \sqrt{a/b}$, $w = z + \sqrt{a/b}$. Седловая величина, соответствующая этой системе (21) зависит от одной переменной и здесь можно проследить неустойчивость движения, которая компенсируется в начале (для определенных значений параметров) возникновением периодического движения (кратного увеличения периода) и потом, когда система уравнений (17) не может компенсировать периодическим движением неустойчивость, возникает хаос. В системе координат $Auvw$ особая точка O имеет следующие координаты: $v_0 = -\sqrt{a/b}$, $y_0 = 0$, $w_0 = \sqrt{a/b}$.

При начальных возмущениях

$$|v(0)| < \sqrt{a/b}; \quad |y(0)| \geq 0; \quad |w_0(0)| < \sqrt{a/b} \quad (22)$$

в системе доминирует движение под влиянием особой точки A . Оценки начальных условий также могут уточняться численно (в рамках неравенств (22)). При движении изображающей точки в окрестности особой точки A (либо B) все точки траектории притягивающие и седлофокусные с отрицательной седловой величиной. Система Чуа образует хаотические движения относительно особых точек A, B . Процесс этот связан с нерегулярностью бифуркаций. На круговой траектории седловые решения вызывают замедление. Для компенсации нерегулярности бифуркаций вначале возникают периодические движения кратного периода. Дальнейшие изменения значений параметров показывают, что систему не удастся компенсировать кратным увеличением периода неустойчивости колебаний.

На рис. рис. 2, z , d показаны предельный цикл в системе координат $Oxyz$ и два предельных цикла относительно особых точек A, B . Для определенных значений параметров система Чуа образует регулярные аттракторы. На рис. 2, e изображены хаотические траектории относительно особых точек A, B . Таким образом, генератор Чуа вписывается в конструкцию доказательств теорем, приведенных в начале работы и хаос возникает при невозможности для некоторых значений параметров стабилизировать неустойчивость движения периодическими кратными движениями.

Приложение теоремы 3. Пример 3. Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений (генератор с экспоненциальной инерциальной нелинейностью [1])

$$\frac{dx}{dt} = mx - xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z - e^x + 1), \quad (23)$$

где m, b – положительные параметры. Система (23) имеет одну особую точку $O(0, 0, 0)$. Составим систему, соответствующую уравнениям в вариациях системы (23).

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - e^{\bar{x}}\delta x).$$

Характеристическое уравнение системы в вариациях имеет вид

$$(\lambda + b)(\lambda(\lambda - m + \bar{z}) + 1) + \lambda b \bar{x} e^{\bar{x}} = 0.$$

Системе $|M(\bar{x}) - \lambda E| = 0$, где матрица

$$M(\bar{x}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -be^{\bar{x}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

соответствует характеристическое уравнение $\lambda(\lambda^2 + \lambda\bar{z} + b\bar{x}e^{\bar{x}}) = 0$, корни которого

$$\lambda_{1,2} = -\bar{z}/2 \pm \sqrt{(\bar{z}/2)^2 - b\bar{x}e^{\bar{x}}}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Седловая величина имеет вид $\sigma_{\bar{x}} = -\bar{z} < 0$.

В этом случае трудно оценить величину $|\bar{z}|$. Корни в особой точке $O(0, 0, 0)$

$$\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}, \quad \lambda_3 = -b.$$

В работе [10] найдены значения параметров для системы (23), при которых траектория замыкается и образует на плоскости xz почти симметричную проекцию. В характеристическое уравнение системы в вариациях не входит частное решение \bar{y} . Это указывает на то, что бифуркационный процесс не связан с частным решением \bar{y} . В работе [10] построены сепаратрисы, которые разделяют плоскость xz на области с определенным качеством точек. Воспользуемся результатом работы [10], в которой определены параметры системы (23), при которых регулярный аттрактор на плоскости xz почти симметричен. Возникновение замкнутой траектории на плоскости xz связано с следующими значениями параметров:

$$(m, b) = (0, 7; 0, 2) \quad (24)$$

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ образуют положительную седловую величину: $\sigma_o = m - b; \sigma_o > 0$. При значениях параметров (24) $|\sigma_{\bar{x}}|$ превышает σ_o на малую величину. Согласно Теоремы 3: если алгебраическая сумма $\sigma_o + \sigma_{\bar{x}} < 0$, тогда система (23) образует аттрактор. На рис. 3, а, б, в приведены координатные портреты предельного цикла системы (23) со значением параметров (24).

Рассмотрим три случая изменения параметров и влияние этих изменений на качество аттрактора.

1. При значениях параметров $(m, b) = (0, 8; 0, 2)$ особая точка увеличивала положительное значение $\sigma_o = m - b = 0, 6$. Система (23), стремясь сохранить статус-кво, показывает удвоение периода (рис. 3, г). Траектория организовала верхнюю ветвь, которая увеличила отрицательную составляющую $|\bar{z}|$.

2. При значениях параметров $(m, b) = (1; 0, 2)$ особая точка еще более увеличивала положительное значение $\sigma_o = m - b = 0, 8$. Система (23) не только удваивает период, но и захватывает весьма далекие области на плоскости xz с целью сохранить условие Теоремы 3 и построить аттрактор (рис. 3, д). Этот аттрактор пока регулярный.

3. При значениях параметров $(m, b) = (1, 2; 0, 2)$ седловая величина $\sigma_o = m - b = 1$. Система (23) увеличивает отклонения в сторону возрастания отрицательной составляющей $|\bar{z}|$. Аттрактор реализуется в виде хаоса (рис. 3, е).

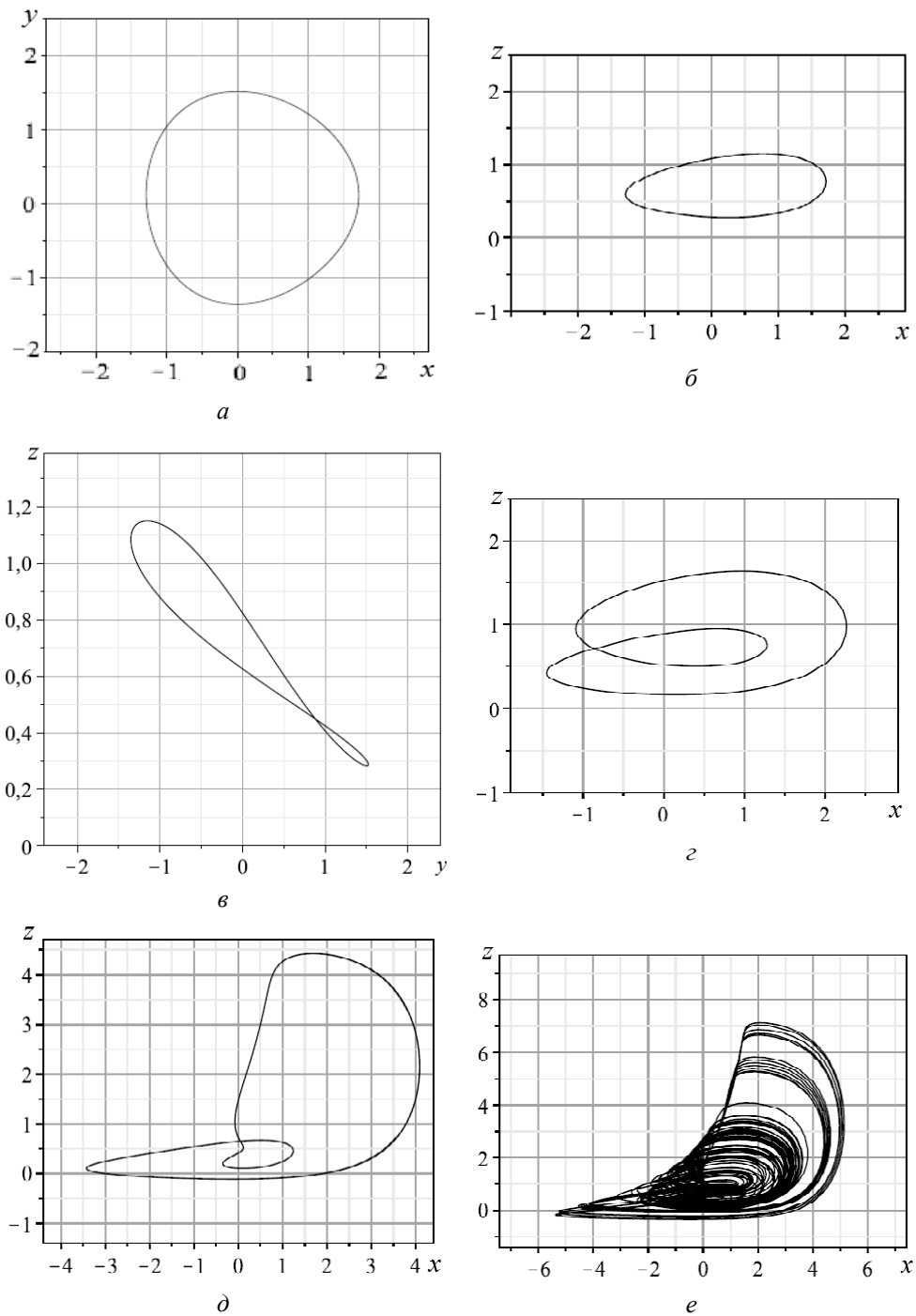


Рис. 3

Таким образом, при одной особой точке с привлечением исследований бифуркаций [10] представлен последовательный анализ возникновения странных движений. В работе [10] рассматривалась проблема мультистабильности. Знаки и величина начальных возмущений системы (23) связаны с типом аттрактора. В данной работе принимались малые начальные возмущения порядка $0,01$.

В примерах 1, 2 хаос возник из-за невозможности соединения двух полупетель в единую петлю за счет кратных периодических движений (рис. 1, *e*, рис. 2, *e*). В этих системах по три особых точки. Полупетля относительно точки A должна соединиться с полупетлей относительно точки B в замкнутую петлю за время кратных периодов колебаний как, например, в случае рис. 1, *z*, *d*.

В примере 3 (генератор с экспоненциальной инерциальной нелинейностью) координатные портреты имеют вид рис. 3, *a*, *b*, *e*. Возникает проблема замыкания траектории. Если система не может компенсировать неустойчивость движения кратными периодическими движениями, тогда на бесконечном времени появляются неповторяющиеся движения, которые носят хаотический характер (рис. 3, *e*) и организуют странный аттрактор. Отметим, что как бы ни организовывался процесс стабилизации движения, главный результат состоит в получении отрицательной седловой величины. Этим заканчивается как регулярный, так и хаотический процесс образования аттрактора.

Следующий пример принципиально отличен от трех предыдущих.

Приложение теоремы 2. Пример 4. Рассмотрим систему трех дифференциальных нелинейных уравнений (генератор с квадратичной нелинейностью [1])

$$\frac{dx}{dt} = mx - xz + y; \quad \frac{dy}{dt} = -x; \quad \frac{dz}{dt} = -b(z - x^2), \quad (25)$$

где m, b – положительные параметры. Система имеет одну особую точку $O(0, 0, 0)$. Введем малые отклонения $\delta x, \delta y, \delta z$ от частных решений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ системы (25) и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = (m - \bar{z})\delta x + \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \frac{d\delta y}{dt} = -\delta x; \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - 2\bar{x}\delta x).$$

Запишем характеристическое уравнение этой системы

$$\lambda^3 + \lambda^2(b - m + \bar{z}) + \lambda(b(-m + \bar{z} + 2\bar{x}^2) + 1) + b = 0.$$

В точке $O(0, 0, 0)$ характеристическое уравнение примет вид

$$(\lambda + b)(\lambda^2 - \lambda m + 1) = 0.$$

Характеристические показатели точки $O(0, 0, 0)$ запишутся следующим образом: $\lambda_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - 1}$, $\lambda_3 = -b$. Примем следующие значения параметров: $(m, b) = (1, 1)$. Точка O имеет тип седлофокуса с седловой величиной $\sigma_o = 0$. Матрице

$$M(\bar{x}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2b\bar{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda^2 + \lambda\bar{z} + 2b\bar{x}^2) = 0,$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = -\bar{z}/2 \pm \sqrt{(\bar{z}/2)^2 - 2b\bar{x}^2}; \quad \lambda_3 = 0.$$

Седловая величина имеет вид $\sigma_{\bar{x}} = -\bar{z}$. Покажем, что матрице $M(\bar{x}, \bar{z})$ соответствует диссипативный осциллятор. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dX}{dt} = -\bar{z}X - \bar{x}Z; \quad \frac{dZ}{dt} = -2b\bar{x}X,$$

которая идентична диссипативному осциллятору

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{dZ}{dt} + 2b\bar{x}^2 Z = 0.$$

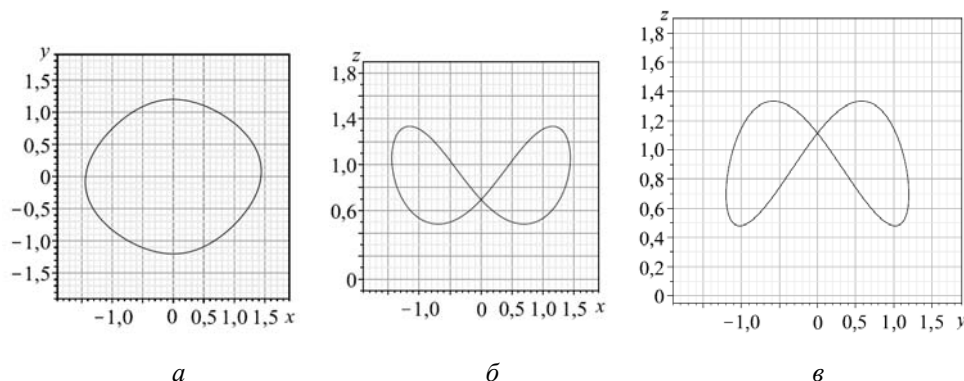


Рис. 4

В примере 4 с помощью Теоремы 2 устанавливается существование замкнутой траектории. В трехмерной системе (25) существует одна особая точка $O(0,0,0)$. На плоскости xy имеет место симметрия относительно осей Ox , Oy . На плоскостях xz , yz симметрия относительно оси Oz . В случае $\sigma < 0$ ГП образует замкнутую траекторию – регулярный аттрактор. В системе (25) имеет место лишь регулярный аттрактор.

Согласно Теореме 2 в системе (25) существует лишь периодическая орбита. На рис. 4, *a* и *б* приведена замкнутая кривая системы (25) в проекциях на координатные плоскости. Этот результат можно получить с помощью принципа симметрии для трехмерных систем.

Заключение.

Работа в целом посвящена бифуркационным процессам в трехмерных системах. Приведены три теоремы, которые связаны с проблемой образования аттракторов из ГП в трехмерных системах. Установлено, что ГП образует также замкнутые траектории с симметрией [7]. Доказательства о существовании аттракторов связано в системе с ГП и такое представление имеет более широкое применение для разных типов аттракторов, включая хаотические. Аттракторы с хаотическим движением имеют высокую информативную емкость. Поэтому они могут применяться при передаче информации. Приведены теоремы, при помощи которых можно установить знак седловой величины ГП. Замыкание воспроизводится в силу отрицательной седловой величины на ГП, включая замыкание на бесконечном времени странных аттракторов. Все три теоремы связаны с уравнениями в вариациях.

В работе рассматривается качественная сторона движения в примерах известных базовых моделей. Что сравнительно нового приведено при анализе наиболее изучаемой системы Лоренца? Прежде всего – эта модель при некоторых значениях параметров вписывается в системы с симметрией, и может иметь форму «бабочки». В данной работе хаос связан с топологией трехмерного пространства, которая определена уравнением (11).

Теоремы 1, 2, 3 доказываются с помощью теоремы Шильникова, и подхода, при помощи которого можно применить представление (3) матрицы системы уравнений в вариациях. *Знак седловой величины петли определяется при разделении матрицы правой части системы в вариациях.*

РЕЗЮМЕ. Доведено теоремами про утворення аттракторів з гомоклінічних петель. Розглянуто застосування теорем.

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
2. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
3. Гурина Т.А., Дорофеев И.А. Существование гомоклинической бабочки в модели устойчивости средней фирмы. – Динамические системы, 2010. вып. 28. – С. 63 – 68.
4. Леонов Г.А. Задача Трикоми о существовании гомоклинических траекторий в диссипативных системах // ПММ. 2013. – 77, № 3. – С. 410 – 421.
5. Мартинюк А.А., Никитина Н.В. О периодическом движении и бифуркациях в трехмерных нелинейных системах // Нелінійні коливання – 2014. – 17, № 2. – С. 268 – 280.
6. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – К.: Феникс, 2012. – 235 с.
7. Никитина Н.В. Принцип симметрии в трехмерных системах // Доп. НАН України. – 2017. – № 7. – С. 21 – 28.
8. Хакен Г. Синергетика – М.: Мир, 1980. – 404 с.
9. Леонов Г.А. Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Peterburg: St. Peterburg University Press, 2008. – 160 p.
10. Мартинюк А.А., Никитина Н.В. Bifurcations and Multi-Stability of Vibrations of Three-Dimensional System // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 223 – 232.
11. Мартинюк А.А., Никитина Н.В. Bifurcation and Synchronization of Two Coupled Generators // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 369 – 379.
12. Neimark Yu.I., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
13. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equation. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
14. Nikitina N.V. Analysis of Mechanisms of Stability Loss of an Orbit in Mathematical Models of Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 6. – P. 121 – 132.
15. Nikitina N.V. On Existence of Attractors in Some Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 95 – 102.
16. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 с.
17. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 с.

Поступила 13.04.2018

Утверждена в печать 04.06.2019