

Л. В. Мольченко, И. И. Лоос

ТЕРМОМАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКОЙ
ОРТОТРОПНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА

*Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
ул. Никольская, 24, 54030, Николаев, Украина;
e-mail: ¹l.molchenko@gmail.com, ²Loiri@ukr.net*

Abstract. The theory and method for calculating of geometrically nonlinear problems of thermomagnetoelastic orthotropic shells with allowance for Joule heat in the microsecond range is expounded. A numerical example of analysis of the flexible orthotropic conical shell with orthotropic Joule heat is considered.

Keywords. Conical shell, thermomagnetoelasticity, geometric nonlinearity, orthotropy, Joule heat.

Введение.

В механике деформируемого твердого тела значительное развитие получили исследования, связанные с изучением эффектов взаимодействия механических полей деформаций с электромагнитными полями. Физические основы этих эффектов подробно обсуждены в ряде курсов по классической электродинамике и физике твердого тела [7, 8, 11, 14, 16].

Влияние магнитных полей на металлические элементы конструкций приводит к появлению объемных электродинамических сил, которые могут при соответствующих параметрах полей вызывать большие деформации конструкций. Учет ponderomotive сил и джоулевого тепла являются определяющими в связанных задачах магнитоупругости.

Однако, предметное раскрытие эффектов взаимодействия механических полей деформаций с электромагнитными полями в настоящее время изучено недостаточно. Это в первую очередь касается задач деформирования тонкостенных элементов при конечных перемещениях в сильном магнитном поле, а также в токнесущих тонкостенных элементах.

В теоретическом аспекте возникают весьма сложные проблемы магнитоупругости гибких тонких оболочек, изготовленных из реальных, т.е., из конечнопроводимых материалов. Отметим также, что в современной технике используются конструкционные материалы, которые в недеформированном состоянии уже анизотропные, в частном случае ортотропные.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим ортотропную усеченную коническую оболочку в геометрически-нелинейной постановке с учетом ортотропной электропроводности и ортотропной джоулевой температурой. К оболочке может подводиться сторонний электрический ток.

Срединную поверхность в недеформированном состоянии отнесем к криволинейной ортогональной системе координат (s, θ) , где s – длина дуги меридиана, отсчитываемая от некоторой точки; θ – центральный угол в параллельном круге, отсчитыва-

мый от выбранной плоскости. Координатные линии $s = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ являются линиями главных кривизн срединной поверхности. Отсчитывая координату γ по нормали к срединной поверхности, отнесем оболочку к ортогональной пространственной системе координат (s, θ, γ) . Толщина оболочки является функцией (s, θ) , $h = h(s, \theta)$. В декартовой системе координат (x, y, z) уравнение срединной поверхности имеет вид

$$x = r(s) \cos \theta; \quad y = r(s) \sin \theta; \quad z = z(s) \quad (s_0 \leq s \leq s_N, 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

где $r = r(s)$ – радиус параллельного круга; $z = z(s)$ – расстояние по оси вращения от начальной плоскости $z = z_0$. Ось OZ совпадает с осью вращения срединной поверхности, а уравнения $x = r(s)$, $z = z(s)$ являются параметрическими уравнениями образующей в плоскости XOZ , которую в дальнейшем будем называть меридианом. Параметры Ламе в данном случае принимают вид $A = 1$, $B = r$, а радиусы главных кривизн R_s, R_θ равны, соответственно, радиусам кривизн меридиана и длине отрезка, параллельной нормали, заключенного между срединной поверхностью и осью вращения. Если φ – угол между нормалью к срединной поверхности и осью вращения, то имеем

$$\frac{1}{R_\theta} = \frac{\sin \varphi}{r}; \quad \frac{1}{R_s} = 0; \quad \frac{dz}{ds} = \sin \varphi; \quad \frac{dr}{ds} = \cos \varphi.$$

Упругие свойства материала конической оболочки являются ортотропными, главные направления упругости которого совпадают с направлениями соответствующих координатных линий. Электромагнитные свойства материала оболочки также являются ортотропными и характеризуются тензорами электрической проводимости σ_{ij} , магнитной проницаемости μ_{ij} и диэлектрической проницаемости ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

Анализ электромагнитных эффектов исследуем на основании системы уравнений Максвелла в лагранжевых координатах совместно с материальными уравнениями и уравнениями движения. Материальные уравнения связывают между собой магнитную индукцию \vec{B} , электрическую индукцию \vec{D} , напряженность магнитного поля \vec{H} , напряженность электрического поля \vec{E} и плотность электрического тока в теле \vec{J} . Связь между этими величинами в случае анизотропной электропроводности имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon_{ij} \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_{ij} \vec{H}; \quad \vec{J} = \sigma_{ij} \vec{E}. \quad (1)$$

При этом, исходя из кристаллофизики [9, 10], для рассматриваемого класса проводящих ортотропных оболочек с ромбической кристаллической структурой тензора $\sigma_{ij}, \mu_{ij}, \varepsilon_{ij}$ принимают диагональный вид.

Используя вариационный принцип, учитывая гипотезы Кирхгофа – Лява и электродинамические гипотезы [1, 5], с учетом диагонального вида тензоров и согласно результатам работ [3, 4, 17 – 19], полная осесимметричная система уравнений магнитоупругости ортотропных конических оболочек в геометрически нелинейной постановке состоит из:

уравнений магнитоупругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rN_s)}{\partial s} - \cos \varphi N_\theta + r(F_s + \rho F_s^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial(rQ_s)}{\partial s} + \sin \varphi N_\theta + r(F_\gamma + F_\gamma^\wedge) &= r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(rM_s)}{\partial s} - \cos \varphi M_\theta - rQ_s - r \left(N_s - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta \right) \vartheta_s = 0;$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta; \quad \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} = -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] - \frac{B_s^+ - B_s^-}{h};$$

выражений для деформаций:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \vartheta_s^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \quad \chi_s = \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s}; \quad \chi_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_s - \frac{\sin \varphi}{2r} \vartheta_s^2; \quad (3)$$

соотношений упругости:

$$N_s = \frac{e_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta} [\varepsilon_s + \nu_\theta \varepsilon_\theta - (1 + \nu_s) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta} [\varepsilon_\theta + \nu_s \varepsilon_s - (1 + \nu_\theta) \varepsilon_T];$$

$$M_s = \frac{e_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} [\chi_s + \nu_\theta \chi_\theta - (1 + \nu_s) \chi_T]; \quad (4)$$

$$M_\theta = \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} [\chi_\theta + \nu_s \chi_s - (1 + \nu_\theta) \chi_T],$$

где обозначено $\nu_s = \nu_{\theta s}$; $\nu_\theta = \nu_{s\theta}$; $e_s \nu_\theta = e_\theta \nu_s$; $\nu_s = \nu_{\theta s}$.

Здесь

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) d\gamma; \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T(s, \theta, \gamma, t) \gamma dt.$$

Составляющие силы Лоренца $\rho \vec{F}^\wedge$ имеют вид:

$$\rho F_s^\wedge = -h J_{\theta cm} B_\gamma - \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right];$$

$$\rho F_\gamma^\wedge = -0,5 h J_{\theta cm} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h \left[0,5 (-E_\theta + \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma) (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right]. \quad (5)$$

В соотношениях (2) – (5) введены следующие обозначения: N_s, N_θ – нормальное и тангенциальное усилия; Q_s – поперечное усилие; M_s, M_θ – изгибные моменты; u, w – компоненты вектора перемещения; $h(s)$ – толщина оболочки; ρ – плотность материала оболочки; ϑ_s – угол поворота нормали; F_s, F_θ – составляющие механической нагрузки; E_θ – составляющая напряженности электрического поля; B_γ – нормальная составляющая магнитной индукции; B_s^\pm – известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки; $J_{\theta cm}$ – компонента стороннего тока; σ_1, σ_2 – компоненты магнитной проницаемости; e_s, e_θ – модули Юнга; ν_s, ν_θ – коэффициенты Пуассона; χ_s, χ_θ – компоненты изгибной деформации; ε_T, χ_T – интегральная характеристика температурного поля; $T(s, \theta, \gamma, t)$ – джоулева температура оболочки; α – коэффициент линейного температурного расширения.

К полученным уравнениям необходимо добавить начальные и граничные условия.

2. Уравнение теплопроводности для анизотропных тел.

В общем случае закон Фурье можно записать в тензорном виде [10]

$$q_i = -\lambda_{ij} \nabla_j T \quad (i, j = \alpha, \beta, \gamma). \quad (6)$$

Здесь q_i – плотность теплового потока; λ_{ij} – тензор теплопроводности.

Тензор теплопроводности λ_{ij} в ортогональной криволинейной системе координат имеет следующий вид:

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha\alpha} & \lambda_{\alpha\beta} & \lambda_{\alpha\gamma} \\ \lambda_{\beta\alpha} & \lambda_{\beta\beta} & \lambda_{\beta\gamma} \\ \lambda_{\gamma\alpha} & \lambda_{\gamma\beta} & \lambda_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}.$$

Выбором системы координат тензор теплопроводности можно привести к диагональному виду

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{\alpha\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\beta\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}.$$

Уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\lambda_{\alpha\alpha} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\lambda_{\beta\beta} \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\lambda_{\gamma\gamma} \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right) + q_v$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{\alpha\alpha}}{\rho C_v} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{\lambda_{\beta\beta}}{\lambda_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + \frac{\lambda_{\gamma\gamma}}{\lambda_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} \right) + \frac{q_v}{\rho C_v}.$$

Здесь: q_v – плотность теплового потока; C_v – удельная теплоемкость.

С учетом обозначений: $a_{\alpha\alpha} = \lambda_{\alpha\alpha} / \rho C_v$, $K_\beta = \lambda_{\beta\beta} / \lambda_{\alpha\alpha}$, $K_\gamma = \lambda_{\gamma\gamma} / \lambda_{\alpha\alpha}$ уравнение теплопроводности принимает стандартный вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_{\alpha\alpha} \nabla_1^2 T + \frac{q_v}{\rho C_v}, \quad (7)$$

где $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + K_\beta \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + K_\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2}$.

Таким образом, для анизотропной оболочки уравнение теплопроводности также приводится к стандартному виду, однако изменяется вид оператора Лапласа, в нем появляются коэффициенты анизотропии K_β , K_γ , корректирующие теплопроводность по направлениям.

3. Термодинамические соотношения для определения температуры проводящих оболочек.

Сформулируем уравнения термодинамики гибких проводящих оболочек с учетом джоулевой температуры при действии магнитного поля в микросекундном диапазоне (переходный процесс) [6, 13, 19, 20, 22].

Плотность магнитной энергии на единицу объема запишем в виде функции

$$W = 0,5(\vec{B}\vec{H}), \quad (8)$$

а количество тепла, выделяемого током \vec{J} в единицу времени (мощность джоулева тепла на единицу массы) равняется

$$\dot{Q}_{\text{дж}} = \frac{\vec{J}\vec{E}}{\rho}. \quad (9)$$

Запишем магнитное давление P в виде суммы двух составляющих

$$P(\rho, T) = P_\chi(\rho) + P_T(\rho, T), \quad (10)$$

где $P_\chi(\rho)$ – составляющая давления, зависящая только от плотности ρ ; $P_T(\rho, T)$ – тепловая составляющая, зависящая от температуры и плотности. Также представим приращение внутренней энергии в виде энергии без учета температурной и тепловой составляющих

$$\rho dU = \rho dU_\chi + \rho dU_T,$$

где

$$\rho dU_\chi = \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik} + 3P_\chi de; \quad (11)$$

$$\rho dU_T = 3P_T de + \rho d\dot{Q}_{\text{дж}} + \text{div}(\lambda_T \text{grad}T) dt. \quad (12)$$

Здесь λ_T – ортотропный коэффициент теплопроводности.

Примем далее, что приращение тепловой энергии пропорционально приращению температуры, т.е.

$$dU_T = C_\varepsilon(T) dT; \quad U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT, \quad (13)$$

где C_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации. Тогда уравнение (12) может служить для вычисления температуры

$$\rho C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \dot{Q}_{\text{дж}} + \text{div}(\lambda_T \text{grad}T). \quad (14)$$

Учитывая, что удельная теплоемкость металлов для температур выше T_0 вплоть до точки плавления изменяется незначительно (не более чем на 5 – 10 % от среднего значения), тепловую энергию можно представить в виде

$$U_T = \int_0^T C_\varepsilon(T) dT \approx C_\varepsilon^{\text{сп}}(T - T_0) + U_{T0}; \quad U_{T0} = \int_0^{T_0} C_\varepsilon(T) dT, \quad (15)$$

где $C_\varepsilon^{\text{сп}}$ – среднее значение теплоемкости на интервале $[T_0, T]$.

Следуя [7], уравнение (14) преобразуется в известное уравнение теплопроводности с источником джоулева тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_\varepsilon^{\text{сп}}} \dot{Q}_{\text{дж}} + \alpha_T \Delta T; \quad \alpha_T = \frac{\lambda_T}{\rho C_\varepsilon^{\text{сп}}}; \quad \lambda_T = \text{const}, \quad (16)$$

где α_T – коэффициент тепловой диффузии.

Используя выражение для расчета джоулева тепла, оценим величину температуры, возникающую в результате джоулева нагрева в зависимости от величины магнитной индукции \vec{B} . Используя (12) и уравнение Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \sigma_{ij} \vec{E}$, из соображений теории размерности и на основании (16) имеем

$$\tilde{T} \approx T_0 + \frac{2}{\rho C_\varepsilon^{\text{сп}}} \tilde{W} + \frac{\alpha_T}{\alpha_D} \tilde{T}; \quad \tilde{W} = 0,5 \frac{\tilde{B}^2}{\mu}, \quad (17)$$

где $\alpha_D = 1/\sigma_{ij}\mu$ – коэффициент магнитной диффузии. В качестве характерного времени принято время диффузии магнитного поля на расстояние \tilde{L} , т.е. $\tilde{t} = \tilde{L} / \alpha_D$. Так

как $\alpha_T / \alpha_D \ll 1$ для металлов (например, для алюминия при $T_0 = 20^\circ\text{C}$ $\alpha_T / \alpha_D \approx 4,3 \cdot 10^{-3}$, для нержавеющей стали – $\alpha_T / \alpha_D \approx 0,8 \cdot 10^{-5}$), то из символического уравнения (17) следует, что процессом теплопроводности в переходном режиме можно пренебречь.

Таким образом, учитывая оценку членов уравнения (16), окончательно определяем величину температуры, возникающую в результате джоулева нагрева в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_0 + \frac{1}{\sigma_{ij} \rho C_\varepsilon^{\text{сп}}} Q_{\text{дж}}. \quad (18)$$

Как известно, при действии на оболочку магнитного поля в ней возникают объемные силы Лоренца

$$\rho \vec{F}^\wedge = \vec{J} \times \vec{B}.$$

Исходя из уравнений для магнитной энергии оболочки, и используя тождество

$$\vec{A} \times \text{rot } \vec{A} + \vec{A} \nabla \vec{A} = 0,5 \nabla (\vec{A} \vec{A}),$$

выражение для пондеромоторных сил запишется в виде

$$\rho \vec{F}^\wedge = \vec{J} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{H} \times \vec{B} = \vec{B} \nabla \vec{H} - \frac{\partial W}{\partial \xi^k} \vec{G}^k,$$

где $(\partial W / \partial \xi^k) \vec{G}^k$ – член силы Лоренца, отвечающий джоулеву нагреву оболочки; \vec{G}^k – базовый вектор; ∇ – оператор в лагранжевой метрике; ξ^k – лагранжевые переменные ($k = 1, 2, 3$).

Таким образом, влияние джоулева тепла учитывается как в уравнениях магнитоупругости, так и в силе Лоренца.

Исходя из (18), имеем

$$\frac{h}{2} Q_{\text{дж}} dt = \frac{h}{2} \rho C_\varepsilon^{\text{сп}} dT_\Pi + \lambda_F (T_\Pi - T_C) dt, \quad (19)$$

где T_Π – температура на поверхности оболочки; T_C – температура срединной поверхности оболочки; λ_F – коэффициент теплоотдачи.

Выражение температуры при изменении вдоль γ , принимает вид

$$T = T_\Pi + \frac{Q_{\text{дж}} h^2}{8 \lambda_T} \left[1 - 4 \left(\frac{\gamma}{h} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Исходя из симметрии задачи для оболочек вращения, на срединной поверхности тепловой поток $q = 0$ при $\gamma = 0$; на поверхности $q = Q_{\text{дж}} h / 2$ и $T = T_\Pi$.

Учитывая (19), выражение для определения температуры принимает вид

$$T = T_C + \frac{Q_{\text{дж}} h^2}{8 \lambda_T} \left[1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} - 4 \left(\frac{\gamma}{h} \right)^2 \right] - \frac{\rho h C_\varepsilon^{\text{сп}}}{2 \lambda_F} \dot{T}_\Pi. \quad (21)$$

Компоненты электрического тока с учетом стороннего тока имеют вид

$$\begin{aligned} J_s &= J_{cms} + \sigma_1 \left[E_s + 0,5 \frac{\partial W}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma \right]; \\ J_\theta &= J_{cm\theta} + \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial W}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right]; J_\gamma = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

4. Методика решения задач термомагнитоупругости гибких ортотропных оболочек с учетом джоулевой температуры.

Методика решения задач термомагнитоупругости ортотропных оболочек заключается в последовательном использовании схемы Ньюмарка, метода квазилинеаризации и метода дискретной ортогонализации [2, 12, 15, 21, 23].

Для разделения переменных по временной координате применяем неявную конечноразностную схему Ньюмарка [23] интегрирования уравнений термомагнитоупругости.

Следующий этап решения нелинейной краевой задачи термомагнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации [2], с помощью которого нелинейная краевая задача сводится к последовательности линейных краевых задач на каждом временном шаге. Далее каждая из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решается численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации [5].

5. Разрешающая система уравнений термомагнитоупругости гибкой ортотропной конической оболочки с учетом ортотропной электропроводности и ортотропного джоулевого тепла.

При построении разрешающей системы уравнений термомагнитоупругости усеченной гибкой ортотропной конической оболочки выбираем в качестве искоемых функций следующие [3, 4, 19, 20]:

$$u, w, \mathcal{G}_s, N_s, Q_s, M_s, B_\gamma, E_\theta.$$

Разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений термомагнитоупругости ортотропной конической оболочки с учетом джоулевой температуры принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} w - \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2 + (1 + \nu_s) \varepsilon_T; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\mathcal{G}_s; \quad \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_s + e_\theta h \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - F_s - h J_{\text{OCT}} B_\gamma - \\ &- \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \frac{e_s h \cos \varphi}{r} \varepsilon_T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} N_s + e_\theta h \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - F_\gamma - \\ &- 0,5 h J_{\text{OCT}} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h \left[-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{12} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]; \quad \frac{\partial M_s}{\partial s} = \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] + Q_s + N_s \mathcal{G}_s - \end{aligned} \quad (23)$$

$$-\frac{\sin \varphi}{r} \left[v_{\theta} M_s + \frac{e_{\theta} h^3 \cos \varphi}{12 r} \mathcal{G}_s \right] \mathcal{G}_s;$$

$$\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial s} = -\mu \sigma_2 \left[E_{\theta} + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma} \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h};$$

$$\frac{\partial E_{\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_{\theta}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_T = & \alpha T_c + \frac{\alpha h^2}{8 \sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} \right) \left\{ J_{\theta cm}^2 + \sigma_2^2 \left[E_{\theta}^2 + 0,25 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 (B_s^+ + B_s^-)^2 + E_{\theta} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) \right] \right\} + \\ & + \frac{\alpha h^2}{8 \sigma_2 \lambda_T} \left(1 + \frac{4 \lambda_T}{h \lambda_F} \right) \left\{ 2 \sigma_2 J_{\theta cm} \left[E_{\theta} + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma} \right] \right\} - \frac{\alpha \rho h C_{\varepsilon}^{cp}}{2 \lambda_F} \dot{T}_{II}, \quad \chi_T = 0. \end{aligned}$$

Разрешающая система уравнений (23) является нелинейной смешанной гиперболо-параболической системой восьмого порядка с переменными коэффициентами.

Для определения произвольных постоянных, которые появляются в общем решении системы уравнений (23) после интегрирования, необходимо воспользоваться граничными условиями на контурах оболочки. Краевые условия для функций, характеризующие механическую часть задачи, ставятся так же, как и в теории оболочек. Краевые условия для электромагнитных параметров могут задаваться через компоненты электрического поля или через комбинацию компонент магнитного и электрического полей. Начальные условия задаются в классическом виде.

6. Числовой пример.

Рассмотрим осесимметричную нелинейную краевую задачу термомагнитоупругости о напряженно-деформируемом состоянии гибкой ортотропной конической оболочки постоянной толщины с учетом джоулевого тепла. Оболочка упругая ортотропная, изготовленная из металлического композитного материала бороалюминия. Особо эффективно применение бороалюминия в ракетно-космической технике. Его использование для деталей ракет «Атлас», космических кораблей «Аполлон» и «Шатл» позволило уменьшить их массу на 20 – 50 %.

Полагаем, что на поверхностях ортотропной оболочки осуществляется теплообмен по закону Ньютона – Рихмана с внешней средой, имеющей температуру 0°C (с коэффициентом теплообмена λ_F). Также оболочка является проводником стороннего электрического тока \vec{J}_{cm} .

Пусть стационарная задача магнитоупругости для возмущенного состояния решена, т.е., известны векторы магнитной индукции начального состояния для внешней и внутренней областей.

Рассматриваем случай, когда оболочка находится под воздействием нормальной составляющей механической силы $F_{\gamma} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t$ Н/м² и внешнего электрического тока $J_{\theta cm} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t$ А/м² (ω – круговая частота). Толщина оболочки постоянная и принимает значение $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м.

Граничные условия выбраны в следующем виде:

$$u = 0; M_s = 0; Q_s = -200; B_{\gamma} = 0,5 \sin \omega t \quad \text{при } s = 0;$$

$$u = 0; w = 0; \mathcal{G}_s = 0; B_{\gamma} = 0 \quad \text{при } s = 0,5.$$

Параметры оболочки и материала выбраны следующие:

$$s_0 = 0; s_N = 0,5\text{м}; e_s = 22,9 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2; e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2;$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 (\text{ом} \times \text{м})^{-1}; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{Гн/м}; \rho = 2600 \text{кг/м}^3;$$

$$\nu_s = 0,262; \nu_\theta = 0,32; \omega = 314,16 \text{с}^{-1}; B_s^\pm = 0,1\text{T}; C_\varepsilon^{\text{ср}} = 880 \text{Дж/}(\text{кг} \cdot \text{°C});$$

$$\alpha = 3,6 \cdot 10^{-4} 1/\text{°C}; \lambda_T = 228 \text{Вт/}(\text{м} \cdot \text{°C}); \lambda_F = 225 \text{Вт/}(\text{м}^2 \cdot \text{°C}).$$

Решение задачи получено на интервале $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с, временной шаг интегрирования $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с.

На рис. 1 показано распределение безразмерного прогиба $w(s)/h$ с шагом выдачи результатов $\Delta s = 0,05\text{м}$ при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с для $\varphi = \pi/6$; $\varphi = \pi/10$; $\varphi = \pi/15$ (соответственно линии 1, 2, 3 на рисунке.). При $\varphi = \pi/6$ (линия 1) максимальное значение $w/h = 0,85$, что соответствует линейной теории. При $\varphi = \pi/10$; $\varphi = \pi/15$ (линии 2 и 3, соответственно) прогиб возрастает и максимальные значения равняются $w/h = 1,86$; $w/h = 3,34$, что соответствует нелинейной теории. Таким образом, из рис. 1 следует, что при увеличении угла раствора конической оболочки значение прогиба возрастает и ее жесткость уменьшается.

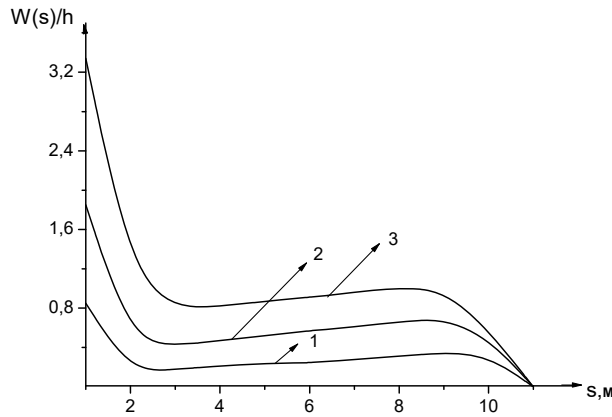


Рис. 1

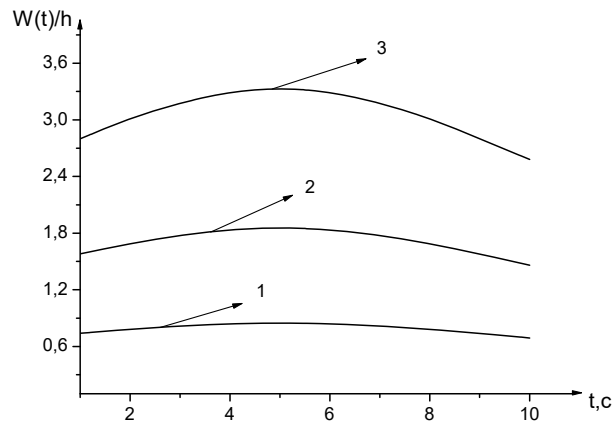


Рис. 2

На рис. 2 приведены значения безразмерных прогибов от времени при $s = 0$ и в зависимости от углов, приведенных выше. Кривые, приведенные на рис. 2, подтверждают увеличение прогиба с увеличением угла раствора конуса. Максимальные значения безразмерных прогибов соответствуют максимальным значениям прогибов на рис. 1.

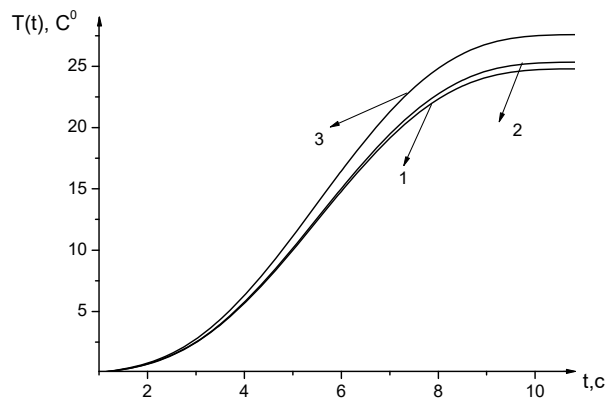


Рис. 3

Рис. 3 представляет распределение джоулевой температуры в зависимости от времени при $s = 0$. Линии 1, 2, 3 отвечают углам $\varphi = \pi/6$; $\varphi = \pi/10$; $\varphi = \pi/15$, соответственно. Как и в предыдущих случаях, значение температуры увеличивается с увеличением угла раствора конической оболочки и зависит от величины прогиба. Как видно из рис. 3, максимальное значение температуры увеличивается от $23,65^\circ\text{C}$ (линия 1) до $26,65^\circ\text{C}$ (линия 3) при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с.

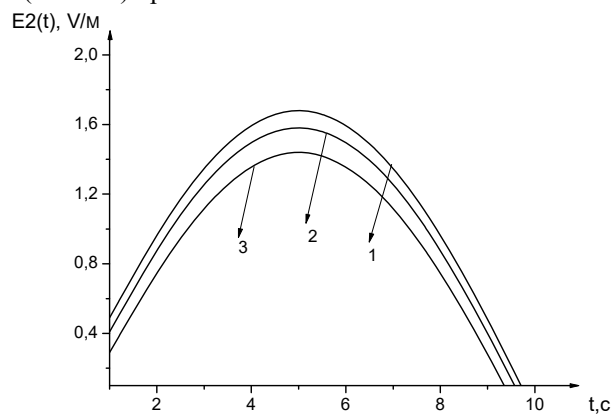


Рис. 4

На рис. 4 представлено величину напряженности электрического поля $E_\theta(t)$ для приведенных выше углов раскрытия конической оболочки при $s = 0$. Линии 1, 2, 3 отвечают углам $\varphi = \pi/6$; $\varphi = \pi/10$; $\varphi = \pi/15$, соответственно. Максимальное значение $E_\theta(t)$ отвечает значению $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с при $\varphi = \pi/6$. При $\varphi = \pi/10$; $\varphi = \pi/15$ напряженность электрического поля уменьшается по сравнению со значениями при $\varphi = \pi/6$, что следует из материального соотношения между плотностью электрического тока и напряженностью электрического поля.

Рассмотрено влияние стороннего электрического тока $J_{\theta cm} = J_0 \sin \omega t$ при $\varphi = \pi/10$ на напряженно-деформированное состояние гибкой ортотропной конической оболочки. Полагаем $J_0 = 5 \cdot 10^5$; $J_0 = 1 \cdot 10^6$; $J_0 = 5 \cdot 10^6$, что отвечает линиям 1, 2, 3 на рис. 5, 6, соответственно. Граничные условия и параметры конической оболочки остаются прежними.

На рис. 5 приведено распределение безразмерного прогиба $w(s)/h$ при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с в зависимости от величины стороннего электрического тока. Отмечаем, что с увели-

чением J_0 прогиб увеличивается и достигает максимального значения $w(s)/h = 2,5$ при $J_0 = 5 \cdot 10^6$ (линия 3). Кроме того, линия 1 соответствует значениям линии 1 на рис. 1. Форма линий 2, 3 изменилась по сравнению с соответствующими линиями рис. 1. Уменьшение нелинейности прогиба в этом случае объясняется взаимодействием между частями силы Лоренца, представленной формулой (5).

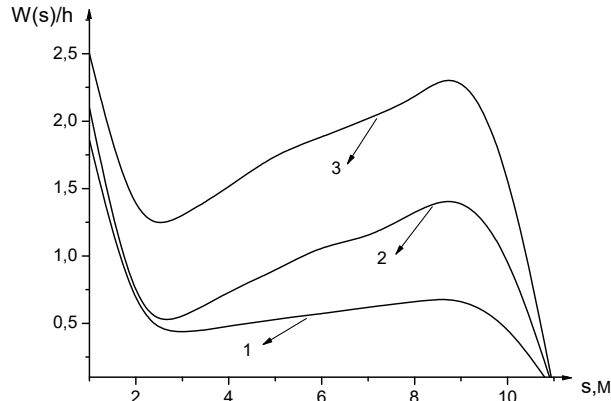


Рис. 5

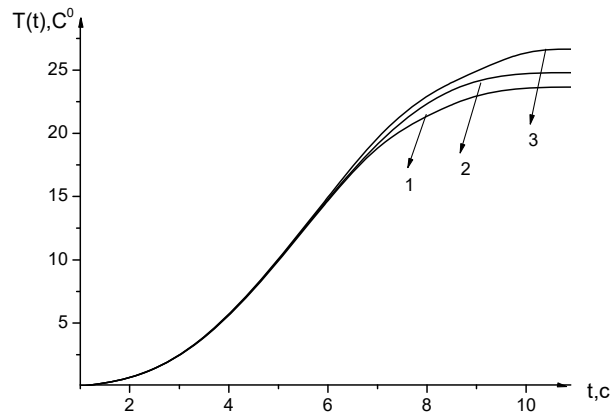


Рис. 6

На рис. 6 представлено распределение значений джоулевой температуры в зависимости от времени для соответствующего значения стороннего электрического тока при $s = 0$. С увеличением стороннего тока возрастает и значение температуры. Необходимо отметить, что значения температуры при $J_0 = 5 \cdot 10^5$ и $J_0 = 1 \cdot 10^6$ отличаются незначительно. Максимальные значения температуры равняются $24,79^\circ\text{C}$ и $25,34^\circ\text{C}$ (линии 1, 2), в то же время, температура достигает максимального значения в $27,59^\circ\text{C}$ при $J_0 = 5 \cdot 10^6$ (линия 3) при $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с.

Заключение.

В данной статье рассмотрена нелинейная краевая задача термомагнитоупругости ортотропной оболочки с учетом ортотропной электропроводности и ортотропного джоулевого нагрева. Излагается методика расчета задач такого класса. Построена разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений термомагнитоупругости усеченной конической оболочки. Числовой пример расчета гибкой ортотропной конической оболочки иллюстрирует применение изложенной методики решения нелинейных задач магнитоупругости с учетом ортотропного джоулевого нагрева.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано теорію та методику розв'язання нелінійних крайових задач ортотропних оболонок з урахуванням джоулевого тепла в мікросекундному діапазоні. Наведено числовий приклад розв'язання гнучкої ортотропної конічної оболонки з врахуванням ортотропної електропровідності та ортотропного джоулевого тепла.

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: 1968. – 184 с.
3. Будак В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Численно-аналитическое решение краевых задач магнитоупругости. – Николаев: Илион, 2016. – 148 с.
4. Будак В.Д., Мольченко Л.В., Овчаренко А.В. Нелинейные магнитоупругие оболочки. – Николаев: Илион, 2016. – 136 с.
5. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403 с.
6. Дресвянников В.И. О нестационарных задачах механики упругопластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей // Прикл. пробл. прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 19. – С. 32 – 47.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1968. – 501 с.
8. Ландау Л.В., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
9. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – М.: Мир, 1967. – 385 с.
10. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 639 с.
11. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 624 с.
12. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. МТТ. –1968. –№1. –С. 56 – 62.
13. Bian Y.H. Analysis of Nonlinear Stresses and Strains in a Thin Current-Carrying Elastic Plate // Int. Appl. Mech. –2015. –51, №1. – P. 108 – 120.
14. Elhajar R., La Saponara V., Muliana A. Smart Composites. Mechanics and Design. – Boca Raton: CRS Press. – 2013. – 430 p.
15. Grigorenko A.Ya., Pankratiev S.A., Yaremchenko S.N. Solution of Stress – Problems for Complex – Shaped Plates in a Refined Formulation // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 326 – 333.
16. Hutter K., Van de Ven A.A.F., Ursescu A. Electromagnetic Field Matter Interactions in Thermoelastic Solids and Viscous Fluids. – Berlin: Springer, 2007. – 382 p.
17. Hwu C. Anisotropic Elastic Plates. – Boston: Springer, 2010. – 286 p.
18. Kaloerov S.A. Determining the Intensity Factors for Stresses Electric-Flux and Electric-Field Strength in Multiply Connected Electroelastic Anisotropic Media // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 6. – P. 631 – 637.
19. Molchenko L.V., Fedorchenko L.N., Vasilieva L.Ya. Nonlinear Theory of Magnetoelasticity of Shells of Revolution with Joule Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 3. – P. 306 – 314.
20. Molchenko L.V., Loos I.I. Effect of Conicity on Axisymmetrical Strain State of Flexible Orthotropic Shell of Revolution in Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 11. – P. 1261 – 1267.
21. Molchenko L.V., Loos I.I. Thermomagnetoelastic Deformation of Flexible Isotropic Shells of Revolution Subject to Joule Heating // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 68 – 78.
22. Molchenko L.V., Loos I.I., Indiaminov R. Sh. Determining the Stress State of Flexible Ortotropic of Revolution in Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 8. – P. 882 – 891.
23. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – 85, N 7. – P. 67 – 97.

Поступила 03.04.2018

Утверждена в печать 04.06.2019