

А. А. Каминский¹, Л. А. Кипнис², Т. В. Полищук²

**О МОДЕЛИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИЙ
МИКРОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua;

²Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины,
ул. Садовая, 2, 20300, Умань, Украина; e-mail: polischuk_t@ukr.net

Abstract. The small-scale plastic pre-fracture zone at the point of intersection of microplastic deformation lines is determined. The problem on the plastic zone is reduced to the symmetric problem of the theory of elasticity for a plane with four straight tangential displacement rupture lines emerging from its point. Two of them are semi-infinite, and two have a finite length. The exact solution of this problem is constructed by the Wiener – Hopf method.

Key words: small-scale plastic pre-fracture zone, intersection of microplastic deformation lines, tangential displacement rupture lines, Wiener – Hopf method.

Введение.

На этапе плоской упругопластической деформации, предшествующем появлению пластических зон, в теле возникает микропластическая деформация – движение дислокаций и оно содержит многочисленные линии микропластического деформирования (линии скольжения). Вне этих линий материал тела является линейно-упругим. Если линии микропластического деформирования пересеклись (рис. 1), то точка их пересечения представляет собой остроконечный концентратор напряжений.

На следующем этапе деформации вблизи содержащихся в теле различных остроконечных концентраторов напряжений (концов трещин, угловых точек), в том числе, вблизи точки пересечения линий микропластического деформирования, возникают и развиваются пластические зоны. Разрушение материала происходит после развития в нем этих зон. Наличие информации о конфигурации и размерах локальных пластических зон позволяет полнее описать напряженно-деформированное состояние материала вблизи остроконечных концентраторов напряжений, предшествующее разрушению. Определение конфигурации и размеров таких зон является одной из центральных проблем механики разрушения.

Расчетам привершинных пластических зон в рамках моделей с линиями разрыва смещения в случаях, когда остроконечными концентраторами напряжений являются концы трещин в однородных телах, посвящены работы многих авторов [7, 9, 14 – 22]. Целый ряд подобных работ относится к другим угловым точкам – остроконечным концентраторам напряжений [1, 2, 10 – 12]. Точка пересечения линий микропластического деформирования в этом плане не исследовалась. Результаты таких исследований могут быть использованы при изучении одного из дислокационных механизмов зарождения трещин – механизма Коттрелла [6, 13]. Согласно механизму Коттрелла трещина зарождается при пересечении линий микропластического деформирования.

Ниже дано решение симметричной задачи об определении маломасштабной пластической зоны предразрушения вблизи точки пересечения линий микропластического деформирования в рамках модели с двумя линиями разрыва касательного смещения.

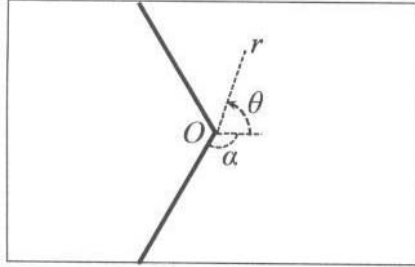


Рис. 1

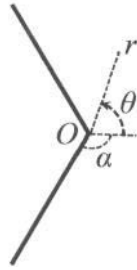


Рис. 2

§1. Постановка задачи.

В рамках симметричной задачи рассмотрим однородное изотропное упруго-пластическое тело, находящееся в условиях плоской деформации. Пусть на этапе деформации, который предшествует появлению пластических зон, тело содержит линии микропластического деформирования, пересекающиеся в точке O (рис. 1, где $\pi/2 < \alpha < \pi$). Вне этих линий материал тела является линейно-упругим. Линию микропластического деформирования будем моделировать линией разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно заданной постоянной материала τ_s^o , характеризующей микропластическую деформацию тела (τ_s^o – предел микротекучести на сдвиг).

Согласно общим положениям о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [8] точка O представляет собой остроконечный концентратор напряжений со степенной особенностью. Суммы главных членов разложений напряжений в асимптотические ряды при $r \rightarrow 0$ являются решением соответствующей задачи теории упругости (задача К, рис. 2) для плоскости с полубесконечными линиями разрыва, порождаемым единственным в полосе $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ корнем $\lambda_0 \in]-1, 0[$ ее характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & [\cos 2\alpha - \cos 2(\lambda + 1)\alpha] [\sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda + 1)\sin 2\alpha] + \\ & + [\cos 2\alpha - \cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha)] [\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1)\sin 2\alpha] = 0. \end{aligned}$$

Имеют место формулы (рис. 1)

$$\sigma_\theta(r, \theta) = C\Sigma(\theta)r^{\lambda_0} + C_0 + \frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha} \cos 2\theta + f_1(r, \theta);$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = CT(\theta)r^{\lambda_0} + \frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha} \sin 2\theta + f_2(r, \theta);$$

$$\sigma_r(r, \theta) = C\Sigma_1(\theta)r^{\lambda_0} + C_0 - \frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha} \cos 2\theta + f_3(r, \theta) \quad (r \rightarrow 0);$$

$$\Sigma(\theta) = \begin{cases} (\lambda_0 + 2) [\sin \lambda_0(\pi - \alpha) \cos \lambda_0\theta - \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) \cos(\lambda_0 + 2)\theta] & (0 \leq \theta \leq \alpha); \\ (\lambda_0 + 2) [\sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \theta) - \sin \lambda_0\alpha \cos \lambda_0(\pi - \theta)] & (\alpha \leq \theta \leq \pi); \end{cases}$$

$$T(\theta) = \begin{cases} \lambda_0 \sin \lambda_0 (\pi - \alpha) \sin \lambda_0 \theta - (\lambda_0 + 2) \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) \sin(\lambda_0 + 2)\theta & (0 \leq \theta \leq \alpha); \\ \lambda_0 \sin \lambda_0 \alpha \sin \lambda_0 (\pi - \theta) - (\lambda_0 + 2) \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \theta) & (\alpha \leq \theta \leq \pi); \end{cases}$$

$$\Sigma_1(\theta) = \begin{cases} (\lambda_0 + 2) \sin \lambda_0 (\pi - \alpha) \cos(\lambda_0 + 2)\theta - \\ -(\lambda_0 - 2) \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) \sin(\lambda_0 + 2)\theta & (0 \leq \theta \leq \alpha); \\ (\lambda_0 - 2) \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0 (\pi - \theta) - \\ -(\lambda_0 + 2) \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \theta) & (\alpha \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

($f_{1,2,3}(r, \theta) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$). Постоянные C и C_0 должны определяться из решения каждой конкретной задачи теории упругости, изображенной на рис. 1.

Некоторые значения λ_0 приведены в таблице, где значения α даны в градусах.

α , град	$-\lambda_0$	β , град	Λ
100	0,190	50,1	7,524
110	0,335	55,4	14,083
120	0,449	60,7	12,996
130	0,541	66,2	11,417
140	0,619	71,7	10,208
150	0,689	77,1	8,339
160	0,756	82,2	7,654
170	0,831	86,7	5,811

С ростом внешней нагрузки вблизи точки O – остроконечного концентратора напряжений возникает и развивается пластическая зона предразрушения. Будем изучать лишь начальную стадию развития пластической зоны, когда ее размер в значительной степени меньше длины линий микропластического деформирования и размеров тела (маломасштабная пластическая зона предразрушения). Тогда она будет иметь вид пары узких полосок, исходящих из точки O [3].

Преимущественные деформации в пластической зоне предразрушения развиваются по механизму сдвига. Поэтому узкую пластическую полосу-зону будем моделировать прямой линией разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно пределу текучести на сдвиг $\tau_s \gg \tau_s^0$ (модель полос пластичности [7]).

Зависимость $T(\theta)$ качественно изображена на рис. 3 (наибольшее значение функции меньше модуля наименьшего значения).

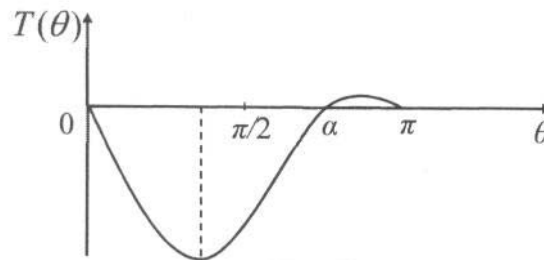


Рис. 3

Принимая во внимание вид этой зависимости и используя критерий максимальных касательных напряжений, заключаем, что пластическая зона будет развиваться внутри большего угла между линиями микропластического деформирования (рис. 4). Некоторые значения в градусах угла β наклона пластической полоски к линии микропластического деформирования приведены в таблице. Как видно, пластическая полоска развивается почти по биссектрисе угла α .

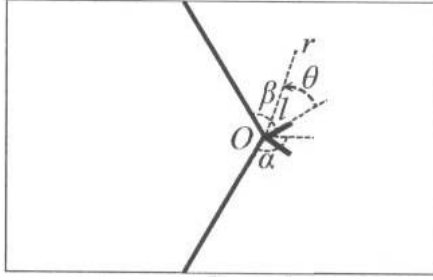


Рис. 4

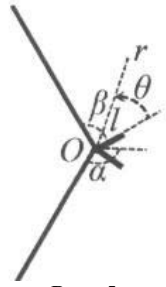


Рис. 5

Ставится задача определения длины l пластических полосок (рис. 4).

С учетом малости пластической зоны предразрушения приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для однородной изотропной плоскости, из точки которой исходят четыре прямые линии разрыва касательного смещения (рис. 5). Две из них полубесконечны, а две – конечной длины. При $r \rightarrow \infty$ суммы главных членов разложений напряжений в асимптотические ряды представляют собой решение аналогичной задачи без линий разрыва конечной длины (решение задачи К, о котором говорилось выше). Произвольные постоянные C и C_0 , входящие в указанное решение, считаются заданными. Они характеризуют интенсивность внешнего поля и должны определяться из решения каждой конкретной внешней задачи, изображенной на рис. 1.

Граничные условия рассматриваемой задачи теории упругости (рис. 5) имеют следующий вид:

$$\theta = \beta, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0, \tau_{r\theta} = \tau_s^0; \quad (1.1)$$

$$\theta = \beta - \alpha, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0; \theta = \pi - \alpha + \beta, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0;$$

$$\theta = 0, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0; \theta = 0, r < l, \tau_{r\theta} = \tau; \theta = 0, r > l, \langle u_r \rangle = 0; \quad (1.2)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty, \tau_{r\theta} = \frac{\tau_s^0}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta) + Cgr^{\lambda_0} + o\left(\frac{1}{r}\right); \quad (1.3)$$

$$g = \lambda_0 \sin \lambda_0 (\pi - \alpha) \sin \lambda_0 (\alpha - \beta) - (\lambda_0 + 2) \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) \sin(\lambda_0 + 2)(\alpha - \beta) \quad (g < 0).$$

Здесь $\beta - \alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha + \beta$; $\langle a \rangle$ – скачок a ; $\tau = \tau_s$, если $C < 0$; $\tau = -\tau_s$, если $C > 0$.

Решение сформулированной задачи теории упругости (рис. 5) представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая (задача 1) отличается от нее тем, что вместо третьего из условий (1.1) и первого из условий (1.2) имеем

$$\theta = \beta, \tau_{r\theta} = 0; \theta = 0, r < l, \tau_{r\theta} = \tau_1 - Cgr^{\lambda_0}; \quad (1.4)$$

$$\tau_1 = \tau - \frac{\tau_s^0}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta),$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (1.3) отсутствуют первые два слагаемых). Вторая задача – задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

В современной механике разрушения развиты эффективные методы решения соответствующих краевых задач [6]. В частности, для построения точных решений плоских статических задач теории упругости о трещинах в телах клиновидной конфигурации

во многих случаях используется метод Винера – Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [5]. Ниже этот метод применяется для решения задачи 1.

§2. Решение уравнения Винера – Хопфа.

Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1.1) и учитывая второе из условий (1.2) и условия (1.4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера – Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} = -\operatorname{tg} p\pi G(p)\Phi^-(p);$$

$$G(p) = \frac{G_1(p)\cos p\pi}{G_2(p)\sin p\pi}; \quad G_1 = \Delta_8(\Delta_2\Delta_6 + \Delta_4\Delta_5) + \Delta_9(\Delta_2\Delta_5 + \Delta_4\Delta_7); \quad G_2 = \Delta_1\Delta_4 + \Delta_2\Delta_3;$$

$$\Delta_1 = \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha; \quad \Delta_2 = \sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha; \quad \Delta_3 = \cos 2p\alpha - \cos 2\alpha;$$

$$\Delta_4 = \cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha; \quad \Delta_5 = \sin 2p\beta + p \sin 2\beta; \quad \Delta_6 = \cos 2p\beta - \cos 2\beta; \quad (2.1)$$

$$\Delta_7 = 2(\sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta); \quad \Delta_8 = \sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta);$$

$$\Delta_9 = \cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta); \quad \tau_2 = -Cgl^{\lambda_0};$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^{\infty} \tau_{r,\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho; \quad \Phi^-(p) = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \Big|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho.$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ – достаточно малые положительные числа.

Функция $\Phi^+(p)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, а функция $\Phi^-(p)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\varepsilon_1$.

Функция $G(it)$ ($-\infty < t < \infty$) представляет собой действительную положительную четную функцию t , стремящуюся к единице при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, индекс функции $G(p)$ по мнимой оси равен нулю. Поскольку, кроме того, функция $G(p)$ на мнимой оси удовлетворяет условию Гёльдера, имеет место факторизация

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0); \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p) & (\operatorname{Re} p < 0); \\ G^-(p) & (\operatorname{Re} p > 0). \end{cases} \quad (2.2)$$

Функция $G^+(p)$ аналитическая, не имеет нулей и стремится к единице при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция $G^-(p)$ аналитическая, не имеет нулей и стремится к единице при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

Функцию $p \operatorname{ctg} p\pi$ можно факторизовать так:

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p)K^-(p); \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}, \quad (2.3)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Функция $K^+(p)$ аналитическая и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 1/2$, а функция $K^-(p)$ аналитическая и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -1/2$. Справедливы асимптотики

$$K^+(p) \sim \sqrt{-p}; \quad K^-(p) \sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (2.4)$$

С помощью факторизаций (2.2), (2.3) уравнение (2.1) перепишем в виде

$$\frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{\tau_1 K^+(p)}{p(p+1)G^+(p)} + \frac{\tau_2 K^+(p)}{p(p+\lambda_0+1)G^+(p)} = -\frac{\Phi^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \quad (2.5)$$

Имеют место представления

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1 K^+(p)}{p(p+1)G^+(p)} &= \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] - \frac{\tau_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)}; \\ \frac{\tau_2 K^+(p)}{p(p+\lambda_0+1)G^+(p)} &= \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] - \\ &\quad - \frac{\tau_2 K^+(-\lambda_0-1)}{(p+\lambda_0+1)(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0; p \neq 0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] + \\ &\quad + \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] = \\ &= -\frac{\Phi^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} + \frac{\tau_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2 K^+(-\lambda_0-1)}{(p+\lambda_0+1)(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функция в левой части (2.7) аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция в правой части (2.7) аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. В силу принципа аналитического продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p .

Исходя из известных асимптотик

$$\theta = 0; r \rightarrow l+0; \tau_{r\theta} \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}; \quad \theta = 0; r \rightarrow l-0; \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$

(k_{II} – коэффициент интенсивности напряжений в конце линии разрыва касательного смещения), по теореме абелева типа находим

$$\Phi^+(p) \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{-2pl}}, \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{k_{II}}{\sqrt{2pl}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (2.8)$$

Из (2.2), (2.4), (2.8) следует, что функции в левой и правой частях (2.7) стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$, соответственно. В силу теоремы Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p .

Таким образом, решение уравнения Винера – Хопфа (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_2}{p+\lambda_0+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_0-1)}{(\lambda_0+1)G^+(-\lambda_0-1)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0); \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Phi^-(p) = K^-(p)G^-(p) \left[\frac{\tau_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2 K^+(-\lambda_0 - 1)}{(p + \lambda_0 + 1)(\lambda_0 + 1)G^+(-\lambda_0 - 1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

§3. Определение длины пластической зоны предразрушения.

С помощью (2.9) находим асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{\tau_1 K^+(-1)}{G^+(-1)} + \frac{\tau_2 K^+(-\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 + 1)G^+(-\lambda_0 - 1)} \right] \quad (p \rightarrow \infty). \quad (3.1)$$

Согласно (2.8), (3.1) получаем формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце линии разрыва касательного смещения

$$k_{II} = q_1(\alpha) C l^{\lambda_0 + 1/2} + q_2(\alpha) \left[\frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta) - \tau \right] \sqrt{l}; \quad (3.2)$$

$$q_1(\alpha) = \frac{\sqrt{2} g \Gamma(\lambda_0 + 1)}{\Gamma(\lambda_0 + 3/2) G^+(-\lambda_0 - 1)}; \quad q_2(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} G^+(-1)}.$$

Длина пластической зоны предразрушения определяется из условия ограниченности напряжений вблизи конца линии разрыва касательного смещения, т. е. из условия равенства нулю коэффициента k_{II} .

Приравняв к нулю правую часть (3.2), получаем следующую формулу, служащую для определения длины пластических полосок (рис. 4) при $C < 0$:

$$l = \Lambda \left[\frac{|C|}{\tau_s - \frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta)} \right]^{-1/\lambda_0}; \quad \Lambda = \left[\frac{\sqrt{\pi} |g| \tilde{A}(\lambda_0 + 1) G^+(-1)}{2 \tilde{A}(\lambda_0 + 3/2) G^+(-\lambda_0 - 1)} \right]^{-1/\lambda_0}. \quad (3.3)$$

Если $C > 0$, то

$$l = \Lambda \left[\frac{C}{\tau_s + \frac{\tau_s^o}{\sin 2\alpha} \sin 2(\alpha - \beta)} \right]^{-1/\lambda_0},$$

где

$$\tau_s^o < -\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\alpha - \beta)} \tau_s.$$

Некоторые значения Λ приведены в таблице.

В случае плоскости с линиями микропластического деформирования конечной длины (рис. 6, 7) соответствующая задача теории упругости (рис. 5) рассмотрена в [4]. Из решения этой задачи находим

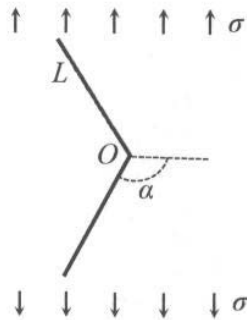


Рис. 6

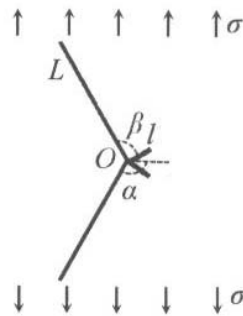


Рис. 7

$$C = Q(\alpha) \left(\tau_s^o - \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right) L^{-\lambda_0} < 0, \quad C_0 = \frac{\sigma}{2}; \quad (3.4)$$

$$Q(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \sin \lambda_0 \pi}{\lambda_0 F(\alpha)} \frac{\Gamma(\lambda_0 + 2)}{\Gamma(\lambda_0 + 3/2)} \exp \left\{ \frac{\lambda_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{(t^2 - \lambda_0 - 1) \ln \varphi(t, \alpha)}{(t^2 + 1) [t^2 + (\lambda_0 + 1)^2]} dt \right\};$$

$$F(\alpha) = 2\pi \cos 2\lambda_0 \pi - [\cos 2(\lambda_0 + 1)\alpha - \cos 2(\lambda_0 + 1)(\pi - \alpha)] \sin 2\alpha +$$

$$+ 2\alpha [(\lambda_0 + 1) \sin 2(\lambda_0 + 1)\alpha \sin 2\alpha - \cos 2(\lambda_0 + 1)\alpha \cos 2\alpha] -$$

$$- 2(\pi - \alpha) [(\lambda_0 + 1) \sin 2(\lambda_0 + 1)(\pi - \alpha) \sin 2\alpha + \cos 2(\lambda_0 + 1)(\pi - \alpha) \cos 2\alpha];$$

$$\varphi(t, \alpha) = \frac{\varphi_0(t, \alpha)}{\operatorname{sh} 2t\pi}; \quad \varphi_0(t, \alpha) = (\operatorname{ch} 2t\alpha - \cos 2\alpha) [\operatorname{sh} 2t(\pi - \alpha) - t \sin 2\alpha] +$$

$$+ [\operatorname{ch} 2t(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (\operatorname{sh} 2t\alpha + t \sin 2\alpha).$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем

$$l = \Lambda_1 \left[\frac{2t - s \sin 2\alpha}{2 - 2t \sin 2(\alpha - \beta) / \sin 2\alpha} \right]^{-1/\lambda_0} L; \quad \Lambda_1 = \Lambda(-Q)^{-1/\lambda_0}; \quad s = \frac{\sigma}{\tau_s}; \quad t = \frac{\tau_s^o}{\tau_s}.$$

Зависимости относительной длины l/L пластических полосок от нагрузки $s = \sigma/\tau_s$ для некоторых значений угла α изображены на рис. 8 ($t = 0,01$). Кривые 1 – 4 соответствуют значениям α , равным 140, 150, 160 и 170 градусов.

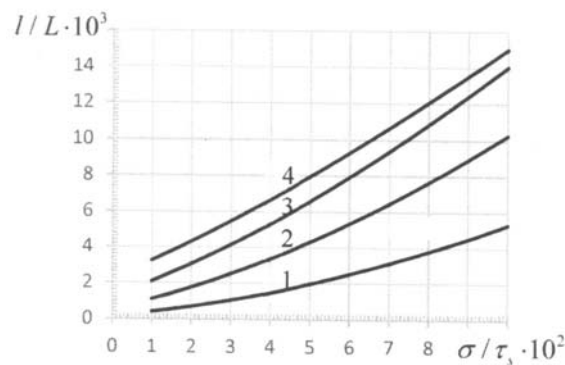


Рис. 8

Полученные результаты свидетельствуют о том, что чем меньше острый угол между линиями микропластического деформирования, тем больше интенсивность напряжений вблизи их точки пересечения (рис. 6) и длина пластической зоны предразрушения.

Заключение.

Построено точное решение симметричной задачи теории упругости для плоскости, из точки которой исходят четыре прямые линии разрыва касательного смещения. Две из них полубесконечны, а две – конечной длины. На основе этого решения определена маломасштабная пластическая зона предразрушения в точке пересечения линий микропластического деформирования. Она представляет собой пару узких пластических полосок, развивающихся из указанной точки внутри большего угла между линиями микропластического деформирования (рис. 4) почти по биссектрисе угла α . Выведена формула для длины пластических полосок. Показано, что в случае плоскости с линиями микропластического деформирования конечной длины (рис. 6, 7) с уменьшением острого угла между ними, интенсивность напряжений в угловой точке (рис. 6) и длина пластической зоны предразрушения увеличиваются.

РЕЗЮМЕ. Визначено маломасштабну пластичну зону передруйнування у точці перетину ліній мікропластичного деформування. Задачу про пластичну зону зведено до симетричної задачі теорії пружності для площини з чотирма прямими лініями розриву дотичного переміщення, які виходять з її точки. Дві з них – півнескінченні, а дві – скінченної довжини. Точний розв’язок задачі побудовано методом Вінера – Гопфа.

1. *Бережницький Л.Т., Кундрат Н.М.* О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения // Пробл. прочности. – 1982. – № 11. – С. 66 – 69.
2. *Бережницький Л.Т., Кундрат Н.М.* О возникновении и развитии пластических деформаций в окрестности остроугольного жесткого включения // Физ. – хим. механика материалов. – 1983. – № 6. – С. 60 – 68.
3. *Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (обзор) // Пробл. прочности. – 1973. – № 2. – С. 3 – 18.
4. *Каминский А.А., Быковцев А.С., Кипнис Л.А., Хазин Г.А.* Об интенсивности напряжений в концах сдвиговых трещин, исходящих из точки упругой плоскости // Доп. НАН України. – 2005. – № 1. – С. 56 – 58.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
6. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 488 с.
7. *Панасюк В.В., Саврук М.П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – № 1. – С. 49 – 68.
8. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
9. *Kaminsky A.A., Chernoiivan Yu.A.* Determination of Safe Static Loads for Polymeric Composites Weakened by Cracks // Int. Appl. Mech. – 2018. – № 4. – P. 384 – 392.
10. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A.* Study of the Stress State Near a Corner Point in Simulating the Initial Plastic Zone by Slipbands // Int. Appl. Mech. – 2001. – № 5. – P. 647 – 653.
11. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Khazin G.A.* Analysis of the Plastic Zone at a Corner Point by the Trident Model // Int. Appl. Mech. – 2002. – № 5. – P. 611 – 616.
12. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Polishchuk T.V.* Stress State Near a Small-Scale Crack at the Corner Point of the Interface of Media // Int. Appl. Mech. – 2018. – № 5. – P. 506 – 518.
13. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Polishchuk T.V.* Cottrell Crack Nucleation Condition // Int. Appl. Mech. – 2018. – № 6. – P. 642 – 652.
14. *Kaminskii A.A., Kurchakov E.E.* Influence of Tension along a Mode I Crack in an Elastic Body on the Formation of a Nonlinear Zone // Int. Appl. Mech. – 2015. – № 2. – P. 130 – 148.
15. *Kaminskii A.A., Selivanov M.F.* Modelling Subcritical Crack Growth in a Viscoelastic Body under Concentrated Forces // Int. Appl. Mech. – 2017. – № 5. – P. 538 – 544.
16. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chernoiivan Yu.A.* Kinetics of Mode I Crack Growth in a Viscoelastic Polymeric Material with Nano-inclusions // Int. Appl. Mech. – 2018. – № 1. – P. 34 – 40.
17. *Lo K.K.* Modeling of plastic yielding at a crack tip by inclined slip planes // Int. J. Fract. – 1979. – № 6. – P. 583 – 589.
18. *Rice J.R.* Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity // J. Mech. and Phys. Solids. – 1974. – № 1. – P. 17 – 26.
19. *Ridel H.* Plastic yielding on inclined slip-planes at a crack tip // J. Mech. and Phys. Solids. – 1976. – № 5. – P. 277 – 289.
20. *Selivanov M.F.* Slow Growth of a Crack with Contacting Faces in Viscoelastic Bodies // Int. Appl. Mech. – 2017. – № 6. – P. 617 – 622.
21. *Vitek V.* Yielding on inclined planes at the tip of a crack loaded in uniform tension // J. Mech. and Phys. Solids. – 1976. – № 5. – P. 263 – 275.

Поступила 13.04.2018

Утверждена в печать 04.06.2019