

В. Д. Кубенко

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** An analytical solution is proposed for a plane problem on action of the non-steady pressure at surface of a layer of compressible fluid. The corresponding plane problem of hydroacoustics is stated. The integral Laplace transform and Fourier transform are applied. The inverses of transforms in case of fixed or variable loading domain is carried out by means of the tabular relationships and convolution theorems. As a result, the expression for velocity and pressure in an arbitrary point of fluid is obtained in the closed form. The solution is represented in the form of sum, in which the  $m$  – th member represents the  $m$  – th reflected wave. Retaining the certain finite number of members in the solution gives the exact solution of the problem on the given interval of time taking into account the necessary number of reflected waves. The performed computation shows the velocity and pressure development depending on time and space coordinates.

**Key words:** non-steady loading, acoustical waves, liquid layer.

### Введение.

Распространение акустических и упругих волн в частично ограниченной или слоистой среде является важным предметом исследований для многих практических приложений, включая гидроакустику, прикладную геофизику, оптику и медицину. Обычно основной упор в исследованиях делается на изучение установившихся процессов. Когда речь идет о распространении установившихся волн в слоистой среде, параметром, определяющим выбор метода исследования, является соотношение длины волны и толщины слоя. Так, если длина волны много больше толщины слоя, слоистая среда моделируется приведенной однородной средой; если толщина слоев значительно превышает длину волны, используется лучевая теория. На практике длина волны может быть сравнима с толщиной слоя и тогда оба предельных случая неприменимы. Ситуация еще более усложняется, если рассматривается нестационарное возбуждение, частотный спектр которого является непрерывным. Задачи с нестационарной нагрузкой требуют развития специфических подходов, и исследований в этом направлении существенно меньше.

Акустическое зондирование, по-видимому, является основным инструментом определения характеристик физических и биологических тел в толще морских и океанических глубин. Математическая формулировка гидроакустических задач в качестве объекта исследования использует модель слоистой среды, состоящей из слоя сжимаемой жидкости и слоя с упругими свойствами, моделирующего подстилающий массив. Для водоемов большой глубины или слабых сигналов рассматривают распространение волн в полупространстве (полуплоскости). Если в расчет принимаются осадочные (седиментационные) явления, могут быть введены в рассмотрение промежуточные, как правило, акустические слои. Волновые возмущения, распространяясь в слоистой среде, претерпевают многократные отражения от граничных поверхностей слоев и создают сложную картину волнового поля, которую необходимо восстановить в результате решения соответствующей граничной задачи.

Среди исследований нестационарных процессов существенное число публикаций посвящено изучению распространения волн в упругом полупространстве. В первых работах [4, 13, 24, 29, 30] акцент делается на использование асимптотических методов и обнаружение качественных особенностей возникающих волновых процессов, таких как выделение отдельных типов волн и их фронтов, рассеяние и затухание в специфических направлениях, поведение волн в дальней зоне, обнаружение сингулярностей и др. Рассматривается преимущественно точечный (линейный в случае плоской задачи) источник, моделируемый дельта-функцией. В более поздних публикациях используются возможности современной компьютерной техники, позволяющей решать сложные задачи, связанные с нестационарной нагрузкой, действующей в области конечных размеров. При этом и в первом, и во втором случае доминирующим является применение интегральных преобразований по временной и пространственным переменным и их обращение методом Каньяра [11]. Не задаваясь целью анализа всех публикаций в этом направлении, отметим работу [10], в которой методами интегральных преобразований и их совместного обращения по методике Каньяра получены выражения для двух компонент вектора упругого перемещения (осесимметричная задача) при нестационарном нагружении по круговой площадке конечного радиуса в случае однородного и квадратичного распределения нагрузки вдоль радиуса. Вычисленные перемещения являются разрывными, что обусловлено избранной зависимостью действующей нагрузки от времени в виде дельта-функции. В статье [26] для аналогичной задачи обращение преобразований Лапласа и Ханкеля производится сведением к несобственным интегралам и их вычислением численными методами. Ряд обобщений приведен в книге [34]. Случай заглубленного источника рассмотрен в публикации [32]. Подвижная нестационарная нагрузка исследуется, например, в работах [5, 14].

Отметим, что подобные задачи решаются также численными методами, преимущественно конечно-элементными; укажем некоторые из них как пример [6 – 9, 25, 27].

Перечисленные выше исследования имеют дело с полубесконечными объектами – полупространством в осесимметричном случае или полуплоскостью в случае плоской задачи. Для таких объектов типичным является возбуждение волновых возмущений на границе и последующее беспрепятственное распространение акустических или упругих волн в массиве объекта. Для объекта ограниченных размеров, в частности для слоя, характерной особенностью волновых процессов, возбуждаемых на одной из границ, является многократное поочередное отражение возбужденных волн от каждой из границ. Тем самым в теле создается сложное поле давлений и скоростей (напряжений в упругом слое), изменяющееся каждый раз с приходом той или иной отраженной волны в рассматриваемую точку. Такая задача значительно сложнее и требует выработки соответствующих подходов к ее решению. Установившиеся процессы в слоистых средах исследованы достаточно широко (см. монографии [3, 15], обзор публикаций [33]). В монографиях [4, 29] впервые дана постановка нестационарной первой краевой задачи для упругого слоя и при помощи асимптотических методов исследуется поведение волновых полей в дальней по отношению к области приложения нагрузки зоне. В публикации [22] применительно к изучению раннего этапа проникания затупленного индентора в поверхность упругого слоя с использованием методики Каньяра построено решение, позволяющее проанализировать характер распространения прямых и отраженных упругих волн и напряженное состояние вдоль оси симметрии задачи в плоском случае. В работах [17 – 21] методами интегральных преобразований получено точное аналитическое решение нестационарной плоской задачи для упругой полуплоскости и упругого слоя со смешанными условиями и для слоя сжимаемой жидкости при действии поверхностной распределенной по области конечных размеров нагрузки.

Настоящая работа является развитием публикации [21]. Кроме фиксированной нагрузки рассматривается также нагрузка, распространяющаяся вдоль свободной поверхности с постоянной либо некоторой переменной скоростью. В работе получены выражения для гидродинамической скорости и давления и приведены соответствующие результаты вычислений. Рассмотрены случаи однородного и неоднородного исходного распределения действующей нагрузки. В качестве частного случая приведены также результаты вычислений для акустической полуплоскости.

Рассматривается слой жидкости, покоящийся на твердом дне, т.е. предполагается, что седиментация отсутствует (обычно это имеет место в случае океана), а жесткость материала постели столь велика, что можно считать ее абсолютно твердым телом. Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Обращение преобразований удастся выполнить при помощи табличных соотношений и теорем о свертке и получить выражение для давления (скорости) в произвольной точке слоя в замкнутом виде. Решение состоит из суммы, каждый член которой представляет очередную волну, последовательно отраженную от дна или дневной поверхности. Удержание в решении определенного конечного количества членов позволяет получить точное решение задачи на заданном интервале времени с учетом соответствующего числа отражений. Полезность такого решения состоит, во-первых, в удобстве и простоте его использования и, во-вторых, в возможности с его помощью апробировать различные численные методы исследования. Можно предположить, что многочисленные скачки на фронтах отраженных волн являются непростым препятствием при конечно-разностном или конечно-элементном способе решения таких задач.

Известно, что, как правило, для практики акустического зондирования интересны две области. Одна из них расположена непосредственно под волновым излучателем и связана с потребностью эхолотирования дна водоема (ближняя зона); вторая зона обусловлена применением методов гидроакустики для обнаружения и распознавания удаленных подводных тел и их скоплений. Числовые результаты, приведенные в данной публикации, иллюстрируют возможности использования предложенного подхода для расчетов акустических полей как в ближней, так и в дальней зоне.

### §1. Формулировка задачи.

Рассматривается полоса (слой) идеальной сжимаемой жидкости толщиной  $h$ , такая, что ее верхней границей является свободная поверхность, в то время как нижняя граничит с абсолютно жестким телом. Предположим, что на некотором участке свободной поверхности в начальный момент времени приложено динамическое давление (в общем случае нестационарное), которое является причиной возникновения в теле полосы распространяющейся волны давления. Последняя, достигая противоположной границы и взаимодействуя с ней, порождает отраженную волну, которая в свою очередь отражается от свободной границы, и этот процесс многократных отражений создает в слое сложное волновое поле. Цель работы состоит в построении подхода, который позволит вычислить характеристики этого поля в любой точке слоя в произвольный момент времени. Отметим, что в случае, когда  $h$  является достаточно большой величиной (в пределе  $h \rightarrow \infty$ ), будем иметь акустическое полупространство (полуплоскость), и процессы отражения будут отсутствовать. Этот частный случай также рассмотрен.

Ограничимся рассмотрением плоской задачи и отнесем рассматриваемый объект к декартовым координатам  $x, z$  так, что ось  $x$  направлена вдоль границы слоя, к которой приложена нагрузка, ось  $z$  – в глубину слоя (рис. 1). Нестационарную нагрузку, являющуюся в общем случае функцией времени  $t$  и координаты  $x$ , обозначим через  $Q(x, t)$  и предполагаем симметричной относительно оси  $z$ . В рамках данного исследования считаем, что область приложения нагрузки постоянна и равна  $2l$ .

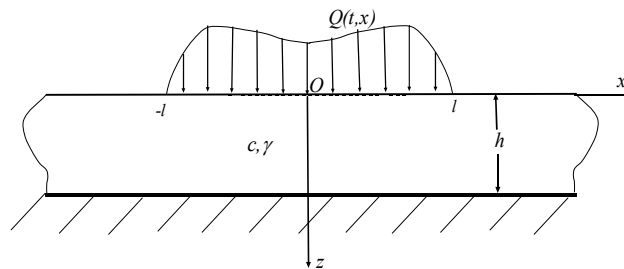


Рис. 1

Введем безразмерные обозначения

$$\tilde{x} = \frac{x}{h}; \quad \tilde{z} = \frac{z}{h}; \quad \tilde{l} = \frac{l}{h}; \quad \tilde{v}_j = \frac{v_j}{c}; \quad j, k = x, z; \quad \tilde{t} = \frac{ct}{h}; \quad \tilde{p} = \frac{p}{P_0}; \quad P_0 = \gamma c^2,$$

знак над которыми ниже будет опущен. Здесь  $h$  – толщина слоя;  $\gamma$  – плотность жидкости;  $c$  – скорость звука;  $p$  – гидродинамическое давление;  $v_j$  – компоненты вектора скорости;  $\gamma$  – плотность жидкости;  $R$  – некоторый линейный размер.

Поведение жидкости описывается волновым потенциалом  $\Phi$ , который в случае плоской задачи удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

и связан со скоростью и давлением соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Сформулируем граничные условия задачи. На поверхности  $z = 0$  задано динамическое давление  $Q(t, x)$ , которое в общем случае является функцией координаты  $x$  и времени. На донной поверхности  $z = h$  имеем условие непроницаемости, так что граничные условия имеют вид

$$p|_{z=0} = Q(t, x); \quad v_z|_{z=h} = 0. \quad (1.3)$$

Если в момент приложения нагрузки слой находился в покое, имеют место нулевые начальные условия для потенциала

$$\Phi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.4)$$

## §2. Решение в изображениях.

Волновое уравнение (1.1) подвергнем преобразованию Лапласа по времени (с учетом нулевых начальных условий) и преобразованию Фурье по координате  $x$  (предполагая, что при  $|x| \rightarrow \infty$  потенциалы и их первые производные стремятся к нулю). В результате в пространстве изображений по Лапласу и Фурье уравнение (1.1) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - (s^2 + \xi^2) \Phi^{LF} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $s$  – параметр преобразования Лапласа;  $\xi$  – параметр преобразования Фурье. Верхние индексы  $L$  и  $F$  при функциях обозначают, соответственно, изображение данной функции в пространстве преобразований Лапласа и преобразований Фурье:

$$f^L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt; \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ f^L(s) \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} e^{pt} f^L(s) ds;$$

$$f^F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx; \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1} \{ f^F(\xi) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

причем  $\lambda$  таково, что все особенности подынтегральной функции находятся слева от прямой  $\text{Re } s = \lambda$ .

Общее решение уравнения (2.1) запишем в виде

$$\Phi^{LF} = A(s, \xi) e^{-zP} + B(s, \xi) e^{zP}; \quad P = \sqrt{s^2 + \xi^2}, \quad (2.2)$$

где  $A(s, \xi)$ ,  $B(s, \xi)$  – неизвестные функции. Граничные условия (1.3) в пространстве изображений по Лапласу и Фурье имеют вид

$$-s\Phi^{LF} = Q^{LF}(s, \xi), \quad z = 0; \quad \frac{\partial \Phi^{LF}}{\partial z} = 0, \quad z = h. \quad (2.3)$$

Условия (2.3) позволяют определить функции  $A(s, \xi)$ ,  $B(s, \xi)$ , в результате чего получаем следующие выражения для давления и скорости в пространстве изображений:

$$p^{LF} = Q^{LF} \frac{e^{-zP} (1 + e^{-2(h-z)P})}{(1 + e^{-2hP})}; \quad v_z^{LF} = -Q^{LF} \frac{P e^{-zP} (1 - e^{-2P(h-z)})}{s (1 + e^{-2hP})}. \quad (2.4)$$

Раскладывая знаменатель выражений (2.4) в степенной ряд вида

$$(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

можно представить их в виде рядов

$$\begin{aligned} v_z^{LF} &= -Q^{LF}(\xi, s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w_n^{LF}(s, \xi, z); & w_n^{LF}(s, \xi, z) &= \frac{P}{s} (e^{-z_n P} - e^{-\bar{z}_n P}); \\ p^{LF} &= -Q^{LF}(\xi, s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, \xi, z); & g_n^{LF}(s, \xi, z) &= e^{-z_n P} + e^{-\bar{z}_n P}; \\ z_n &= 2nh + z; & \bar{z}_n &= 2(n+1)h - z. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что в случае  $h \rightarrow \infty$  в выражениях для давления и скорости сохраняется только член  $n = 0$ .

### §3. Обращение интегральных преобразований.

Рассмотрим достаточно общий случай – полагаем, что внезапно приложенное давление имеет вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) G(x). \quad (3.1)$$

Здесь  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда

$$H(t) = 1, \quad t > 0; \quad 0, \quad t < 0.$$

Функция  $Q(t, x)$  задает нагрузку, внезапно приложенную к поверхности  $x = 0$  и в дальнейшем остающуюся постоянной. Функция  $G(x)$  определяет характер распределения действующего давления вдоль оси  $x$ .

Изображения по Лапласу и Лапласу – Фурье функции  $Q(t, x)$  имеют вид

$$Q^L(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G(x); \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G^F(\xi). \quad (3.2)$$

Используя соотношения (2.4), (3.2), можно представить выражения для изображения давления и скорости в виде, удобном для последующих манипуляций

$$p^{LF} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{LF}(s, \xi, z); \quad v_z^{LF} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{zn}^{LF}(s, \xi, z). \quad (3.3)$$

Здесь обозначено

$$p_n^{LF}(s, \xi, z) = (-1)^{n+1} Q_0 G^F(\xi) \tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z);$$

$$\tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z) = \frac{1}{s} (e^{-z_n P} + e^{-\bar{z}_n P}); \quad (3.4)$$

$$v_{zn}^{LF} = (-1)^{n+1} Q_0 G^F(\xi) \tilde{w}_n^{LF}(s, \xi, z);$$

$$\tilde{w}_n^{LF}(s, \xi, z) = \frac{P}{s^2} (e^{-z_n P} - e^{-\bar{z}_n P}). \quad (3.5)$$

Задача состоит в обращении интегральных преобразований. Если удастся определить оригинал функции  $\tilde{w}_n^{LF}(s, \xi, z)$ , то есть функцию  $\tilde{w}_n(t, x, z)$ , то для получения оригинала давления  $v_{zn}^{LF}(s, \xi, z)$ , то есть функции  $v_{zn}(t, x, z)$ , можно применить свертку преобразования Фурье функций  $G(x)$  и  $\tilde{w}_n(t, x, z)$  [1]. Для давления процедура обращения аналогична. При этом свертка преобразования Лапласа не понадобится, так как множитель  $1/s$  в выражении (3.2) включен в  $\tilde{w}_n(t, x, z)$ , а функция  $G(x)$  не зависит от  $t$ . Ниже изложенная процедура обращения интегральных преобразований предполагает возможность перемены порядка процедур обращения.

**3.1. Скорость.** Произведем инверсию изображения скорости. Функцию  $\tilde{w}_n^{LF}(s, \xi, z)$  в выражении (3.5) преобразуем к виду

$$\tilde{w}_n^{LF}(s, \xi, z) = \left( \frac{1}{P} + \frac{\xi^2}{s^2 P} \right) (e^{-z_n P} - e^{-\bar{z}_n P}) \quad (3.6)$$

и выполним почленное обращение слагаемых в (3.6). Для этого используем следующие табличные соответствия [1] при инверсии преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{s^2 + \xi^2}} e^{-z \sqrt{s^2 + \xi^2}} \right) = \frac{1}{\pi} K_0(s \sqrt{x^2 + z^2});$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \xi^2 f(\xi) \} = - \frac{d^2}{dx^2} \{ f(x) \}$$

и при инверсии преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ K_0(s \sqrt{x^2 + z^2}) \right\} = H(t - \sqrt{x^2 + z^2}) \frac{1}{\sqrt{t^2 - (x^2 + z^2)}};$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} K_1(s \sqrt{x^2 + z^2}) \right\} = H(t - \sqrt{x^2 + z^2}) \frac{\sqrt{t^2 - (x^2 + z^2)}}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Здесь  $K_n(x)$  – цилиндрическая функция 3-го рода индекса  $n$  [2].

В результате функция  $\tilde{w}_n(t, x, z)$  примет вид

$$\tilde{w}_n(t, x, z) = \frac{1}{\pi} H(t - \sqrt{x^2 + z_n^2}) F_n^{(v)}(t, x, z_n) - \frac{1}{\pi} H(t - \sqrt{x^2 + \bar{z}_n^2}) F_n^{(v)}(t, x, \bar{z}_n);$$

$$F_n^{(v)}(t, x, z_n) = \frac{x^2(x^2 + z_n^2) - (x^2 - z_n^2)t^2}{(x^2 + z_n^2)^2 \sqrt{t^2 - x^2 - z_n^2}}; \quad F_n^{(v)}(t, x, z_n) = F_n^{(v)}(t, x, z_n) \Big|_{z_n = \bar{z}_n}; \quad (3.7)$$

$$z_n = 2nh + z; \quad \bar{z}_n = 2nh + (2h - z); \quad n = 0, \dots, \infty.$$

Теперь для обращения преобразования Фурье формулы (3.5) применим свертку Фурье [1] функций  $G(x)$  и  $w_n(t, x, z)$ . Суммируя по  $n$  согласно (3.3), в результате в общем случае действия нагрузки вида (3.1) получим следующее выражение для скорости  $v_z(t, x, z)$  в произвольной точке в произвольный момент времени:

$$v_z(t, x, z) = \frac{1}{2\pi} Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \zeta) \tilde{w}_n(t, \zeta, z) d\zeta. \quad (3.8)$$

*3.1.1. Фиксированная область нагрузки.* Рассмотрим широко используемый случай нагрузки (3.1), которая приложена в фиксированной области  $-l \leq x \leq l$ ,  $l = \text{const}$ . Функция  $G(x)$  в формуле (3.1) будет иметь вид

$$G(x) = f(x) [H(x+l) - H(x-l)]. \quad (3.9)$$

Здесь  $f(x)$  – некоторая функция, задающая распределение нагрузки в указанной области.

Из формулы (3.6) в этом случае получим

$$\begin{aligned} v_z(t, x, z) &= Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} v_{zn}(t, x, z); \\ v_{zn}(t, x, z) &= \frac{1}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} f(x - \zeta) \tilde{w}_n(t, \zeta, z) d\zeta; \\ \tilde{w}_n(t, \zeta, z) &= H(\sqrt{t^2 - z_n^2} - \zeta) F_n^{(v)}(t, \zeta, z_n) - H(\sqrt{t^2 - \bar{z}_n^2} - \zeta) F_n^{(v)}(t, \zeta, \bar{z}_n). \end{aligned} \quad (3.10)$$

При однородном распределении нагрузки, то есть при  $f(x) = 1$ , имеем

$$v_z(t, x, z) = \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \int_{x-l}^{X(t, x, z_n)} H\left(t - \sqrt{\zeta^2 + z_n^2}\right) \frac{(\zeta^2 + z_n^2)\zeta^2 - (\zeta^2 - z_n^2)t^2}{(\zeta^2 + z_n^2)^2 \sqrt{t^2 - (\zeta^2 + z_n^2)}} d\zeta - \int_{x-l}^{X(t, x, \bar{z}_n)} H\left(t - \sqrt{\zeta^2 + \bar{z}_n^2}\right) \frac{(\zeta^2 + \bar{z}_n^2)\zeta^2 - (\zeta^2 - \bar{z}_n^2)t^2}{(\zeta^2 + \bar{z}_n^2)^2 \sqrt{t^2 - (\zeta^2 + \bar{z}_n^2)}} d\zeta \right], \quad (3.11)$$

где функции  $X(t, x, z_n)$ ,  $X(t, x, \bar{z}_n)$  приобретают вид

$$X(t, x, z_n) = \begin{cases} \sqrt{t^2 - z_n^2}, & \text{if } \sqrt{t^2 - z_n^2} < x+l \\ x+l, & \text{if } \sqrt{t^2 - z_n^2} > x+l \end{cases}; \quad X(t, x, \bar{z}_n) = X(t, x, z_n) \Big|_{z_n = \bar{z}_n}.$$

Нетрудно получить значение неопределенного интеграла

$$I(t, z_n, \zeta) = \int \frac{\zeta^2 (\zeta^2 + z_n^2) - (\zeta^2 - z_n^2)t^2}{(\zeta^2 + z_n^2)^2 \sqrt{t^2 - \zeta^2 - z_n^2}} d\zeta = \frac{\zeta \sqrt{t^2 - (\zeta^2 + z_n^2)}}{\zeta^2 + z_n^2} + \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{t^2 - z_n^2 - \zeta^2}} + C$$

и тогда скорость  $v_z(t, x, z)$  может быть представлена в элементарных функциях в следующем виде:

$$v_z(t, x, z) = \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ H(t - z_n) I(t, z_n, \zeta) \Big|_{x-l}^{X(t, x, z_n)} - H(t - \bar{z}_n) I(t, \bar{z}_n, \zeta) \Big|_{x-l}^{X(t, x, \bar{z}_n)} \right].$$

Если  $f(x) = l^2 - x^2$ , т.е. распределение нагрузки задано квадратичной функцией, получим выражение для скорости

$$v_z(t, x, z) = \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \int_{x-l}^{X(t, x, z_n)} H\left(t - \sqrt{\zeta^2 + z_n^2}\right) \left(l^2 - (x - \zeta)^2\right) \frac{(\zeta^2 + z_n^2)\zeta^2 - (\zeta^2 - z_n^2)t^2}{(\zeta^2 + z_n^2)^2 \sqrt{t^2 - (\zeta^2 + z_n^2)}} d\zeta - \int_{x-l}^{X(t, x, \bar{z}_n)} H\left(t - \sqrt{\zeta^2 + \bar{z}_n^2}\right) \left(l^2 - (x - \zeta)^2\right) \frac{(\zeta^2 + \bar{z}_n^2)\zeta^2 - (\zeta^2 - \bar{z}_n^2)t^2}{(\zeta^2 + \bar{z}_n^2)^2 \sqrt{t^2 - (\zeta^2 + \bar{z}_n^2)}} d\zeta \right],$$

которое также может быть записано в элементарных функциях (не приводится ввиду громоздкости выражения).

Для слоя бесконечной толщины ( $h \rightarrow \infty$ ) выражение для скорости в общем случае имеет вид

$$v_z(t, x, z) = \frac{Q_0}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} H\left(\sqrt{t^2 - z_n^2} - \zeta\right) f(x - \zeta) \frac{(\zeta^2 + z_n^2)\zeta^2 - (\zeta^2 - z_n^2)t^2}{(\zeta^2 + z_n^2)^2 \sqrt{t^2 - (\zeta^2 + z_n^2)}} d\zeta. \quad (3.12)$$

В случае, когда  $f(x) = 1$ , получаем

$$v_z(t, x, z) = \frac{Q_0}{\pi} I(t, z_n, \zeta) \Big|_{x-l}^{X(t, x, z)}. \quad (3.13)$$

**3.2. Давление.** Произведем инверсию изображения давления – формулы (3.3), (3.4).

Функция  $\tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z)$  содержит слагаемые вида  $\frac{1}{s} e^{-z_n \sqrt{s^2 + \xi^2}}$  и  $\frac{1}{s} e^{-\bar{z}_n \sqrt{s^2 + \xi^2}}$ ,  $n = 0, \dots, \infty$ .

Для обращения преобразования Фурье функции  $e^{-z_n \sqrt{s^2 + \xi^2}}$  воспользуемся табличным соотношением

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-z_n \sqrt{s^2 + \xi^2}}\right) = s \frac{z_n}{\pi \sqrt{x^2 + z_n^2}} K_1\left(s \sqrt{x^2 + z_n^2}\right), \quad (3.14)$$

а для обращения преобразования Лапласа функции  $K_1\left(s \sqrt{x^2 + z_n^2}\right)$  применим формулу

$$\mathcal{L}^{-1}\left(K_1\left(s \sqrt{x^2 + z_n^2}\right)\right) = H\left(t - \sqrt{x^2 + z_n^2}\right) \frac{t}{\sqrt{x^2 + z_n^2} \sqrt{t^2 - (x^2 + z_n^2)}}. \quad (3.15)$$

Тогда функцию  $\tilde{g}_n(t, x, z)$ , изображение которой задано в (3.4), получим в следующем виде:

$$\tilde{g}_n(t, x, z) = H\left(t - \sqrt{x^2 + z_n^2}\right) F_n^{(p)}(t, x, z_n) + H\left(t - \sqrt{x^2 + \bar{z}_n^2}\right) F_n^{(p)}(t, x, \bar{z}_n);$$

$$F_n^{(p)}(t, x, z_n) = \frac{tz_n}{(x^2 + z_n^2) \sqrt{t^2 - x^2 - z_n^2}}; \quad F_n^{(p)}(t, x, \bar{z}_n) = F_n^{(p)}(t, x, z_n) \Big|_{z_n = \bar{z}_n}; \quad (3.16)$$

$$z_n = 2nh + z; \quad \bar{z}_n = 2nh + (2h - z); \quad n = 0, \dots, \infty.$$

Для того, чтобы произвести инверсию компонента давления  $p_n(t, x, z)$  в выражении (3.4) относительно преобразования Фурье, применим свертку Фурье к произведению функций  $G(x, t)$  и  $\tilde{g}_n(t, x, z)$



$$p_n(t, x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \zeta) \tilde{g}_n(t, \zeta, z) d\zeta, \quad (3.17)$$

и тогда давление  $p(t, x, z)$  в целом можно записать в виде

$$p(t, x, z) = \frac{Q_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \zeta) \tilde{g}_n(\tau, \zeta, z) d\zeta. \quad (3.18)$$

*3.2.1. Фиксированная область действия нагрузки.* Если нагрузка (3.1) приложена в фиксированной области  $-l \leq x \leq l$ ,  $l = \text{const}$ , функция  $G(x, t)$  имеет вид (3.10), (3.11). Из соотношений (3.16) – (3.18) получаем следующее выражение для давления  $p(x, z)$  в произвольной точке слоя в произвольный момент времени  $t$  в случае, когда действующая нагрузка внезапно возникает и остается постоянной в фиксированной области границы  $(-l, l)$

$$p(t, x, z) = \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} p_n(t, x, z); \quad (3.19)$$

$$p_n(t, x, z) = \int_{x-l}^{x+l} f(x - \zeta) \bar{g}_n(t, \zeta, z) d\zeta; \quad (3.20)$$

$$\tilde{g}_n(t, \zeta, z) = H\left(\sqrt{t^2 - z_n^2} - \zeta\right) F_n^{(p)}(t, \zeta, z_n) + H\left(\sqrt{t^2 - \bar{z}_n^2} - \zeta\right) F_n^{(p)}(t, \zeta, \bar{z}_n).$$

Выражение для  $p_n(t, x, z)$  перепишем с учетом вида функций  $F_n^{(p)}(t, \zeta, z_n)$ ,  $F_n^{(p)}(t, \zeta, \bar{z}_n)$ , которые заданы формулой (3.16), в следующем виде:

$$p_n(t, x, z) = \int_{x-l}^{x+l} f(x - \zeta) \left[ \frac{tz_n H(t^2 - z_n^2 - \zeta^2)}{(\zeta^2 + z_n^2) \sqrt{(t^2 - z_n^2) - \zeta^2}} + \frac{t\bar{z}_n H(t^2 - \bar{z}_n^2 - \zeta^2)}{(\zeta^2 + \bar{z}_n^2) \sqrt{(t^2 - \bar{z}_n^2) - \zeta^2}} \right] d\zeta. \quad (3.21)$$

Заметим, что, если зависимость нагрузки от времени в (3.1) определяется некоторой функцией достаточно общего вида  $q(t)H(t)$ , выражение (3.19) служит в качестве исходного, а искомое давление вычисляется на основе теоремы о свертке операционного исчисления [1]

$$p(t, x, z) \Big|_{q(t)} = \int_0^t q(t - \tau) p(\tau, x, z) d\tau.$$

Здесь  $p(t, x, z)$  определяется через  $p_n(t, x, z)$  рядом (3.20). Для слоя бесконечной толщины ( $h \rightarrow \infty$ ) выражение для давления имеет вид

$$p(t, x, z) = -\frac{Q_0}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} f(x - \zeta) \frac{tz H(t^2 - z^2 - \zeta^2)}{(\zeta^2 + z^2) \sqrt{(t^2 - z^2) - \zeta^2}} d\zeta. \quad (3.22)$$

Таким образом, полученные соотношения дают замкнутое аналитическое решение сформулированной нестационарной задачи в случае общего вида зависимости действующей нагрузки от времени и ее произвольного распределения вдоль фиксированного участка границы, который является областью задания нагрузки. Вид выражений (3.10), (3.11) и аналогично (3.18), (3.19) показывает, что фигурирующие в них ряды

составлены из членов, соответствующих последовательно отраженным от граничных поверхностей  $z=h$  и  $z=0$  волн. При этом  $n$ -й член ряда, содержащий функцию  $F_n^{(v)}(t, \xi, z_n)$ ,  $F_n^{(p)}(t, \xi, z_n)$ , представляет  $n$ -ю волну, отраженную от границы  $z=0$ , тогда как член ряда, содержащий функцию  $F_n^{(v)}(t, \xi, \bar{z}_n)$ ,  $F_n^{(p)}(t, \xi, \bar{z}_n)$ , представляет волну,  $n$  раз отразившуюся от поверхности  $z=h$ . Если ограничивать рассмотрение конечным интервалом времени  $T$ , следует ряды по  $n$  в (3.10) и аналогично (3.18) заменить конечными суммами от 0 до  $N$ , где  $N = \text{integer}[T/h]$  – число отражений, учитываемых в решении для избранного интервала  $T$ .

Для ряда функций  $f(x)$  выражения для  $p(t, x, z)$  из (3.19) можно получить в элементарных функциях. Например, если предположить, что распределение давления по полосе  $(-l, l)$  является однородным, т.е.  $f(x)=1$ , соотношения (3.19), (3.20) позволяют записать

$$p(t, x, z) = \frac{1}{\pi} Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \begin{aligned} & H\left(t - \sqrt{(x+l)^2 + z_n^2}\right) t z_n \int_{x-l}^{X(t, x, z_n)} \frac{1}{(\zeta^2 + z_n^2) \sqrt{(t^2 - z_n^2) - \zeta^2}} d\zeta + \\ & + H\left(t - \sqrt{(x+l)^2 + \bar{z}_n^2}\right) t \bar{z}_n \int_{x-l}^{X(t, x, \bar{z}_n)} \frac{1}{(\zeta^2 + \bar{z}_n^2) \sqrt{(t^2 - \bar{z}_n^2) - \zeta^2}} d\zeta \end{aligned} \right];$$

$$X(t, x, z_n) = \begin{cases} \sqrt{t^2 - z_n^2}, & \text{if } \sqrt{t^2 - z_n^2} < x+l \\ x+l, & \text{if } \sqrt{t^2 - z_n^2} > x+l \end{cases}; \quad X(t, x, \bar{z}_n) = X(t, x, z_n)|_{z_n=\bar{z}_n}. \quad (3.23)$$

Интегралы в (3.23) берутся, в результате чего давление представляется в элементарных функциях

$$p(t, x, z) = \frac{1}{\pi} Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (G_n(t, x, z_n) + G_n(t, x, \bar{z}_n)); \quad G_n(t, x, \bar{z}_n) = G_n(t, x, z_n)|_{z_n=\bar{z}_n};$$

$$G_n(t, x, z_n) = H\left(\sqrt{(x+l)^2 + z_n^2} - t\right) \frac{\pi}{2} + H\left(t - \sqrt{(x+l)^2 + z_n^2}\right) \arctan \frac{t(x+l)}{z_n \sqrt{t^2 - z_n^2} - (x+l)^2} -$$

$$- H\left(t - \sqrt{(x-l)^2 + z_n^2}\right) \arctan \frac{t(x-l)}{z_n \sqrt{t^2 - z_n^2} - (x-l)^2};$$

$$z_n = 2nh + z; \quad \bar{z}_n = 2(n+1)h - z, \quad n = 0, \dots, \infty.$$

Если функция  $f(x)$  является квадратичной, т.е.  $f(x) = l^2 - x^2$ , давление вычисляется по формуле

$$p(t, x, z) = \frac{1}{\pi} Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \times$$

$$\left[ \begin{aligned} & H\left(t - \sqrt{(x+l)^2 + z_n^2}\right) t z_n \int_{x-l}^{X(t, x, z_n)} \frac{l^2 - (x-\zeta)^2}{(\zeta^2 + z_n^2) \sqrt{(t^2 - z_n^2) - \zeta^2}} d\zeta + \\ & + H\left(t - \sqrt{(x+l)^2 + \bar{z}_n^2}\right) t \bar{z}_n \int_{x-l}^{X(t, x, \bar{z}_n)} \frac{l^2 - (x-\zeta)^2}{(\zeta^2 + \bar{z}_n^2) \sqrt{(t^2 - \bar{z}_n^2) - \zeta^2}} d\zeta \end{aligned} \right]. \quad (3.24)$$

Взяв неопределенный интеграл

$$J(t, x, z_n, \zeta) = \int \frac{l^2 - (x-\zeta)^2}{(\zeta^2 + z_n^2) \sqrt{(t^2 - z_n^2) - \zeta^2}} d\zeta =$$

$$= \left[ (l^2 + z^2) - x^2 \right] \arctan \frac{t\zeta}{z\sqrt{t^2 - z^2 - \zeta^2}} - \\ - tz \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{t^2 - z^2 - \zeta^2}} - xz \operatorname{arctanh} \left( \frac{2t\sqrt{t^2 - z^2 - \zeta^2}}{2t^2 - z^2 - \zeta^2} \right) + C,$$

получим выражение для давления в элементарных функциях

$$p(t, x, z) = \frac{1}{\pi} Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \begin{aligned} & H \left( t - \sqrt{(x+l)^2 + z_n^2} \right) t z_n J(t, x, z_n, \zeta) \Big|_{x-l}^{X(t, x, z_n)} + \\ & + H \left( t - \sqrt{(x+l)^2 + \bar{z}_n^2} \right) t \bar{z}_n J(t, x, \bar{z}_n, \zeta) \Big|_{x-l}^{X(t, x, \bar{z}_n)} \end{aligned} \right]; \\ J(t, x, \bar{z}_n, \zeta) = J(t, x, z_n, \zeta) \Big|_{z_n = \bar{z}_n}.$$

#### §4. Переменная область действия нагрузки.

**4.1. Постоянная скорость распространения нагрузки.** Предположим, что приложенная к границе слоя нагрузка  $Q(t, x)$  внезапно возникает и в дальнейшем распространяется по поверхности  $z = 0$  с постоянной скоростью  $k$ . Функция  $Q(t, x)$  из (1.3) и ее изображения в этом случае имеют вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - |x|); \quad Q^F(t, \xi) = 2Q_0 \frac{\sin kt\xi}{\xi}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = 2k \frac{Q_0}{s^2 + k^2 \xi^2}. \quad (4.1)$$

Тогда, согласно (2.5), (4.1), изображение давления и скорости запишутся в форме

$$v_z^{LF} = 2Q_0 k \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w_n^{LF}(s, \xi, z); \quad w_n^{LF}(s, \xi, z) = \frac{P}{s} (e^{-z_n P} - e^{-\bar{z}_n P}); \\ p_z^{LF} = 2Q_0 k \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, \xi, z); \quad g_n^{LF}(s, \xi, z) = e^{-z_n P} + e^{-\bar{z}_n P}.$$

Если ограничиться рассмотрением процесса лишь на оси симметрии задачи, можно использовать эффективный метод совместного обращения преобразований Каньяра. Запишем инверсию преобразования Фурье на оси  $z$

$$v_z^L(s, z, 0) = 2Q_0 k \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} w_n^{LF}(s, \xi, z) d\xi; \\ p_z^L(s, z, 0) = 2Q_0 k \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2 + k^2 \xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} g_n^{LF}(s, \xi, z) d\xi$$

и выполним замену переменной интегрирования

$$\xi = s\eta. \quad (4.2)$$

В результате получим в пространстве изображений по Лапласу

$$v_z^L(s, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [M_v^L(s, z_n) + M_v^L(s, \bar{z}_n)]; \\ p_z^L(s, z, 0) = \frac{2}{\pi} Q_0 k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [M_p^L(s, z_n) + M_p^L(s, \bar{z}_n)]; \quad (4.3)$$

$$M_v^L(s, z_n) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{1+k^2\eta^2} e^{-sz_n\sqrt{1+\eta^2}} d\eta; \quad M_v^L(s, \bar{z}_n) = M_v^L(s, z_n) \Big|_{z_n = \bar{z}_n};$$

$$M_p^L(s, z_n) = \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{1}{1+k^2\eta^2} e^{-sz_n\sqrt{1+\eta^2}} d\eta; \quad M_p^L(s, \bar{z}_n) = M_p^L(s, z_n) \Big|_{z_n=\bar{z}_n}.$$

Если теперь в выражении для  $M_p^L(s, z_n)$  совершить замену переменного  $z_n\sqrt{1+\eta^2} = t$ , оно приобретет вид оператора прямого преобразования Лапласа. Следовательно, подынтегральное выражение в нем является оригиналом. Производя необходимое интегрирование, отвечающее имеющемуся множителю  $1/s$ , получаем окончательно следующую функцию  $M_p(t, z_n)$  в пространстве оригиналов:

$$\begin{aligned} M_p(t, z_n) &= H(t-z_n) z_n \int_{z_n}^t \frac{\tau}{(z_n^2 + k^2(\tau^2 - z_n^2))\sqrt{\tau^2 - z_n^2}} d\tau = \\ &= -H(t-z_n) \frac{1}{2k} \left[ \arctan \frac{kz_n - \sqrt{k^2-1}\tau}{\sqrt{\tau^2 - z_n^2}} + \arctan \frac{kz_n + \sqrt{k^2-1}\tau}{\sqrt{\tau^2 - z_n^2}} \right]_{z_n}^t. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} M_v(t, z_n) &= H(t-z_n) \int_{z_n}^t \frac{\tau^2}{(z_n^2 + k^2(\tau^2 - z_n^2))\sqrt{\tau^2 - z_n^2}} d\tau = \\ &= H(t-z_n) \frac{1}{k^2} \left[ \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 - z_n^2}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{k^2-1}}{2} \left( \arctan \frac{\sqrt{k^2-1}\tau - kz_n}{\sqrt{\tau^2 - z_n^2}} + \arctan \frac{\sqrt{k^2-1}\tau + kz_n}{\sqrt{\tau^2 - z_n^2}} \right) \right]_{z_n}^t. \end{aligned}$$

Тогда скорость и давление в оригиналах представляются рядами

$$\begin{aligned} v_z(t, z, 0) &= \frac{2}{\pi} Q_0 k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [M_v(t, z_n) + M_v(t, \bar{z}_n)]; \\ p_z(s, z, 0) &= \frac{2}{\pi} Q_0 k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [M_p(t, z_n) + M_p(t, \bar{z}_n)]; \\ M_v(t, \bar{z}_n) &= M_v(t, z_n, 0) \Big|_{z_n=\bar{z}_n}, \quad M_p(t, \bar{z}_n) = M_p(t, z_n, 0) \Big|_{z_n=\bar{z}_n}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

**4.2. Переменная скорость распространения нагрузки.** Если внезапно возникшая нагрузка такова, что ее область действия расширяется вдоль границы  $z=0$  с переменной скоростью, пропорциональной  $t^{-1/2}$ , функция  $Q(t, x)$  из (1.3) имеет вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(kt - x^2); \quad Q^L(s, x) = Q_0 \frac{1}{s} e^{-\frac{x^2}{k}s}; \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{2s^{3/2}} \sqrt{k\pi} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}}. \quad (4.5)$$

Соответственно, выражения для изображения скорости и давления будут такими:

$$\begin{aligned} v_z^{LF} &= Q_0 \frac{1}{2s^{3/2}} \sqrt{k\pi} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w_n^{LF}(s, \xi, z); \quad w_n^{LF}(s, \xi, z) = \frac{P}{s} (e^{-z_n P} - e^{-\bar{z}_n P}); \\ p^{LF} &= Q_0 \frac{1}{2s^{3/2}} \sqrt{k\pi} e^{-\frac{\xi^2 k}{4s}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, \xi, z); \quad g_n^{LF}(s, \xi, z) = e^{-z_n P} + e^{-\bar{z}_n P}. \end{aligned}$$

Выполнив, как и в предыдущем случае, инверсию преобразования Фурье на оси  $z$  с последующей заменой переменного (4.2), получим

$$v_z^L(s, z, 0) = Q_0 \frac{1}{2s^{1/2}} \sqrt{k\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^{\infty} \sqrt{1+\eta^2} \left[ e^{-s(\frac{k\eta^2}{4} + z_n \sqrt{1+\eta^2})} - e^{-s(\frac{k\eta^2}{4} + \bar{z}_n \sqrt{1+\eta^2})} \right] d\eta;$$

$$p^L(s, z, 0) = Q_0 \frac{1}{2s^{1/2}} \sqrt{k\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^{\infty} \left[ e^{-s(\frac{k\eta^2}{4} + z_n \sqrt{1+\eta^2})} + e^{-s(\frac{k\eta^2}{4} + \bar{z}_n \sqrt{1+\eta^2})} \right] d\eta.$$

После замены переменного  $\frac{\eta^2 k}{4} + z_n \sqrt{1+\eta^2} = t$  или  $\frac{\eta^2 k}{4} + \bar{z}_n \sqrt{1+\eta^2} = t$ , использования табличного соотношения [1]

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^{1/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

и применения теоремы о свертке операционного исчисления, окончательно будем иметь следующие выражения для скорости и давления в произвольной точке оси  $z$  в случае расширяющейся нагрузки вида (4.5):

$$\begin{aligned} v_z^L(s, z, 0) &= \frac{Q_0}{2} \sqrt{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [M_v(t, z_n, 0) - M_v(t, \bar{z}_n, 0)]; \\ p^L(s, z, 0) &= \frac{Q_0}{2} \sqrt{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [M_p(t, z_n, 0) + M_p(t, \bar{z}_n, 0)]; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$M_v(t, z_n, 0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} H(t - z_n) \int_{z_n}^t \frac{(2z_n - T(\tau, z_n)) \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} (k\tau + 2z_n^2 - z_n T(\tau, z_n))}}{\sqrt{t - \tau} \sqrt{kt + 2z_n^2 - z_n T(\tau, z_n)} T(\tau, z_n)} d\tau;$$

$$M_p(t, z_n, 0) = -H(t - z_n) \int_{z_n}^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \frac{2z_n - T(\tau, z_n)}{\sqrt{kt + 2z_n^2 - z_n T(\tau, z_n)} T(\tau, z_n)} d\tau;$$

$$T(t, z_n) = \sqrt{4z_n^2 + 4kt + k^2};$$

$$M_v(t, \bar{z}_n, 0) = M_v(t, z_n, 0) \Big|_{z_n = \bar{z}_n}; \quad M_p(t, \bar{z}_n, 0) = M_p(t, z_n, 0) \Big|_{z_n = \bar{z}_n}.$$

### §5. Числовые результаты.

Приведенные ниже результаты демонстрируют вычислительные возможности развитого подхода. Они получены на основе вычисления интегралов по формулам (3.11), (3.23) и (3.24) как универсальным формулам для расчетов. В качестве действующей нагрузки рассматривалось либо однородное распределение давления по области нагружения, либо распределение по квадратичному закону, т.е.

$$Q(t, x) = -Q_0 H(t) H(l - |x|); \quad (5.1)$$

$$Q(t, x) = -Q_0 H(t) H(l^2 - x^2). \quad (5.2)$$

Приведены также результаты вычислений в случае расширяющейся нагрузки согласно формулам (4.4), (4.6).

Точность вычислений контролировалась путем сравнения результатов, полученных при различных шагах интегрирования. При вычислениях выбиралась единичная амплитуда нагрузки  $Q_0$ , полудлина области действия нагрузки  $l$  также равна единице, толщина слоя  $h$  равна единице или бесконечно большая, т.е.

$$Q_0 = 1; l = 1; h = 1; h \rightarrow \infty . \quad (5.3)$$

**5.1 Полу плоскость.** Рис. 2, 3 иллюстрируют результаты вычислений для полу плоскости при нагрузке (5.1). На рис. 2 показано развитие во времени (рис. 2, в, рис. 3, в) при фиксированном  $x = 0$ , а также вдоль оси  $x$  (рис. 2, а, рис. 3, а) и оси  $z$  (рис. 2, б, рис. 3, б) в фиксированные моменты времени.

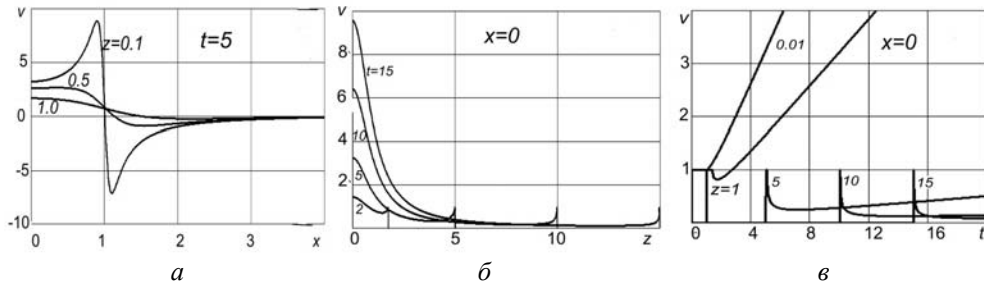


Рис. 2

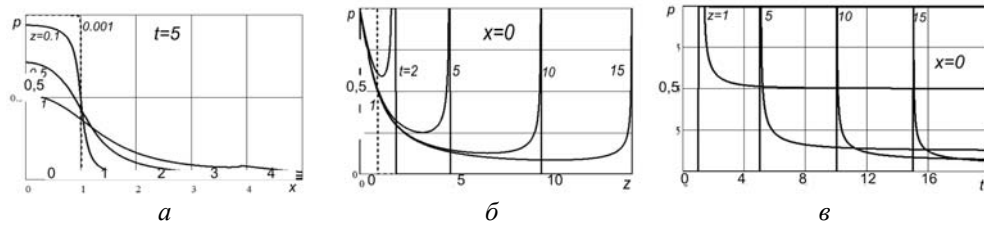


Рис. 3

Отчетливо виден волновой характер давления и скорости – рис. 2, б, в, 3, б, в. Отметим, что при выбранной нагрузке давление и скорость сохраняют на фронте распространяющейся волны постоянный единичный скачок, пик которого с расстоянием и временем становится тоньше. В то же время в горизонтальном направлении распределение скорости и давления имеет гладкий характер – рис. 2, а, 3, а.

**5.2. Слой.** Для слоя при нагрузке вида (5.1) числовые результаты для скорости и давления представлены на рисунках 4 и 5, соответственно. Если сравнивать рис. 2, а и 4, а, можно заметить, что конечная толщина слоя слабо проявляется в распределении скорости вдоль абсциссы  $x$  при фиксированных значениях времени  $t = 5$  и глубины ( $z = 0,1$  и  $z = 0,5$ ). Однако, так как при  $z = 1$  для слоя имеет место граничное условие (второе условие (1.3)), скорость, в отличие от полу плоскости, обнуляется. Для давления распределение вдоль оси  $x$  при  $t = 5$  в случае слоя характеризуется несколько более резкими изменениями кривых – сравни рис. 3, а и 5, а. Многочисленные отражения хорошо видны на рис. 4, в, рис. 5, в, которые показывают развитие во времени скорости и давления при  $x = 0$  при различных глубинах. Так, на рис. 4, в представлены графики скорости при значениях  $z = 0,01; 0,5; 0,9; 1,0$ . На рис. 5, в показаны графики давления при значениях  $z = 0; 0,5; 0,9; 1,0$ . В моменты прихода фронта волны в рассматриваемую точку на оси  $z$  имеет место скачок скорости (давления). Скачки напряжения при каждом отражении сохраняют постоянное значение, однако их длительность во времени уменьшается с каждым последующим отражением (происходит как бы заострение пика напряжения). Это означает, что в реальной среде с обязательным присутствием вязкости максимальные амплитуды будут уменьшаться с каждым отражением. Заметим, что кривая, отвечающая значению  $z = 0,5$ , содержит удвоенное количество скачков, что обусловлено поочередным приходом в данную точку отраженной волны как от свободной границы, так и от жесткого основания. Наконец, рис. 4, б, 5, б показывают распределение скорости и давления по толщине слоя (при  $x = 0$ ) для нескольких моментов времени:

$$t = 0,9; 1,4; 4,2; 7,5; 10,3. \quad (5.4)$$

При этом головная волна претерпела, соответственно, ни одного, 1, 4, 7 и 10 отражений. Дробные значения времени выбраны для того, чтобы на рисунке не сливались скачки. Сплошной линией изображены волны, движущиеся от свободного края к основанию, пунктиром – в противоположном направлении.

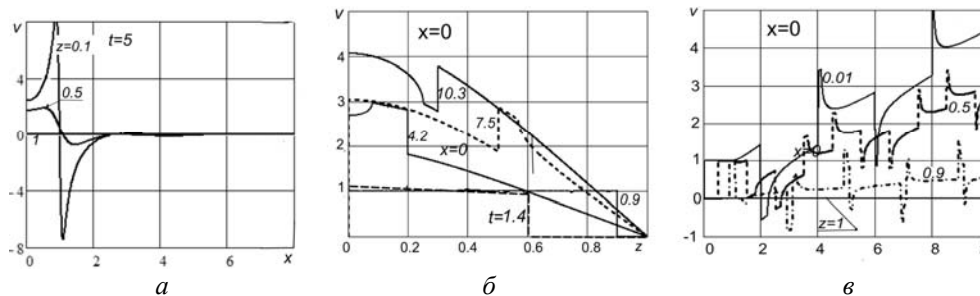


Рис. 4

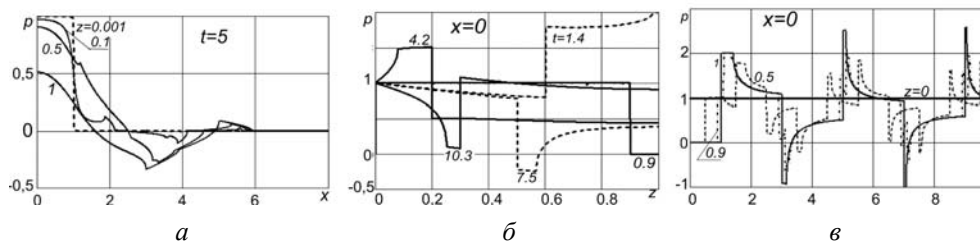


Рис. 5.

Ниже ограничимся демонстрацией только графиков давления. Рис. 6 построен для нагрузки, заданной квадратичной функцией – в виде (5.2). Эпюра заданного давления вдоль оси  $x$  изображена пунктирной кривой  $z = 0$  на рис. 6, а. Распределение давления вдоль оси  $x$  в момент времени  $t = 5$  на глубине  $z = 0,1; 0,5; 1,0$  показано на рис. 6, а. Распределение давления по оси  $z$  в фиксированные моменты времени (5.4) представлено на рис. 5, б. Рис. 5, в показывает развитие во времени давления при  $x = 0$  в трех точках слоя по глубине:  $z = 0; z = 0,5; z = 1,0$ .

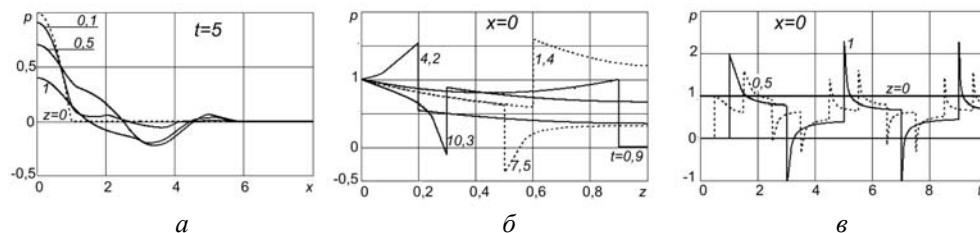


Рис. 6.

Рис. 7 иллюстрирует решение задачи о действии нагрузки, которая внезапно возникает и движется по свободной поверхности  $z = 0$  с постоянной скоростью  $k$ , а область действия нагрузки задается граничным значением  $x = kt$ . Вычисленное согласно формуле (4.4) давление представлено для двух значений скорости:  $k = 0,2$  (сплошная линия) и  $k = 2,0$  (пунктир). На рис. 2, а представлено развитие во времени давления в точках  $z = 0,5$  и  $z = 1,0$  в полуплоскости. Для слоя аналогичные графики представлены на рис. 2, в. Наконец, распределение давления по толщине слоя в фиксированные моменты времени  $t = 0,9, t = 7,5, t = 10,3$  изображено на рис. 2, б. Напомним, что формула (4.4) получена при  $x = 0$ , поэтому результаты, представленные на рис. 2, иллюстрируют процесс только на оси симметрии задач

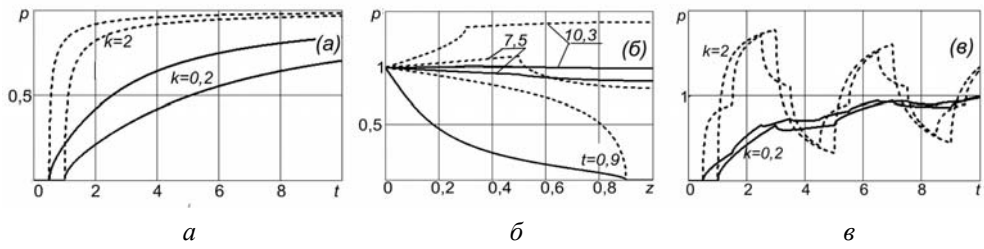


Рис. 7.

В отличие от предыдущего на рис. 8 представлены характеристики волнового процесса в случае, когда действующая нагрузка распространяется вдоль свободной поверхности с переменной скоростью, пропорциональной  $(t)^{-1/2}$ , так что граница области действия нагрузки определяется абсциссой  $x = \sqrt{kt}$  (см. формулу (4.5)). Давление вычислялось по формуле (4.6). При тех же значениях параметра  $k$ , что и на рис. 7 ( $k = 0,2$  – сплошная линия;  $k = 2$  – пунктир), построена зависимость давления от времени в точках  $z = 0,5$  и  $z = 1,0$  для полуплоскости (рис. 8, а) и слоя (рис. 8, в) и распределение давления вдоль оси  $z$ , в моменты времени  $t = 0,9$ ,  $t = 7,5$ ,  $t = 10,3$  (рис. 8, б). Скачкообразный характер кривых на рисунке обусловлен тем обстоятельством, что в начальный момент воздействия нагрузка распространяется вдоль оси  $x$  с бесконечной скоростью.

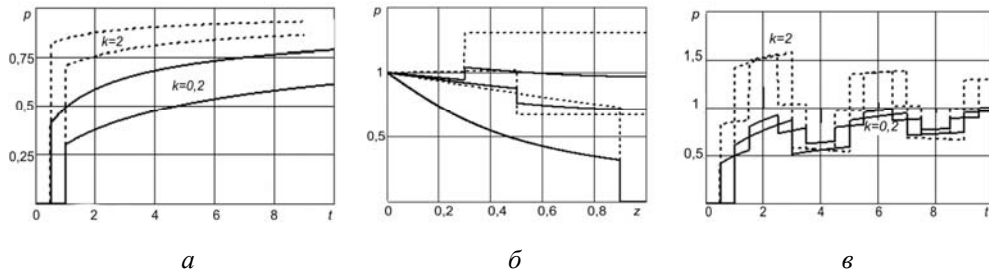


Рис. 8.

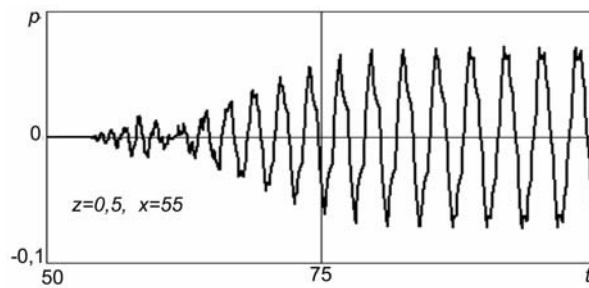


Рис. 9.

Рис. 9 демонстрирует возможность вычислений в удаленной зоне. Используются исходные соотношения (5.1), (5.3). Представлено давление как функция времени в точке с координатами  $x = 55$ ,  $z = 0,5$ . Данный подход позволяет учесть сколь угодно большое число отраженных волн, так как каждое последующее отражение аддитивно представлено в формуле (3.23) и его вычисление происходит независимо от вычисления предыдущих отражений.



### Заклучение.

В работе развит аналитический подход, который позволил получить точное замкнутое решение плоской нестационарной гидроакустической задачи для мелкой воды – слоя идеальной сжимаемой жидкости, ограниченного свободной поверхностью и жестким дном. В качестве действующей нагрузки рассматривается нестационарное давление, которое приложено на фиксированном либо расширяющемся со временем с постоянной или переменной скоростью участке свободной поверхности. Предложенный подход позволяет точно восстановить сложную картину нестационарного волнового поля, содержащего волны, многократно отраженные от границ. Приведенные числовые результаты свидетельствуют о возможности использования данного подхода для вычислений как в ближней, так и в дальней зоне. В данной работе все вычисления были выполнены в предположении зависимости действующей нагрузки от времени в виде единичной функции Хевисайда и ее однородного распределения по области приложения. Однако, данный подход позволяет, используя полученные результаты, произвести соответствующие вычисления для нестационарной нагрузки, зависимость от времени и от линейной координаты которой будет иметь достаточно общий вид. Полученные результаты могут быть полезны также и для апробации с их помощью разнообразных приближенных и численных подходов, которые в настоящее время интенсивно развиваются.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано аналітичний розв'язок плоскої задачі про дію нестационарного навантаження на поверхню шару стисливої рідини. Формулюється відповідна лінійна задача гідроакустики. Застосовуються інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є. Інверсія інтегральних перетворень і випадку фіксованої області дії навантаження виконана за допомогою табличних співвідношень та теорем про згортку. В результаті вирази для тиску і швидкості в довільній точці шару одержано в замкнутій формі. Розв'язок подано у вигляді суми,  $m$ -й член якої представляє  $m$ -у відбиту хвилю. Утримання в розв'язку скінченної кількості членів дає точний розв'язок задачі на заданому інтервалі часу з врахуванням відповідного числа відбитих хвиль. Виконані обчислення представляють характер розвитку тиску в часі та за просторовими координатами.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований в 2-х томах. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, ГИФМЛ. – 1969. – 344 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
3. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. – М: Наука, 1989. – 416 с.
4. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. – NY: Elsevier, 1973. – 425p.
5. Bakker M.C. M., Kooij B.J., Verweij M.D. A knife-edge load traveling on the surface of an elastic half-space // Wave Motion. – 2012. – 49. – P. 165 – 180.
6. Basu U., Chopra A.K. Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains // Intern. Journ. for Numer. Methods in Engr. – 2004. – 59. – P. 1039 – 1074.
7. Basu U. Perfectly Matched Layers for Acoustic and Elastic Waves. – Research report for the Dam Safety Research Program U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation (Livermore Software Technology Corp., Livermore, California). – 2008. – 114p.
8. Bedford A., Drumheller D.S. Introduction to Elastic Wave Propagation. 2nd edition. – Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd. – 1994. – 374 p.
9. Bonomo A., Isakson M., Chotiros N. Acoustic scattering from a sand layer and rock substrate with rough interfaces using the finite element method // J. Acoust. Soc. Am. – 2014. – 135. <http://doi.org/10.1121/1.4877555>.
10. Breese L.F., Hutchins D.A. Transient generation of elastic waves in solids by a disk-shaped normal force source // J. Acoust. Soc. Am. – 1989. – 86 (2). – P. 810 – 817.
11. Cagniard L. Reflection and Refraction of Progressive Waves. – NY: McGraw Hill. – 1962.
12. De A., Roy A. Transient response of an elastic half space to normal pressure acting over a circular area on an inclined plane // J. Eng. Math. – 2012. – 74. – P. 119 – 141.
13. De Hoop A.T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // Appl. Sci. Res. – 1960. – B. 8. – P. 349 – 356.
14. De Hoop A.T. The moving-load problem in soil dynamics – the vertical displacement approximation // Wave Motion. – 2002. – 36. – P. 335 – 346.

15. Ewing W. M., Jardetsky W.S., Press F. Elastic Waves in Layered Media. – NY: McGraw-Hill, 1957. – 380 p.
16. Isakson M., Goldsberry B., Chotiros N. A three-dimensional, longitudinally invariant finite element model for acoustic propagation in shallow water waveguides // J. Acoust. Soc. Am. – 2014. – **136**. – EL206. [Http://Doi.Org/10.1121/1.4890195](http://doi.org/10.1121/1.4890195)
17. Kubenko V.D. On a non-stationary load on the surface of a semiplane with mixed boundary conditions // ZAMM. – 2015. – **95**. – P. 1448 – 1460.
18. Kubenko V.D. Non-stationary stress state of an elastic layer at the mixed boundary conditions // ZAMM. – 2016. – **96**. – P. 1442 – 1456.
19. Kubenko V.D. Nonsteady Problem for an Elastic Half-Plane with Mixed Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 2. – P. 105 – 118.
20. Kubenko V.D. Nonstationary Deformation of an Elastic Layer with Mixed Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 6. – P. 563 – 580.
21. Kubenko V.D. Analytical solution to a non-stationary load on an infinite strip of compressible liquid // Archive of Appl. Mech. – 2018. – **88**. – N 7. – P.1163 – 1173.
22. Kubenko V.D., Marchenko T.A. Indentation of a Rigid Blunt Indenter into an Elastic Layer: Plane Problem // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 3. – P. 286 – 295.
23. Kubenko V. D., Yanchevskii I.V. Nonstationary Load on the Surface of an Elastic Half-Strip // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 303 – 310.
24. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philos. Trans. R. Soc. Ser. A. – 1904. – **203**. – P. 1 – 42.
25. Laturelle F.G. Finite element analysis of wave propagation in an elastic half-space under step loading // Comput. and Struct. – 1989. – **32**. – P. 721 – 735.
26. Laturelle F.G. The stresses produced in an elastic half-space by a normal step loading over a circular area: analytical and numerical results // Wave Motion. – 1990. – **12**. – P. 107 – 127.
27. Lefeuvre-Mesgouez G., Mesgouez A., Chiavassa G., Lombard B. Semianalytical and numerical methods for computing transient waves in 2D acoustic poroelastic stratified media // Wave Motion. – 2012. – **49**. – P. 667 – 680.
28. Meish V.F., Meish Yu.A., Mel'nichenko A.I. Propagation of Cylindrical and Spherical Waves in Two-Layer Soil Media // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 552 – 558.
29. Miklowitz J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides. – NY: North-Holl. Publ. Comp., 1978. – 618 p.
30. Pekeris C.L. The seismic surface pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1955. – **41**. – P. 469 – 480.
31. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Inverse Laplace Transforms. Integrals and Series. V.5. – NY: Gordon and Breach, 1992. – 596 p.
32. Roy A., De A. Exact solution to surface displacement associated with sources distributed on an inclined plane // Internat. Journ. of Engn. Sci. and Techn. – 2011. – **2**. – P. 137 – 145.
33. Stovas A., Roganov Y. Acoustic Waves in Layered Media – From Theory to Seismic Applications. In "Waves in Fluids and Solids," Prof. Ruben Pico Vila (Ed.), InTech. – 2011. – 54 p. [www.interchopen.com](http://www.interchopen.com). DOI: 10.5772/19808.
34. Verruijt A. An Introduction to Soil Dynamics. – NY: Springer, 2010. – 434 p.
35. Yanchevskii I.V. Nonstationary Vibrations of Electroelastic Cylindrical Shell in Acoustic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 4. – P. 431 – 442.

Поступила 22.05.2018

Утверждена в печать 04.06.2019