В . Д . К у б е н к о

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua

Abstract. An approach is developed to determine the wave process's characteristics in the filled with a viscous compressible liquid cylindrical cavity under excitation by the vibrating spherical body that is placed on the axis of cavity. A solution of this problem is reduced to the infinite system of algebraic equations.

Keywords: viscous liquid, cylindrical cavity, spherical oscillator.

Введение.

При изучении динамического поведения твердых или газовых включений в жидкости, как правило, рассматривается движение отдельной частицы или их совокупности в безграничной среде. Малоизученным и актуальным, однако, является изучение особенностей поведения частиц в ограниченном объеме жидкости. Как показали некоторые исследования [10, 11], даже в бесконечно длинной заполненной идеальной жидкостью цилиндрической полости, содержащей сферическое тело, имеют место аномальные явления, такие, что при определенных частотах внешнего возбуждения может произойти рост амплитуды колебаний на порядки и вследствие этого существенное изменение радиационных сил, обусловливающих движение частицы в жидкости [12]. Можно ожидать, что при учете вязкости жидкости указанные свойства будут ощутимо корректироваться, и такие исследования дадут результаты, более реалистичные. Отметим, что основы теории динамических (волновых) процессов в вязкой сжимаемой жидкости даны в монографии [2]; обзор последних результатов исследований распространения волн малой амплитуды в идеальной и вязкой жидкости с включениями выполнен в публикации [8]. Вопросы дисперсии в аналогичных системах обсуждаются в публикациях [5 – 7].

В данной работе предлагается подход к определению характеристик волнового поля в вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей цилиндрическую полость, в присутствии сферического тела, которое является источником динамических периодических возмущений в рассматриваемой системе. В осесимметричном случае задача сводится к определению двух волновых потенциалов при соответствующих граничных условиях на поверхности жесткой полости и излучающего тела. Решение задачи строится методом разделения переменных в виде суперпозиции сферического и цилиндрического решений. Удовлетворение граничных условий на сферической и цилиндрической поверхностях производится при помощи соответствующих переразложений цилиндрического и сферического потенциалов из одной координатной системы в другую. В результате задача сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, коэффициенты которой содержат несобственные интегралы. Решение такой системы позволит полностью определить волновые потенциалы и с их помощью вычислить поля напряжений (давления) и скоростей в жидкости.

§1. Постановка задачи.

Рассматривается бесконечно длинная круговая цилиндрическая полость радиуса ρ_0, заполненная вязкой сжимаемой жидкостью. В жидкости находится сферическое тело радиуса r_0, центр которого расположен на оси полости. На поверхности тела задано осесимметричное давление, периодически изменяющееся во времени с частотой ω. Требуется определить поля напряжений и скоростей в жидкости в зависимости от соотношения радиусов тела и полости, вязкости жидкости и частоты возбуждения. Речь будет идти о решении задачи дифракции излучаемых телом акустических волн в рамках линеаризованной теории вязкой сжимаемой жидкости относительно малых возмущений состояния равновесия, которое предполагается известным.

Введем в рассматриваемой системе цилиндрические $O\rho z$ и сферические $Or\theta$ координаты так, что ось z совпадает с осью полости, а общее начало координат O помещено в центр тела – см. рис. 1.

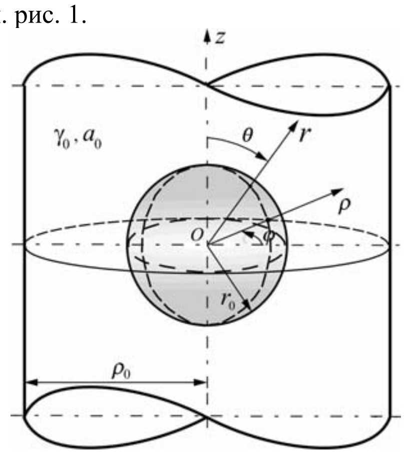

Рис. 1

Выпишем уравнения линеаризованной теории вязкой сжимаемой жидкости, описывающие рассматриваемый процесс [2]. Скалярный Φ и векторный $\vec{\Psi}$ потенциалы, через которые представлен вектор скоростей посредством соотношения

$$\vec{v} = \nabla\Phi + \nabla\times\vec{\Psi}, \tag{1.1}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\left[\left(1 + \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{a_0^2\gamma_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Phi = 0; \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu^*\,\Delta\right)\vec{\Psi} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь и далее γ_0, a_0 – плотность и скорость звука в жидкости для равновесного состояния; $\gamma, \vec{v}, p$ – возмущенные плотность, скорость и давление; ∇ – символический вектор; Δ – оператор Лапласа; λ^* и μ^* – динамический и второй коэффициент вязкости; $\nu^* = \mu^*/\gamma_0$ – кинематический коэффициент вязкости. Для векторного потенциала вводится представление через два скалярные потенциалы Ψ_j, $j = 1,2$ [4]. Линеаризованное определяющее уравнение имеет вид

$$\vec{\Psi} = \vec{\mathbf{e}}_z\Psi_1 + \nabla\times\vec{\mathbf{e}}_z\Psi_2, \tag{1.4}$$

где $\vec{\mathbf{e}}_z$ – орт оси z.

Давление p в вязкой жидкости в рамках используемого приближения линеаризованной теории представляется в виде

$$p=\gamma_0\left(\frac{\lambda^*+2\mu^*}{\gamma_0}\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi. \tag{1.5}$$

Предполагая построить искомое решение в виде суперпозиции цилиндрических и сферических волновых функций, запишем исходные уравнения, соответственно, в цилиндрических и сферических координатах. В *цилиндрических* координатах $O\rho z$ в осесимметричном случае имеем $\Psi_1(\rho,t)=0$ и тогда векторный потенциал $\vec{\Psi}$ определяется через составляющую Ψ_2 посредством формулы

$$\vec{\Psi}=\nabla\times\vec{\mathbf{e}}_z\Psi_2,$$

причем скалярная функция Ψ_2 удовлетворяет уравнению

$$\left(\nu^*\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi_2=0, \tag{1.6}$$

а оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.7}$$

Скалярный потенциал Φ удовлетворяет уравнению (1.2). Компоненты вектора скоростей и тензора напряжений в цилиндрических координатах определяются формулами

$$v_r=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\rho\partial z};\; v_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{\nu^*}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi_2;$$

$$\sigma_{rr}=2\mu^*\left[\left(\frac{\rho_0}{2\mu^*}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Phi-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\nu^*}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi_2\right]; \tag{1.8}$$

$$\sigma_{rz}=2\mu^*\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{2\nu^*}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi_2\right].$$

В *сферических* координатах $Or\theta$ в осесимметричном случае векторный потенциал $\vec{\Psi}$ имеет представление

$$\vec{\Psi}=\nabla\times\vec{\mathbf{e}}_r r\Psi_2. \tag{1.9}$$

Здесь $\vec{\mathbf{e}}_r$ – орт оси r. Скалярная функция Ψ_2 удовлетворяет уравнению (1.6), в котором оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{1.10}$$

скалярный потенциал Φ удовлетворяет уравнению (1.2). Компоненты вектора скорости и напряжения выражаются через введенные потенциалы посредством соотношений:

$$v_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\left(r\Delta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\Psi_2;\; v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta};$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu^* \left[\left(\frac{\rho_0}{2\mu^*} \frac{\partial}{\partial t} \Delta + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \Phi + \left(r \frac{\partial^3}{\partial r^3} + 3 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - r \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \Delta \right) \Psi_2 \right]; \tag{1.11}$$

$$\sigma_{r\vartheta} = 2\mu^* \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2} \Delta \right) \Psi_2 \right].$$

§2. Постановка граничной задачи и общее решение.

Будут использоваться безразмерные обозначения, в которых характерными единицами служат радиус цилиндрической полости ρ_0 и скорость звука a_0.

$$\overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0};\ \overline{r} = \frac{r}{\rho_0};\ \overline{z} = \frac{z}{\rho_0};\ \overline{t} = \frac{ta_0}{\rho_0};\ \overline{\omega} = \frac{\omega\rho_0}{a_0};\ \overline{v} = \frac{v}{a_0};\ \overline{p} = \frac{p}{\gamma_0 a_0^2};\ \overline{r_0} = \frac{r_0}{\rho_0}. \tag{2.1}$$

Ниже черта над обозначениями будет опущена.

Предполагается, что возмущение находящейся в цилиндрической полости жидкости происходит вследствие периодического во времени нормального напряжения, заданного на поверхности сферического тела, при отсутствии касательных напряжений. В этом случае граничные условия на поверхности сферы имеют вид

$$\sigma_{rr}\big|_{r=r_0} = p(\theta);\ \sigma_{r\theta}\big|_{r=r_0} = 0. \tag{2.2}$$

Случай задания касательных напряжений или скорости может быть рассмотрен аналогично. Условие прилипания на поверхности жесткой цилиндрической полости требует равенства нулю вектора скорости на ней

$$v_r\big|_{\rho=1} = 0;\ v_\theta\big|_{\rho=1} = 0. \tag{2.3}$$

Очевидно, что возмущение (2.2) обусловливает движение жидкости, которое, должно удовлетворять определенным условиям при $r \to \infty$. В свою очередь, возмущенные движения, обусловленные наличием цилиндрической полости, должны быть ограничены при $\rho \to 0$.

Так как формулируемая граничная задача (1.2), (1.6), (2.2), (2.3) относительно потенциалов Φ, Ψ_2 является линейной, а рассматриваемое ниже движение предполагается установившимся, воспользуется комплексным представлением искомых решений посредством введения временного множителя $e^{-i\omega t}$, где ω – круговая частота: $\Phi = \widetilde{\Phi} e^{-i\omega t}$; $\Psi = \widetilde{\Psi} e^{-i\omega t}$ Очевидно, в этом случае конечные результаты также будут комплексными величинами, причем их вещественная часть отвечает моменту времени $t = (2\pi/\omega) j$ (начало периода колебания), мнимая – моменту $t = (2\pi/\omega) j + (\pi/2\omega)$, $j = 0, 1, \ldots$ (спустя четверть периода).

Представим функции $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Psi}$, которые описывают состояние вязкой жидкости в рамках рассматриваемого приближения линеаризованной теории, в виде суперпозиции функций, каждая из которых представляет возмущения, обусловленные, соответственно, наличием сферической или цилиндрической границы

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}_{sph} + \widetilde{\Phi}_{cyl};\ \widetilde{\Psi} = \widetilde{\Psi}_{sph} + \widetilde{\Psi}_{cyl}. \tag{2.4}$$

Функция $\widetilde{\Phi}_{sph}$ определяется как решение уравнения (1.2). Для установившихся движений это уравнение имеет вид

$$\left(\Delta + \varkappa^2\right)\widetilde{\Phi} = 0. \tag{2.5}$$

В *сферических* координатах имеем решение уравнения (2.5), удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда [8] при $r \to \infty$

$$\widetilde{\Phi}_{sph}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n h_n(\varkappa r)P_n(\cos\theta);$$
$$\varkappa=\sqrt{\frac{1}{1-i\omega\left(\lambda^*+2\mu^*\right)\gamma_0^{-1}a_0^{-2}}}\frac{\omega}{a_0}\simeq\frac{\omega}{a_0}+i\frac{\omega^2\left(\lambda^*+2\mu^*\right)}{2a_0^3\gamma_0}. \tag{2.6}$$

Функция $\widetilde{\Phi}_{cyl}$ в *цилиндрических* координатах определяется как общее решение уравнения (2.5), ограниченное при $\rho\to 0$

$$\widetilde{\Phi}_{cyl}(\rho,z)=\int_{-\infty}^{\infty}B(\xi)\ J_0\left(\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}\right)e^{i\xi z}d\xi. \tag{2.7}$$

Аналогично функции $\widetilde{\Psi}_{sph}$, $\widetilde{\Psi}_{cyl}$, служащие общим решением уравнения (1.6) при установившихся движениях, соответственно, в сферических и цилиндрических координатах, можно записать в следующем виде:

$$\widetilde{\Psi}_{sph}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\ \ h_n(\zeta r)\ \ P_n(\cos\theta)\ e^{-i\omega t};\ \ \zeta=\sqrt{\frac{i\omega}{\nu^*}}=\sqrt{\frac{\omega}{2\nu^*}}(1+i); \tag{2.8}$$

$$\widetilde{\Psi}_{cyl}=\int_{-\infty}^{\infty}D(\xi)\ J_0\left(\sqrt{\zeta^2-\xi^2}\,\rho\right)e^{i\xi z}d\xi. \tag{2.9}$$

В формулах (2.6) – (2.9) $J_0(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя первого рода нулевого индекса; $h_n(x)$ – сферическая функция Ханкеля первого рода индекса *n*; $P_n(\cos\theta)$ – полином Лежандра [1]; A_n, C_n – неизвестные постоянные; $B(\xi),D(\xi)$ – неизвестные плотности.

Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности сферического тела и на поверхности цилиндрической полости, необходимо записать выражения для потенциальных функций $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Psi}$ как в сферических, так и в цилиндрических координатах. С этой целью воспользуемся известными соотношениями [3, 9]

$$h_n(xr)P_n(\cos\theta)=\frac{i^{-n}}{2x}\int_{-\infty}^{\infty}P_n\left(\frac{\xi}{x}\right)H_0\left(\sqrt{x^2-\xi^2}\,\rho\right)e^{i\xi z}d\xi; \tag{2.10}$$

$$e^{i\xi z}J_0\left(\sqrt{x^2-\xi^2}\,\rho\right)=\sum_{n=0}^{\infty}i^n(2n+1)P_n\left(\frac{\xi}{x}\right)j_n(xr)P_n(\cos\theta). \tag{2.11}$$

Здесь $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода индекса 0, $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя индекса *n*.

Используя соотношения (2.6) – (2.11), запишем полные потенциальные функции $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ в сферических и в цилиндрических координатах

$$\widetilde{\Phi}(\rho,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\varkappa,\xi)H_0\left(\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}\,\rho\right)+B(\xi)J_0\left(\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}\,\rho\right)\right]e^{i\xi z}d\xi;$$
$$\widetilde{\Phi}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n h_n(\varkappa r)+B_n j_n(\varkappa r)\right]P_n(\cos\theta); \tag{2.12}$$

$$A(\varkappa,\xi)=\frac{1}{2\varkappa}\sum_{n=0}^{\infty}A_n i^{-n}P_n\left(\frac{\xi}{\varkappa}\right);\ \ B_n(\varkappa)=i^n(2n+1)\int_{-\infty}^{\infty}B(\xi)P_n\left(\frac{\xi}{\varkappa}\right)d\xi; \tag{2.13}$$

$$\widetilde{\Psi}(\rho,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[C(\zeta,\xi)H_0\Big(\sqrt{\zeta^2-\xi^2}\rho\Big)+D(\xi)J_0\Big(\sqrt{\zeta^2-\xi^2}\rho\Big)\Big]e^{i\xi z}d\xi;$$

$$\widetilde{\Psi}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\big[C_nh_n(\zeta r)+D_nj_n(\zeta r)\big]P_n(\cos\theta); \tag{2.14}$$

$$C(\zeta,\xi)=\frac{1}{2\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}C_ni^{-n}P_n\left(\frac{\xi}{\zeta}\right);\ D_n(\zeta)=i^n(2n+1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}D(\xi)P_n\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)d\xi. \tag{2.15}$$

Представления (2.12) – (2.15) дают возможность перейти к удовлетворению граничным условиям (2.2), (2.3).

§3. Решение граничной задачи.

В рассматриваемом осесимметричном случае движений функция $p(\theta)$ в граничном условии (2.2) может быть представлена в виде ряда по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$.

$$p(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nP_n(\cos\theta). \tag{3.1}$$

Выражения для напряжений и скорости через введенные потенциальные функции имеют следующий вид.

В *сферических* координатах**:**

$$\sigma_{rr}=2\mu^*\sum_{n=0}^{\infty}\{A_na_{rrn}+B_nb_{rrn}+C_nc_{r\theta n}+D_nd_{r\theta n}\}P_n(\cos\theta);$$

$$\sigma_{r\theta}=2\mu^*\sum_{n=0}^{\infty}\{A_na_{r\theta n}+B_nb_{r\theta n}+C_nc_{r\theta n}+D_nd_{r\theta n}\}P_n^1(\cos\theta);$$

$$v_r=\sum_{n=0}^{\infty}\{A_na_{rn}+B_nb_{rn}+C_nc_{rn}+D_nd_{rn}\}P_n(\cos\theta); \tag{3.2}$$

$$v_\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\{A_na_{\theta n}+B_nb_{\theta n}+C_nc_{\theta n}+D_nd_{\theta n}\}P_n^1(\cos\theta), \tag{3.3}$$

где обозначено

$$a_{rn}=\varkappa\left(-\frac{n+1}{r}h_n(\varkappa r)+\varkappa h_{n-1}(ar)\right);\ b_{rn}=\varkappa\left(-\frac{n+1}{r}j_n(\varkappa r)+\varkappa\ j_{n-1}(ar)\right);$$

$$c_{rn}=\left(r\frac{i\omega}{\nu^*}+\frac{n+n^2-\zeta^2r^2}{r^2}\right)h_n(\zeta r);\ d_{rn}=\left(r\frac{i\omega}{\nu^*}+\frac{n+n^2-\zeta^2r^2}{r^2}\right)j_n(\zeta r);$$

$$a_{\theta n}=\frac{1}{r}\varkappa h_n(\varkappa r);\ b_{\theta n}=\frac{1}{r}\varkappa\ j_n(\varkappa r);$$

$$c_{\theta n}=-\frac{1}{r}h_n(\zeta r)+\zeta h_{n-1}(\zeta r);\ d_{\theta n}=-\frac{1}{r}j_n(\zeta r)+\zeta\, j_{n-1}(\zeta r);$$

$$a_{rrn}=\left(n^2+3n+2-\frac{\varkappa^2r^2}{2}\right)\frac{1}{r}h_n(\varkappa r)-2\varkappa h_{n-1}(\varkappa r);$$

$$b_{rrn}=\left(n^2+3n+2-\frac{\varkappa^2r^2}{2}\right)\frac{1}{r}j_n(\varkappa r)-2\varkappa j_{n-1}(\varkappa r);$$

$$c_{rrn}=n(n+1)\left(-\frac{n+2}{r}h_n(\zeta r)+\zeta h_{n-1}(\zeta r)\right);$$

$$d_{rrn}=n(n+1)\left(-\frac{n+2}{r}j_n(\zeta r)+\zeta j_{n-1}(\zeta r)\right);$$

$$a_{r\theta n}=-\frac{n+2}{r}h_n(\varkappa r)+\varkappa h_{n-1}(\varkappa r);\quad b_{r\theta n}=-\frac{n+2}{r}j_n(\varkappa r)+\varkappa j_{n-1}(\varkappa r);$$

$$c_{r\theta n}=\left(n(n+2)-\frac{\zeta^2r^2}{2}\right)\frac{1}{r}h_n(\zeta r)-\zeta h_{n-1}(\zeta r);$$

$$d_{r\theta n}=\left(n(n+2)-\frac{\zeta^2r^2}{2}\right)\frac{1}{r}j_n(\zeta r)-\zeta j_{n-1}(\zeta r).$$

В *цилиндрических* координатах (ограничимся необходимыми выражениями для компонент вектора скорости)

$$v_\rho=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[A(\varkappa,\xi)a_\rho(\varkappa,\xi)+B(\xi)b_\rho(\varkappa,\xi)+C(\zeta,\xi)c_\rho(\zeta,\xi)+D(\xi)d_\rho(\zeta,\xi)]e^{i\xi z}d\xi;\quad (3.4)$$

$$v_z=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\varkappa,\xi)a_z(\varkappa,\xi)+B(\xi)b_z(\varkappa,\xi)+C(\zeta,\xi)c_z(\zeta,\xi)+D(\xi)d_z(\zeta,\xi)\right]e^{i\xi z}d\xi,\quad (3.5)$$

где

$$a_\rho(\varkappa,\xi)=-\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}H_1\left(\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}\rho\right);\quad b_\rho(\varkappa,\xi)=-\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}J_1\left(\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}\rho\right);$$

$$c_\rho(\zeta,\xi)=-i\xi H_1\left(\sqrt{\zeta^2-\xi^2}\rho\right);\quad d_\rho(\zeta,\xi)=-i\xi J_1\left(\sqrt{\zeta^2-\xi^2}\rho\right);$$

$$a_z(\varkappa,\xi)=i\xi H_0\left(\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}\rho\right);\quad b_z(\varkappa,\xi)=i\xi J_0\left(\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}\rho\right);$$

$$c_z(\zeta,\xi)=\left(-\xi^2+\frac{i\omega}{\nu^*}\right)H_0\left(\sqrt{\zeta^2-\xi^2}\rho\right);\quad d_z(\zeta,\xi)=\left(-\xi^2+\frac{i\omega}{\nu^*}\right)J_0\left(\sqrt{\zeta^2-\xi^2}\rho\right).$$

Перейдем к удовлетворению граничным условиям. На поверхности цилиндрической полости имеем условия прилипания (2.3), откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}[A(\varkappa,\xi)a_\rho^{(1)}(\varkappa,\xi)+B(\xi)b_\rho^{(1)}(\varkappa,\xi)+$$
$$+C(\zeta,\xi)c_\rho^{(1)}(\zeta,\xi)+D(\xi)d_\rho^{(1)}(\zeta,\xi)]e^{i\xi z}d\xi=0;\quad (3.6)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[A(\varkappa,\xi)a_z^{(1)}(\varkappa,\xi)+B(\xi)b_z^{(1)}(\varkappa,\xi)+C(\zeta,\xi)c_z^{(1)}(\zeta,\xi)+D(\xi)d_z^{(1)}(\zeta,\xi)\right]e^{i\xi z}d\xi=0.$$

Здесь введены обозначения $a_\rho^{(1)}=a_\rho\big|_{\rho=1}$, $b_\rho^{(1)}=b_\rho\big|_{\rho=1}$ и т. д. Из (3.6) вследствие единственности преобразования Фурье следуют соотношения

$$A(\varkappa,\xi)a_\rho^{(1)}(\varkappa,\xi)+B(\xi)b_\rho^{(1)}(\varkappa,\xi)+C(\zeta,\xi)c_\rho^{(1)}(\zeta,\xi)+D(\xi)d_\rho^{(1)}(\zeta,\xi)=0;$$
$$A(\varkappa,\xi)a_z^{(1)}(\varkappa,\xi)+B(\xi)b_z^{(1)}(\varkappa,\xi)+C(\zeta,\xi)c_z^{(1)}(\zeta,\xi)+D(\xi)d_z^{(1)}(\zeta,\xi)=0. \tag{3.7}$$

На поверхности сферического включения имеют место условия (2.2), откуда с учетом (3.1) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n a_{rrn}^{(0)}+B_n b_{rrn}^{(0)}+C_n c_{rrn}^{(0)}+D_n d_{rrn}^{(0)}\right\}P_n(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n P_n(\cos\theta);$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n a_{r\theta n}^{(0)}+B_n b_{r\theta n}^{(0)}+C_n c_{r\theta n}^{(0)}+D_n d_{r\theta n}^{(0)}\right\}P_n^1(\cos\theta)=0. \tag{3.8}$$

Здесь обозначено $a_{rrn}^{(0)}=a_{rrn}\big|_{r=r_0}$; $b_{rrn}^{(0)}=b_{rrn}\big|_{r=r_0}$ и т. д. Из (3.8) вследствие ортогональности полиномов Лежандра имеем

$$A_n a_{rrn}^{(0)}+B_n b_{rrn}^{(0)}+C_n c_{rrn}^{(0)}+D_n d_{rrn}^{(0)}=p_n;\; A_n a_{r\theta n}^{(0)}+B_n b_{r\theta n}^{(0)}+C_n c_{r\theta n}^{(0)}+D_n d_{r\theta n}^{(0)}=0. \tag{3.9}$$

Если соотношения (3.7) переписать в виде:

$$\begin{cases}B(\xi)b_\rho^{(1)}+D(\xi)d_\rho^{(1)}=-A(\varkappa,\xi)a_\rho^{(1)}-C(\zeta,\xi)c_\rho^{(1)};\\ B(\xi)b_z^{(1)}+D(\xi)d_z^{(1)}=-A(\varkappa,\xi)a_z^{(1)}-C(\zeta,\xi)c_z^{(1)},\end{cases} \tag{3.10}$$

то решение алгебраической системы уравнений (3.10) с использованием первой колонки соотношений (2.12), (2.14) позволяет получить представления плотностей $B(\xi),D(\xi)$ через коэффициенты A_n,C_n

$$B(\xi)=F_1(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}A_n i^{-n}P_n\left(\frac{\xi}{\varkappa}\right)+F_2(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}C_n i^{-n}P_n\left(\frac{\xi}{\zeta}\right);$$
$$D(\xi)=F_3(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}A_n i^{-n}P_n\left(\frac{\xi}{\varkappa}\right)+F_4(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}C_n i^{-n}P_n\left(\frac{\xi}{\zeta}\right). \tag{3.11}$$

Здесь введены обозначения:

$$F_1(\xi)=\frac{a_z^{(1)}d_\rho^{(1)}-a_\rho^{(1)}d_z^{(1)}}{2\varkappa\Pi};\; F_2(\xi)=\frac{c_z^{(1)}d_\rho^{(1)}-c_\rho^{(1)}d_z^{(1)}}{2\zeta\Pi};\; F_3(\xi)=\frac{a_\rho^{(1)}b_z^{(1)}-a_\rho^{(1)}d_z^{(1)}}{2\varkappa\Pi};$$
$$F_4(\xi)=\frac{c_\rho^{(1)}b_z^{(1)}-c_z^{(1)}b_\rho^{(1)}}{2\zeta\Pi};\; \Pi=b_\rho^{(1)}d_z^{(1)}-d_\rho^{(1)}b_z^{(1)}. \tag{3.12}$$

Теперь из (3.9), используя представления (3.11) и вторые колонки соотношений (2.12), (2.14), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_n, C_n

$$a_{rn}^{(0)}A_n+c_{rn}^{(0)}C_n+(2n+1)\sum_{m=0}^{\infty}i^{n-m}Q_{nm}^{(1)}A_m+(2n+1)\sum_{m=0}^{\infty}i^{n-m}Q_{nm}^{(2)}C_m=V_n;$$
$$a_{\theta n}^{(0)}A_n+c_{\theta n}^{(0)}C_n+(2n+1)\sum_{m=0}^{\infty}i^{n-m}Q_{nm}^{(3)}A_m+(2n+1)\sum_{m=0}^{\infty}i^{n-m}Q_{nm}^{(4)}C_m=0$$
$$(n=0,\,1,\,2\ldots). \tag{3.13}$$

Если обозначить

$$a_{rn}^{(0)}A_n+c_{rn}^{(0)}C_n=X_n^{(1)};\; a_{\theta n}^{(0)}A_n+c_{\theta n}^{(0)}C_n=X_n^{(2)}$$

систему (3.13) можно записать в каноническом виде

$$X_n^{(1)}+(2n+1)\sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m}\frac{1}{D_m}\Big[\Big(Q_{nm}^{(1)}c_{\theta m}^{(0)}+Q_{nm}^{(2)}a_{rm}^{(0)}\Big)X_m^{(1)}-\Big(Q_{nm}^{(1)}X_m^{(2)}c_{rm}^{(0)}+Q_{nm}^{(2)}a_{rm}^{(0)}\Big)X_m^{(2)}\Big]=V_0;$$

$$X_n^{(2)}+(2n+1)\sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m}\frac{1}{D_m}\Big[\Big(Q_{nm}^{(3)}c_{\theta m}^{(0)}+Q_{nm}^{(4)}a_{rm}^{(0)}\Big)X_m^{(1)}-\Big(Q_{nm}^{(3)}X_m^{(2)}c_{rm}^{(0)}+Q_{nm}^{(4)}a_{rm}^{(0)}\Big)X_m^{(2)}\Big]=0 \quad (3.14)$$

$$(n=0,1,2\,\ldots\,).$$

Здесь обозначено:

$$D_m=a_{rm}^{(0)}c_{\theta m}^{(0)}-a_{\theta m}^{(0)}c_{rm}^{(0)};\; Q_{nm}^{(1)}=b_{rn}^{(0)}q_{nm}^{(1)}+d_{rn}^{(0)}q_{nm}^{(2)};\; Q_{nm}^{(2)}=b_{rn}^{(0)}q_{nm}^{(3)}+d_{rn}^{(0)}q_{nm}^{(4)};$$

$$Q_{nm}^{(3)}=b_{\theta n}^{(0)}q_{nm}^{(1)}+d_{\theta n}^{(0)}q_{nm}^{(2)};\; Q_{nm}^{(4)}=b_{\theta n}^{(0)}q_{nm}^{(3)}+d_{\theta n}^{(0)}q_{nm}^{(4)};$$

$$q_{nm}^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\xi)P_m\left(\frac{\xi}{\varkappa}\right)P_n\left(\frac{\xi}{\varkappa}\right)d\xi;\; q_{nm}^{(2)}=\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\xi)P_n\left(\frac{\xi}{\varkappa}\right)P_m\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)d\xi\;;$$

$$q_{nm}^{(3)}=\int_{-\infty}^{\infty}F_3(\xi)P_m\left(\frac{\xi}{\varkappa}\right)P_n\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)d\xi;\; q_{nm}^{(4)}=\int_{-\infty}^{\infty}F_4(\xi)P_n\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)P_m\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)d\xi.$$

В уравнениях (3.14) коэффициенты $Q_{nm}^{(k)}$ таковы, что при нечетном $n+m$ имеет место равенство

$$q_{nm}^{(k)}=0;\; Q_{nm}^{(k)}=0\; (k=1,\ldots,4).$$

Можно показать, что определитель системы (3.14) принадлежит к определителям нормального типа, и она может быть приближенно решена методом усечения.

После того, как решение системы (3.14) будет найдено и определены также коэффициенты B_n, D_n при помощи формул (3.9), все характеристики процесса могут быть вычислены. Например, давление p в жидкости в рамках линеаризованной теории определяется согласно формулы (1.5) в следующем виде:

$$p=\left(-\frac{\lambda^*+2\mu^*}{\gamma_0 a_0^2}\varkappa^2+i\omega\right)\sum_{n=0}^{\infty}\big[A_n h_n(\varkappa r)+B_n j_n(\varkappa r)\big]P_n(\cos\theta).$$

Давление, полученное с точностью до слагаемых второго порядка [2], имеет вид

$$p=\gamma_0\left(-\frac{\lambda^*+2\mu^*}{\gamma_0}\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi+\frac{\gamma_0}{2a_0^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\gamma_0(\nabla\Phi)^2-\frac{\lambda^*+2\mu^*}{a_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Delta\Phi. \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) используется в случае, если целью исследования является изучение динамики твердых тел в сжимаемой вязкой жидкости под действием радиационных сил.

Р Е З Ю М Е . Розвинено підхід до визначення хвильових процесів в заповненій в’язкою рідиною циліндричній порожнині при збудженні вібруючим сферичним тілом, розташованим на осі порожнини. Розв’язок задачі зведено до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М: Наука, 1979. – 830 с.
2. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К. – 1998. – 348 с.
3. *Ерофеенко В. Т.* Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1972. – № 4. – С. 42 – 46.

4. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т.2. – М: Иностр. литература, 1960. – 898 с.
5. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Liquid Viscosity on Dispersion of Quasi-Lamb Waves in an Elastic Layer – Liquid Layer System // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 4. – P. 361 – 367.
6. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Prestresses on the Dispersion of Lamb Waves in a System Containing of a Viscous Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 3. – P. 249 – 258.
7. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Prestresses on Quasi-Lamb Waves in a System Containing of a Compressible Viscous Liquid Half-Space and an Elasic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 6. – P. 617 – 627.
8. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Particles in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
9. *Kubenko V.D*. Diffraction of Steady Waves at a Set of Spherical and Cylindrical Bodies in an Acoustic Medium // Int. Appl, Mech. – 1987. – **23**, N 6, – P. 605 – 610.
10. *Kubenko V.D., Dzyuba V.V*. Diffraction of a Plane Acoustic Wave by a Rigid Sphere in a Cylindrical Cavity: an Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 424 – 432.
11. *Kubenko V.D., Dzyuba V.V*. Resonant Phenomena in Axisymmetric Hydroelastic Systems from Cylindrical Shell with Inclusion under Presence of Internal Compressible Liquid and External Elastic Medium // J. of Fluids and Structures. – 2006. – **22**, Iss. 4. – P. 577 – 594.
12. *Zhuk A. P., Kubenko V.D., Zhuk Y. A.* Acoustic Radiation Force on a Spherical Particle in a Fluid - Filled Cavity // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – N 132. – P. 2189 – 2197.

Поступила 15.03.2018 Утверждена в печать 05.03.2019