

А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.Н. Яремченко

**О ВЛИЯНИИ ОРТОТРОПИИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: sp4soft@gmail.com*

**Abstract.** A numerical-analytical approach is presented. It is based on the consistent application of spline-collocation and discrete orthogonalization methods. This permits to solve the problems on the stress-strain state of orthotropic quadrangular plates of complicate shapes. The shape of quadrangular plates is mapped into a square unit area. On an example of plates of the trapezium shape, an effect of orthotropic properties of material on character of the stress-strain state is shown. An influence of the mutual orientation of the plate sides and orthotropy axes on deformation of the quadrangular plate is studied. An analysis of influence of the plate mechanical and geometrical parameters on convergence of the obtained numerical results of calculations is carried out.

**Key words:** stress-strain state; quadrangular plates; Timoshenko – Mindlin’s refined model; numeric-analytical approach; orthotropic materials.

**Введение.**

Конструктивные элементы, имеющие форму пластин, находят широкое применение в различных областях современного машиностроения, приборостроения, и строительства. Все более широкое применение композитных материалов и разнообразие используемых форм пластин определяет необходимость исследования напряженно-деформируемого состояния (НДС) четырехугольных ортотропных пластин.

Разработка методов и подходов для практического анализа НДС пластин различной формы была начата еще в прошлом столетии. В результате многие задачи для пластин с относительно простой формой (круг, квадрат и прямоугольник) получили свои аналитические или полуаналитические решения, в том числе с использованием сплайн-функций и разложений в ряды [5, 21]. Ряд численных методов был предложен для анализа пластин в форме параллелограмма при равномерной нагрузке [3, 6, 18, 19, 26] и различных краевых условиях.

Специальные численные подходы, учитывающие наличие симметрии или возможность сведения сложной области к более простой за счет параметризации, были разработаны в [16, 24]. Некоторые вопросы использования преобразования координат для статического анализа пластин сложной формы также рассмотрены в [17, 22, 23]. Тот же принцип был применен и в [25], где метод Реле – Ритца использован для анализа ромбовидных пластин с симметричными граничными условиями. В [1] рассмотрен анализ НДС пластин методом  $R$ -функций. В то же время, количество работ в данной области остается ограниченным, а материал во многих из них принимается изотропным.

Схемы анализа на основе метода конечных элементов, который продолжает быть широко используемым инструментом для численного анализа непрямоугольных пластин, реализованы во многих специализированных программных пакетах. Несмотря

на то, что готовые инструменты дают возможность проводить численный анализ объектов сложной формы, они имеют высокие требования к вычислительным ресурсам и оставляют много открытых вопросов относительно адекватности моделей и выбора их параметров (типа конечного элемента, параметры разбиения области и пр.)

В настоящей статье представлен подход к решению задач о НДС анизотропных четырехугольных пластин различной формы [9 – 12]. Произвольная область четырехугольных пластин отображается в единичную квадратную область. Механико-математическая модель построена на основе уточненной теории пластин Тимошенко – Миндлина [20]. Сформулированные краевые задачи решаются на основе численно-аналитического подхода, основанного на последовательном применении методов сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации [8].

### 1. Постановка задачи и исходные соотношения.

Рассмотрим задачу о НДС прямоугольной ортотропной пластины в декартовой системе координат  $x_1, x_2$  с постоянной толщиной  $h$  под воздействием нормальной нагрузки  $q(x_1, x_2)$ . В соответствии с теорией пластин Тимошенко – Миндлина, предполагаем, что нормаль к элементу срединной поверхности остается прямой и сохраняет свою длину после деформации. В то же время она разворачивается на некоторые углы по отношению к координатным осям. Также необходимо учитывать усилия, обусловленные изгибом элемента координатной поверхности, и поворот его нормали. С учетом этих гипотез, перемещения  $u_1, u_2$  и  $u_3$  могут быть представлены в таком виде:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2); \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2); \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Это приводит к уравнениям равновесия такого вида:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = 0; \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = 0; \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_2 = 0, \quad (1)$$

где  $Q_1, Q_2$  – усилия среза,  $M_1, M_2, M_{12}$  – изгибающие и крутящие моменты. В случае ортотропной пластины, когда оси ортотропии направлены вдоль координатных осей, соотношения упругости могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2; \quad M_2 = D_{22}\kappa_2 + D_{12}\kappa_1; \\ M_{12} &= 2D_{66}\kappa_{12}; \quad Q_1 = K_1\gamma_1; \quad Q_2 = K_2\gamma_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Деформации изгиба координатной поверхности  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$  могут быть определены через углы поворота нормали без учета поперечного сдвига  $\theta_1, \theta_2$ , углы поворота нормали, вызванные поперечным сдвигом  $\gamma_1, \gamma_2$ , и полные углы поворота прямолинейного элемента  $\psi_1, \psi_2$  так:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}; \quad \kappa_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}; \quad 2\kappa_{12} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}; \\ \gamma_1 &= \psi_1 - \theta_1; \quad \gamma_2 = \psi_2 - \theta_2; \quad -\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1}; \quad -\theta_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая за  $E_i, G_{ij}, \nu_i$  модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона, коэффициенты жесткости  $K_i, D_{ij}$  могут быть определены формулами

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{12} = \nu_2 D_{11}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad (4)$$

$$D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12}; \quad K_1 = \frac{5}{6}hG_{13}; \quad K_2 = \frac{5}{6}hG_{23}.$$

Объединяя соотношения с (1) по (4), получим разрешающую систему уравнений в координатах  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned} K_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + K_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} &= -q; \\ D_{11} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 x_2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 x_2} - K_1 \psi_1 - K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} &= 0; \\ D_{22} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 x_2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 x_2} - K_2 \psi_2 - K_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия на сторонах  $x_1 = \text{const}$  с жестко защемленными краями имеют вид

$$w = 0; \quad \psi_1 = 0; \quad \psi_2 = 0; \quad (6)$$

с шарнирно закрепленными краями –

$$w = 0; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = 0; \quad \psi_2 = 0; \quad (7)$$

со свободными краями –

$$Q_1 = \psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0; \quad M_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = 0; \quad M_{12} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = 0. \quad (8)$$

На сторонах  $x_2 = \text{const}$  граничные условия записываются аналогично.

Объединяя систему (5) с рассматриваемыми граничными условиями (6), (7) или (8), получаем двумерную краевую задачу в частных производных относительно прогиба  $w(x_1, x_2)$  и углов поворота  $\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)$ .

## 2. Основные положения подхода.

**2.1. Геометрическое преобразование.** Для случая произвольной четырехугольной пластины возникают определенные трудности с заданием граничных условий на сторонах, которые непараллельны координатным осям. Для их устранения может быть использован подход, предложенный в [9 – 12]. В этом случае исходная область в виде выпуклого четырехугольника в координатах  $x_1, x_2$  отображается в единичный квадрат  $[0...1, 0...1]$ , который задан в новых координатах  $\xi_1, \xi_2$ , что позволяет перейти к рассмотрению граничных условий на сторонах  $\xi_i = \text{const}$ . Разрешающая система уравнений (5) также изменяется соответствующим образом.

Запишем систему (5) в матричном виде следующим образом:

$$S \cdot \bar{f} = \bar{q}, \quad (9)$$

где  $S$  – матрица коэффициентов, вектор  $f$  имеет следующий вид:

$$\bar{f} = \left\{ \psi_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 x_2}, \psi_2, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 x_2} \right\}^T; \quad \bar{q} = \{-q, 0, 0\}^T,$$

а вектор  $q$  содержит правые части системы (5). Используя преобразование координат

$$\bar{x} = T \cdot \bar{\xi},$$

где  $\bar{x}$  – вектор исходных координат;  $\bar{\xi}$  – вектор с компонентами  $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2\}$ , а  $T$  – матрица перехода, система (5) может быть записана в новых координатах  $\xi_1, \xi_2$  аналогичным образом:

$$\tilde{S} \cdot \tilde{f} = \tilde{q}. \quad (10)$$

Здесь принимаем, что в  $\xi_1, \xi_2$  вектор  $\tilde{q}$  является аналогом для  $\bar{q}$ , тогда как вектор  $\tilde{f}$  будет иметь следующий вид:

$$\tilde{f} = \left\{ \psi_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2}, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2}, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \xi_2}, \psi_2, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \xi_2} \right\}^T,$$

а матрица  $\tilde{S} = S \cdot P$ , где матрица  $P$  содержит коэффициенты перехода к новым координатам для производных неизвестных функций в  $\tilde{f}$ :

$$P \cdot \tilde{f} = \bar{f}.$$

В новых координатах  $\xi_1, \xi_2$  разрешающая система уравнений (10) имеет тот же вид, что и в (9), с той лишь разницей, что информация об исходной области теперь содержится в коэффициентах матрицы  $\tilde{S}$ . В сочетании с ранее выбранными краевыми условиями (6), (7) или (8), записанными в новой системе координат, система (10) представляет модифицированную двумерную краевую задачу.

**2.2. Методы решения.** Поскольку задача для системы (10) в координатах  $\xi_1, \xi_2$  сформулирована для квадратной области, для ее решения мы можем применить хорошо апробированные методы сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации. Как было детально показано в [14] для функции прогиба  $w(\xi_1, \xi_2)$  и углов  $\psi_1(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\psi_2(\xi_1, \xi_2)$  в соответствии с методом сплайн-коллокации решение должно быть представлено в виде

$$w(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=0}^N w_i(\xi_1) \varphi_i(\xi_2); \quad \psi_1(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\xi_1) \varphi_i(\xi_2); \quad \psi_2(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\xi_1) \varphi_{2i}(\xi_2),$$

где  $w_i(\xi_1), \psi_{1i}(\xi_1), \psi_{2i}(\xi_1)$  – неизвестные функции;  $\varphi_i(\xi_2), \varphi_{1i}(\xi_2), \varphi_{2i}(\xi_2)$  – линейные комбинации В-сплайнов третьей степени на равномерной сетке, изначально удовлетворяющие выбранным граничным условиям,  $i = 0 \dots N$ . Для увеличения точности аппроксимации использована известная схема с размещением точек коллокации парами через каждые два узла сетки [13].

Использование сплайн-аппроксимации в направлении оси  $\xi_2$  понижает размерность исходной двумерной задачи и позволяет вместо нее решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) более высокого порядка. Последняя может быть решена при помощи метода дискретной ортогонализации [7, 14]. Параметры расчетов для обоих методов должны быть выбраны достаточными для получения устойчивого результата. Результатом решения будет вектор искомых функций и их первых производных  $(\psi_1, \psi_1', \psi_2, \psi_2', w, w')$ . Несмотря на то, что результаты расчетов ниже представлены в виде поверхностей функции прогиба  $w$ , поля моментов и перерезывающих усилий также могут быть вычислены при необходимости.

**2.3. Выбор параметров расчета и исследование сходимости.** С целью определения эффективных значений параметров расчета для методов сплайн-аппроксимации и дискретной ортогонализации было проведено исследование НДС ортотропной четырехугольной пластины (рис. 1). Пластина с толщиной  $h = 0,1$  из углепластика (CFRP), находится под действием равномерной поперечной нагрузки  $q = q_0$  и жестко закреплена на краях. Упругие постоянные имеют значения [2]:  $E_1 = 2,11E_0, E_2 = 0,053E_0, \nu_{12} = 0,25$ ;

$G_{12} = G_{31} = 0,026E_0, G_{23} = 0,013E_0$ . Расчеты проведены для различного количества точек коллокации (ось  $\xi_2$ , сплайн-аппроксимация) и точек интегрирования (ось  $\xi_1$ , дискретная ортогонализация). Результаты представлены максимальными значениями нормированного прогиба  $w'_{max} = w_{max} E_1/q_0$  в табл. 1.

Анализируя данные в табл. 1, очевидно, что точность до пяти знаков может быть получена при количестве точек коллокации более 60 (30 пар) и количестве точек интегрирования  $N_x \geq 1500$ . Эти значения были использованы в дальнейшем по умолчанию для всех расчетов. Отметим, что в зависимости от геометрических особенностей конкретной пластины и краевых условий, даже приведенные выше значения могут оказаться недостаточными, как это будет показано ниже.

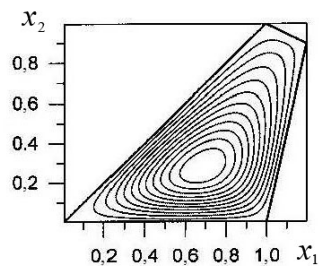


Рис. 1

Таблица 1

$N_x$ /пар т.к.	5	10	15	20	25	30	35
100	32,503	32,386	32,376	32,375	32,374	32,374	32,374
200	32,508	32,389	32,380	32,378	32,377	32,377	32,377
300	32,509	32,390	32,381	32,379	32,379	32,379	32,379
500	32,509	32,390	32,381	32,379	32,379	32,379	32,379
1000	32,509	32,390	32,381	32,379	32,379	32,378	32,378
1500	32,509	32,390	32,381	32,379	32,378	32,378	32,378
2000	32,509	32,390	32,381	32,379	32,378	32,378	32,378

**2.4. Возможные ограничения формы пластин.** Несмотря на тот факт, что преобразование системы координат позволяет рассматривать четырехугольные пластины практически произвольной формы как имеющие форму квадрата, решение конкретных краевых задач может продолжать зависеть от формы рассматриваемой пластины. Это может быть связано как с дискретизацией исходной области при сплайн-аппроксимации, так и с ограниченным количеством точек интегрирования при решении результирующей системы ОДУ. Ниже мы рассмотрели некоторые задачи с пластинами в форме четырехугольников, для которых можно ожидать возникновения определенных трудностей вычислительного характера.

Для решения задач в качестве формы пластин были выбраны дельтоиды и трапеции (рис. 2). Для дельтоидов рассмотрены значения угла  $\alpha$  от 1 до 179°, при которых форма пластины изменяется от «иглы» до практически треугольника. Остальные углы  $\beta = (360 - \alpha)/3$  приняты равными. Образующие угол стороны имеют единичную длину, края пластины закреплены жестко (clamped, C).

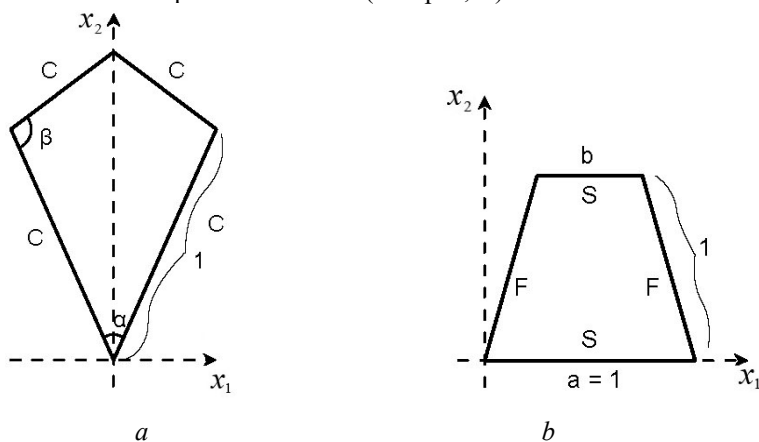


Рис. 2

Изменение длины основания  $b$  трапеций позволяет рассматривать переход формы пластины от квадрата ( $a/b=1$ ) до практически треугольника ( $a \gg b$ ) при сохранении единичной длины оставшихся трех сторон. Основания трапеции закреплены шарнирно (S), боковые стороны свободно провисают (F). Другие параметры включают равномерно распределенную нагрузку  $q=q_0$ , постоянную толщину пластины  $h=0,1$  и, для простоты расчетов, изотропный материал с  $\nu=0,3$ .

Результаты расчетов представлены в табл. 2 в форме нормированных значений  $w'=wE/q_0$ . Общий вид поверхности прогиба для дельтоидов с  $\alpha=15^\circ$  показан на рис. 3, а в виде изолиний при сохранении соотношения сторон, а на рис. 3, б – с различным масштабом по осям. Решение задачи для пластины с  $\alpha=1^\circ$  оказалось неустойчивым; это отмечено в табл. 2 и на рис. 3, с.

Таблица 2

$\alpha$	$w'_{max}$	$\alpha$	$w'_{max}$
$1^\circ$	—*	$165^\circ$	33,8905
$2^\circ$	0,004343	$170^\circ$	33,8474
$5^\circ$	0,025774	$175^\circ$	33,6256
$10^\circ$	0,103236	$178^\circ$	33,4112
$15^\circ$	0,245628	$179^\circ$	33,3252

\* получен неустойчивый результат

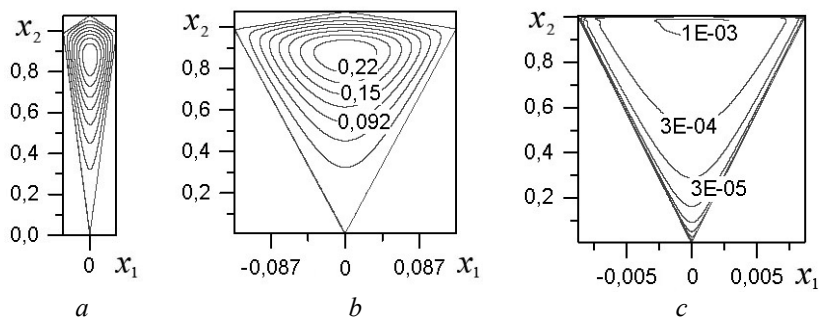


Рис. 3

Как видно из рис. 3 – 4, при малых значениях угла  $\alpha$  пластина имеет форму «плоской иглы». В этом случае представленный подход позволяет получать устойчивые решения задач при углах  $\alpha \geq 2^\circ$ . При больших значениях угла  $\alpha=165^\circ \dots 179^\circ$  все задачи получили корректные решения (рис. 5). Изменение значения максимального прогиба происходит в соответствии с изменением площади поверхности пластины, воспринимающей нагрузку  $q_0$  (табл. 2).

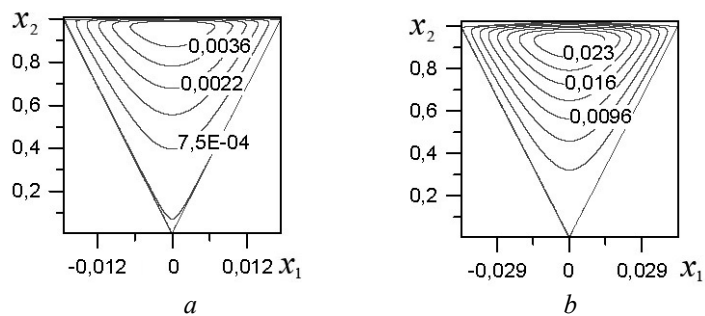


Рис. 4

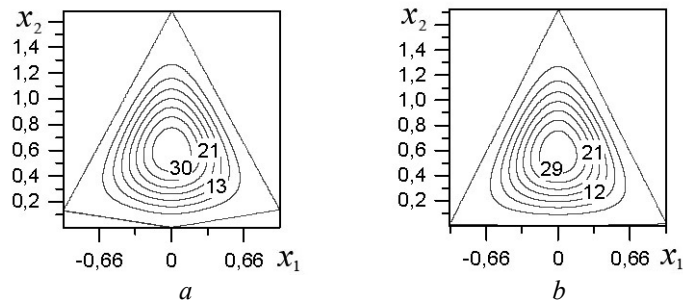


Рис. 5

Изменение соотношения оснований трапеции  $a/b$  (рис. 3) от 1:1 до 1000:1 делает возможным проанализировать влияние формы пластины на решение иным образом и для других граничных условий. Рассчитанные значения максимального прогиба  $w'_{max}$  для рассмотренных вариантов задач представлены в табл. 3. Рис. 6 показывает форму поверхности прогиба некоторых из них.

Таблица 3

$a/b$	1,000	2,154	4,641	10,00	21,54	46,41	100,0	215,4	464,1	1000
$w'_{max}$	170,35	141,39	114,25	101,17	95,87	93,71	92,79	92,37	92,18	92,10

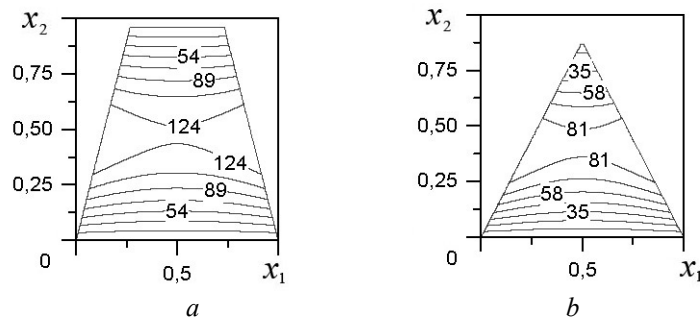


Рис. 6

Поскольку стороны трапециевидных пластин свободно оперты, максимальный прогиб, показанный в табл. 3, имеет место одновременно в двух точках. Как и в случае с дельтоидом, максимальный прогиб уменьшается с уменьшением площади поверхности пластины и после значения  $a/b = 100,0$  изменяется слабо.

Таким образом, в п. 2.3. и 2.4. рассмотрены возможные ограничения, которые должны быть приняты во внимание при решении конкретных задач о НДС пластин. Определены также рациональные значения параметров расчета, которые позволяют получать достоверные численные результаты.

### 3. Трапециевидные пластины из ортотропных материалов.

Вначале рассмотрим ортотропную пластину в форме трапеции, показанную на рис. 7, с геометрическими параметрами из [15] под воздействием равномерно распределенной нагрузки  $q(x, y) = q_0$ . Для возможности сравнения результатов расчетов рассмотрим жесткое закрепление сторон и (V) набор упругих постоянных из [15]:

$$E_x = E_0, \quad E_y = E_0/2, \quad G_{12} = E_0/8, \quad \nu_1 = 0,15.$$

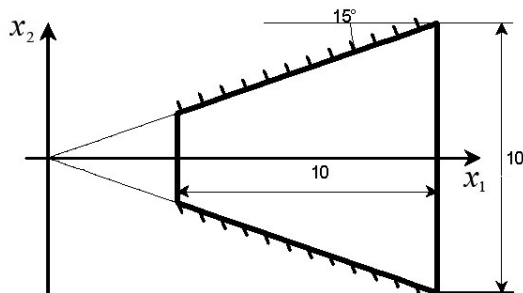


Рис. 7

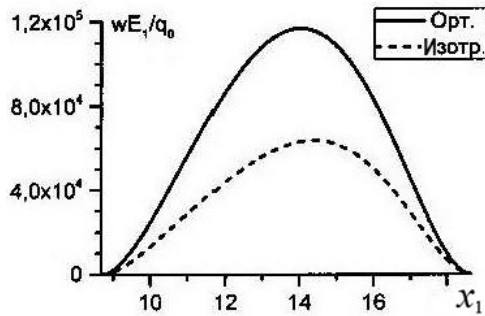


Рис. 8

Результаты расчетов показаны на рис. 8 в виде кривых сечения поверхности прогиба при  $x_2 = 0$ . Форма кривых и соотношение величины прогиба для ортотропного и изотропного материала хорошо согласуются с данными из [15].

Ортотропные свойства материала могут в значительной мере влиять на характер напряженно-деформированного состояния. Данный эффект может быть наглядно продемонстрирован на примере углепластика (CFRP) [2]. Здесь условия за-

крепления пластины (рис. 7) предполагают жесткую фиксацию на сторонах трапеции и свободные основания.

Результирующие поверхности прогиба и их сечения при  $y = 0$  показаны на рис. 9. В данном случае рис. 9, *a* и *b* соответствуют повороту материала на  $90^\circ$ , т.е.  $E_1 \leftrightarrow E_2$  с соответствующими изменениями в  $G_{ij}, \nu_{ij}$ . Последний случай рис. 9, *c* относится к изотропному материалу ( $E = (E_1 + E_2)/2$  и т.д.).

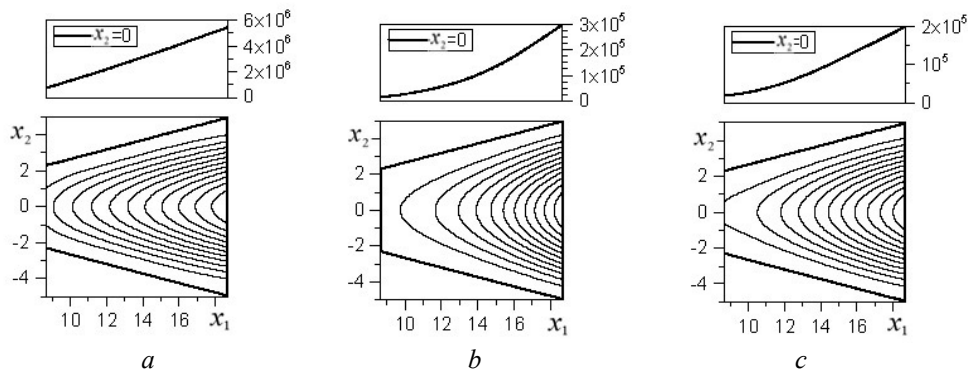


Рис. 9

В то время как для пластины с армирующими волокнами вдоль оси  $x$  наблюдаем наибольшие значения прогиба и сравнительно небольшую кривизну сечения (рис. 9, *a*), прогибы для двух других случаев отличаются гораздо меньше (рис. 9, *b, c*), несмотря на заметные различия в упругих постоянных. Наименьшие прогибы, как и ожидалось, показывает изотропная пластина, которая фактически «армирована» во всех направлениях (рис. 9, *c*).

#### 4. Влияние взаимной ориентации осей ортотропии и сторон трапецевидных пластин на напряженно-деформированное состояние.

В то время как ортотропные пластины с отличающимися значениями упругих постоянных могут показывать заметно различное напряженно-деформированное состояние даже при одинаковых условиях закрепления и нагружения, отдельный интерес представляет влияние взаимной ориентации сторон пластины и осей ортотропии для углов их взаимной ориентации  $\alpha$  от 0 до  $90^\circ$ .

Для исследования этого вопроса рассмотрим четырехугольные пластины постоянной толщины  $h = 0,1$  в форме равнобедренной трапеции при соотношении оснований  $b/a$  от 1:1 (квадрат) до 10:1 (рис. 10). Высота трапеции и ее площадь сохраняются неизменными и равными 1,0 для возможности количественного сравнения результатов расчетов. Нагрузка  $q(x_1, x_2)$  предполагается постоянной ( $q = q_0$ ) и распределенной равномерно для всех случаев.



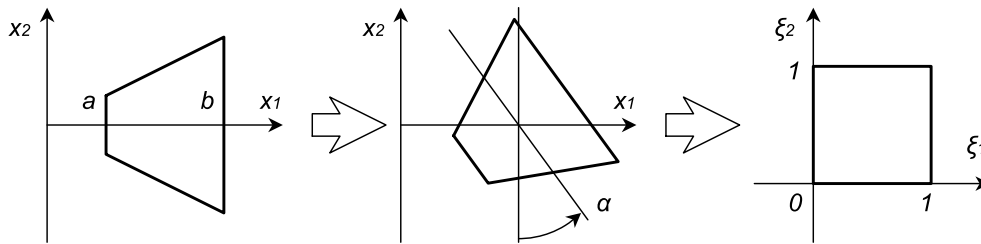


Рис. 10

Влияние ориентации осей ортотропии на характер напряженно-деформированного состояния рассмотрено для двух ортотропных материалов с большим отличием упругих характеристик: стеклопластик с соотношением слоев 2/1 ( $E_1 / E_2 \approx 1,4$ ) и углепластик CFRP ( $E_1 / E_2 \approx 40$ ).

**4.1. Упругие свойства материала и поворот пластины.** Как было отмечено выше, для изучения эффектов, связанных с ориентацией осей ортотропии, необходимо принять во внимание их поворот. Поскольку применение преобразования координат позволяет поворачивать всю пластину, оставляя ориентацию осей ортотропии без изменений по отношению к исходным координатным осям  $x_1, x_2$ , были выполнены некоторые проверочные расчеты значений прогиба  $w$  для квадратной пластины с жестко защемленными краями при углах поворота от 0 до 90°.

Результаты сопоставлены с данными расчетов, полученных обобщенным методом Канторовича – Власова для аналогичной задачи в трехмерной постановке [4] при тех же параметрах и условиях. Здесь разворот осей ортотропии учитывался при помощи изменения значений упругих констант, в то время как сама пластина оставалась неподвижной.

В соответствии с полученными результатами (рис. 11), расхождение для максимального значения прогиба пластины  $w'_{max} = w_{max} E_0 / q_0$  не превышает 3,5%. Поэтому для последующих расчетов, имеющих отношение к влиянию взаимной ориентации осей ортотропии и краев пластины, вместо изменения упругих констант материала был произведен разворот вершин «вырезаемой» из материала фигуры (рис. 10). Положение осей ортотропии материала по отношению к осям  $x_1, x_2$  было постоянным для всех вариантов расчета.

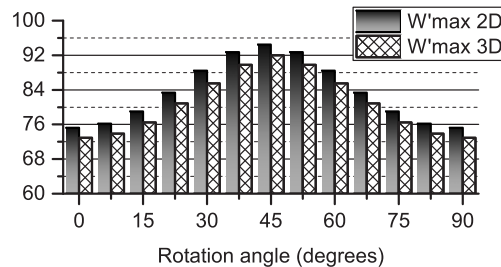


Рис. 11

**4.2. Численные результаты.** В качестве результата расчета приведено значение максимального прогиба  $w'_{max}$  в табл. 4 и 5. Табл. 4 соответствует случаю, когда материал пластины является многослойным стеклопластиком с соотношением слоев 2/1 и относительно слабо выраженными ортотропными свойствами ( $E_1 = 3,68 E_0$ ,  $E_2 = 2,68 E_0$ ,  $\nu_{12} = 0,105$ ,  $G_{12} = 0,5 E_0$ ,  $G_{23} = 0,41 E_0$ ,  $G_{31} = 0,45 E_0$ ,  $h = 0,1$ ). Табл. 5 соответствует армированному углепластику CFRP.

Общий вид поверхности прогиба для обоих материалов при значении параметра  $b/a$  равном 3/1 и угле поворота 45° показан на рис. 12. Легко видеть влияние большой величины отношения  $E_1/E_2 \approx 40$  на смещение области с максимальным прогибом к той части пластины, где ее линейный размер вдоль оси  $x_1$  имеет наибольшую величину.

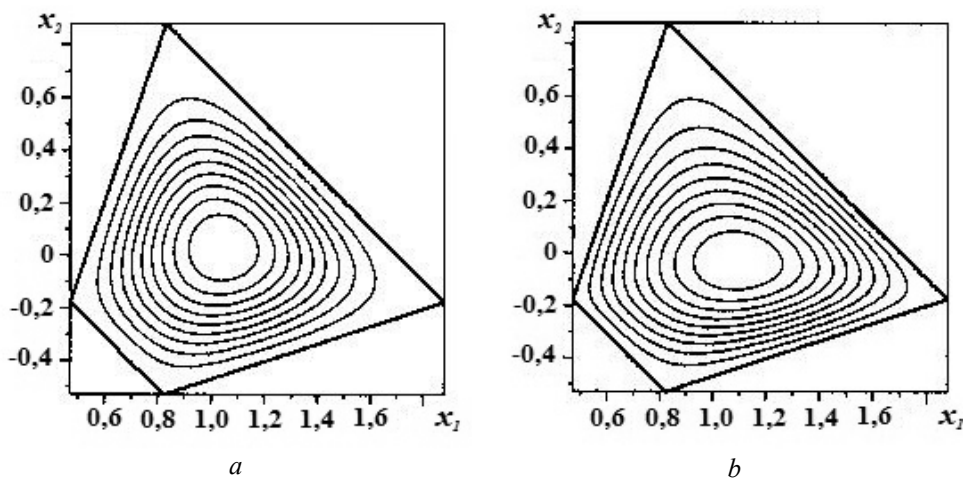


Рис. 12

Табл. 4 показывает, что увеличение отношения  $b/a$  приводит к уменьшению максимального прогиба при любых значениях угла  $\alpha$ . Поэтому квадратная пластина ( $b/a = 1/1$ ) из стеклопластика с поворотом  $45^\circ$  показывает наибольший прогиб.  $w'_{max}$  для пластин иной геометрии (3/1, 10/1), даже несмотря на некоторое увеличение прогиба при подходе к углу в  $90^\circ$ , остается намного меньше.

Таблица 4

$b/a$	1/1	3/1	10/1
$0^\circ$	7,66669	6,77759	5,57181
$15^\circ$	7,77132	6,80441	5,57531
$30^\circ$	7,99358	6,86615	5,60469
$45^\circ$	8,11149	6,92438	5,68011
$60^\circ$	7,99358	6,93553	5,77703
$75^\circ$	7,77131	6,89784	5,85183
$90^\circ$	7,66668	6,87186	5,87669

Таблица 5

$b/a$	1/1	3/1	10/1
$0^\circ$	75,2208	71,2451	60,7918
$15^\circ$	79,0297	74,0471	62,6399
$30^\circ$	88,4201	80,6674	67,4719
$45^\circ$	94,4493	85,8743	74,2085
$60^\circ$	88,4199	86,0683	81,8951
$75^\circ$	79,0292	84,3045	87,5379
$90^\circ$	75,2202	83,5697	— *

\* получен неустойчивый результат

В случае, когда материалом пластины является углепластик CFRP, наблюдается отличие в поведении величины прогиба пластины. В то время как максимальный прогиб наблюдается для квадратной пластины при угле  $45^\circ$ , на больших углах трапеции с  $b/a=3/1$  и  $10/1$  показывают значительный рост  $w'_{max}$ . Этот факт обусловлен заметным изменением длины основания  $b$  (рис. 10), которое, при ориентации вдоль оси  $x_1$ , создает условия для существенного увеличения прогиба.

### Заключення.

Предложенный численно-аналитический подход, основанный на методах сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации, позволяет проводить статический анализ ортотропных пластин сложной формы. Форма пластин с различными геометрическими параметрами учитывается в результате применения преобразования исходной области к единичному квадрату в новой системе координат.

Анализ сходимости для предложенного подхода и исследование наличия возможных ограничений на форму пластины показали возможность получения устойчивого решения для большинства рассмотренных задач статического анализа. В некоторых случаях, однако, может возникнуть необходимость дополнительного подбора параметров расчета.

На примере трапециевидной пластины со свободным закреплением оснований и защемленными боковыми сторонами рассмотрен случай, когда пластины из ортотропного и изотропного материалов, с учетом условий закрепления, ведут себя схожим образом. Также показано, что ориентация осей ортотропии по отношению к краям пластины имеет заметное влияние на характер НДС.

Влияние взаимной ориентации сторон пластины и осей ортотропии рассмотрено при помощи разворота трапециевидной «вырезки». Одним из критериев достоверности результата является сравнение с данными, полученными обобщенным методом Канторовича – Власова.

В задачах статического анализа трапециевидных пластин численно рассчитанные поверхности прогиба показали доминирующее влияние краевых условий в случаях, где материал имеет слабо выраженные ортотропные свойства ( $E_1/E_2 \approx 1,4$ ). В то же время, для материала с  $E_1/E_2 \approx 40$  преобладает влияние взаимной ориентации осей ортотропии и краев пластины, которое приводит как к количественным, так и к качественным изменениям НДС.

В целом, предложенный авторами численно-аналитический подход позволяет с достаточной степенью точности решать широкий класс задач о НДС ортотропных четырехугольных пластин при различных граничных условиях.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано чисельно-аналітичний підхід, що базується на методах сплайн-апроксимації та дискретної ортогоналізації, що дозволяє проводити дослідження напружено-деформованого стану ортотропних пластин складної форми. Форма пластин враховується завдяки застосуванню відповідного перетворення координат, що зводить вихідну область до одиничного квадрату. На прикладі пластин у формі трапеції показано вплив ортотропних властивостей матеріалу на характер напружено-деформованого стану. Досліджено вплив взаємної орієнтації сторін пластины та осей ортотропії на розподіл полів переміщень для пластин з матеріалів, що мають суттєво різні пружні властивості. Проведено аналіз впливу механічних та геометричних параметрів пластины на збіжність отриманих чисельних результатів розрахунків.

1. *Курна Л.В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
2. *Alam N., Asnani N.T.* Vibration and Damping Analysis of Fibre Reinforced Composite Material Plates // J. of Composite Materials. – 1986. – **20**, N 1. – P. 2 – 18.
3. *Alwar R.S., Ramachandra Rao N.* Nonlinear Analysis of Orthotropic Skew Plates // AIAA J. – 1973. – **11**, N 4. – P. 495 – 498.
4. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Solving the Torsion Problem for an Anisotropic Prism by the Advanced Kantorovich-Vlasov Method // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 149 – 158.
5. *Birman V.* Plates Structures. – New York: Springer, 2011. – 298 p.
6. *Buragohain D.N., Patodi S.C.* Large Deflection Analysis of Skew Plates by Lumped Triangular Element Formulation // Computers and Structures. – 1978. – **9**. – P. 183 – 189.
7. *Godunov S.K.* Numerical Solution of Doundary-Value Problems for Systems of Linear Ordinary Differential Equations // Usp. Mat. Nauk. – 1961. – **16**, N 3. – P. 171 – 174.
8. *Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G.* Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. Vol. 1. General Theory and Applications of Classical Theory. – Berlin: Springer, 2016. – 114 p.

9. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A. Stress–Strain State of Complex-Shaped Orthotropic Plates under Variable Load // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 4. – P. 411– 417.
10. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Analysis of the Stress-Strain State of Complex-Shaped Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 659 – 701.
11. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Numerical Analysis of Stress-Strain State of Orthotropic Plates in the Form of Arbitrary Convex Quadrangle // *Proc. of the 5th Int. Conf. on Nonlinear Dynamics.* (Kharkov, Sep. 27 – 30, 2016). – Kharkov, 2016. – P. 287 – 293.
12. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Solution of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in a Refined Formulation // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 3. – P. 326 – 333.
13. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2 – P. 123 – 193.
14. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Spline-Based Investigation of Natural Vibrations of Orthotropic Rectangular plates of Variable Thickness within Classical and Refined Theories // *J. of Mechanics and Structures.* – 2008. **3**, N 5. – P. 929 – 952.
15. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S. Using Spline-Functions to Solve Boundary-Value Problems for Laminated Orthotropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 413 – 420.
16. Kryukov N.N. Design of Oblique and Trapezoidal Plates Using Spline Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 5. – P. 3 – 27.
17. Li W.Y., Cheung Y.K., ASCE F., Tham L.G. Spline Finite Strip Analysis of General Plates // *J. Eng. Mech.* – 1986. – **112**, – P. 43 – 54.
18. Malekzadeh P., Fiouz A.R. Large Deformation Analysis of Orthotropic Skew Plates with Nonlinear Rotationally Restrained Edges Using DQM // *Composite Structures.* – 2007. – **80**, N 2. – P. 196 – 206.
19. Malekzadeh P., Karami G. Differential Quadrature Nonlinear Analysis of Skew Composite Plates Based on FSDT // *Engineering Structures.* – 2006. – **28**. – P. 1307 – 1318.
20. Mindlin R.D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates // *ASME J. of Appl. Mech.* – 1951 – **18**. – P. 31 – 38.
21. Mohajerani P. The Thick Orthotropic Plates Analysis Methods, Part I: A Review // *IOSR J. of Mechanical and Civil Engineering.* – 2015. – **12**, N 2, Ver. III. – P. 69 – 77.
22. Shahidi A.R., Mahzoon M., Saadatpour M.M., Azhari M. Nonlinear Static Analysis of Arbitrary Quadrilateral Plates in Very Large Deflections // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2007. – **12**. – P. 832 – 848.
23. Sheikh A.H., Mukhopadhyay M. Geometric Nonlinear Analysis of Stiffened Plates by the Spline Finite Strip Method // *Computers and Structures.* – 2000. – **76**. – P. 765 – 785.
24. Shufrin I., Rabinovich O., Eisenberger M. A Semi-Analytical Approach for the Geometrically Nonlinear Analysis of Trapezoidal Plates // *Int. J. of Mech. Sci.* – 2010. – **52**. – P. 1588 – 1596.
25. Singh A.V., Elaghabash Y. On Finite Displacement Analysis of Quadrangular Plates // *Int. J. of Non-Linear Mechanics* – 2003. – **38**. – P. 1149 – 1162.
26. Srinivasan RS, Ramachandran SV. Large Deflection of Clamped Skew Plates // *Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering.* – 1976. – **7**. – P. 219 – 233.

Поступила 07.12.2017

Утверждена в печать 22.11.2018