УДК 518.9

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Чикрий, И. И. Матичин**

Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка

Non-homogeneous linear systems of differential equations with classical Riemann-Liouville fractional derivatives, as well as regularized Caputo's fractional derivatives, are considered. Using the Laplace transform, the solutions to such systems are represented in the form of analogs of the Cauchy formula for arbitrary measurable and bounded functions of time on the right-hand side. These relations play a key role in solving the related problems of mathematical control theory and the theory of dynamic games.

1. Дробные производные Римана–Лиувилля и Капуто. Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство; $\mathbb{R}_+$ — положительная полуось; $f(t)$, $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ — некоторая абсолютно непрерывная функция. Рассмотрим производную дробного порядка α $(0 < \alpha < 1)$ в смысле Римана–Лиувилля:

$$D^\alpha f(t) = {}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau, \tag{1}$$

где $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ — гамма-функция Эйлера, удовлетворяющая функциональному уравнению $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Используя интегрирование по частям и дифференцирование интеграла, зависящего от параметра, выражение (1) можно привести к виду

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau = \left| \begin{matrix} u = f(\tau) & du = f'(\tau)\, d\tau \\ dv = (t-\tau)^{-\alpha}\, d\tau & v = \dfrac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\frac{f(\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \Bigg|_0^t - \int\limits_0^t \frac{f'(\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\, d\tau \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\frac{f(0)t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}\, d\tau \right) =$$

$$= \frac{f(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau. \tag{2}$$

Таким образом, производная дробного порядка α $(\alpha \in (0,1))$ в смысле Римана–Лиувилля представима в виде суммы сингулярного члена

$$\frac{f(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{3}$$

и интеграла

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau.$$

Последний носит название дробной производной в смысле Капуто, или регуляризованной дробной производной. Присутствие слагаемого (3) приводит к тому, что дробные производные Римана–Лиувилля имеют особенность в нуле и в задаче Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля (при описании динамических систем) необходимо задавать начальные условия специального вида, не имеющие четкой физической интерпретации.

Этих недостатков дробной производной Римана–Лиувилля лишена регуляризованная производная дробного порядка α ($\alpha \in (0,1)$)

$$D^{(\alpha)}f(t) = {}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau, \tag{4}$$

которая была, по-видимому, впервые введена М. Капуто в работе [2], а также, независимо от него, М. М. Джрбашяном и А. Б. Нерсесяном в работе [3].

Пусть теперь $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), дробная часть числа α, как обычно, обозначается $\{\alpha\}$, его целая часть — $[\alpha]$. Таким образом, $[\alpha] = n - 1$, $\{\alpha\} = \alpha - n + 1$. Дробная производная Римана–Лиувилля произвольного порядка α ($n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$) вводится следующим образом [1]:

$$D^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]} \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\{\alpha\}}}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\,d\tau. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, а функция $f(t)$ имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $(n-1)$ включительно. Тогда справедливо*

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\,d\tau. \tag{6}$$

Доказательство. Доказательство проведем с помощью математической индукции по n. Для $n=1$ равенство (6) принимает вид (2).

Пусть при $n-2<\alpha<n-1$

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(n-1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{f^{(n-1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+2}}\,d\tau. \tag{7}$$

Тогда при $n-1<\alpha<n$, учитывая, что $\{\alpha\}=\{\alpha-1\}$ и $[\alpha-1]=[\alpha]-1$ для $\alpha\notin\mathbb{Z}$, получим

$$D^{\alpha}f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]}D^{\{\alpha\}}f(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]-1}D^{\{\alpha\}}f(t)=\frac{d}{dt}D^{\alpha-1}f(t).$$

Поскольку $n-2<\alpha-1<n-1$, можно воспользоваться равенством (7):

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{d}{dt}D^{\alpha-1}f(t)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k-\alpha+2)}f^{(k)}(0)+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(n-1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\,d\tau\right).$$

Интегрируя последнее выражение по частям, получим

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k-\alpha+2)}f^{(k)}(0)+\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}f^{(n-1)}(0)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n}}\,d\tau\right)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(k-\alpha+1)t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+2)}f^{(k)}(0)+$$

$$+\frac{(n-\alpha)t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}f^{(n-1)}(0)+\frac{(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\,d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0)+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\,d\tau,$$

что и требовалось доказать.

Как и в предыдущем случае, интегральный член в выражении (6) представляет собой регуляризованную дробную производную в смысле Капуто произвольного порядка α ($n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}$):

$$D^{(\alpha)}f(t)={}_0^CD_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\,d\tau=D^{\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0). \quad (8)$$

Известны следующие выражения для преобразования Лапласа дробных производных Римана–Лиувилля и Капуто [4]:

$$L\{D^{\alpha}f(t);s\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kD^{\alpha-k-1}f(t)\big|_{t=0}, \quad (9)$$

$$L\{D^{(\alpha)}f(t);s\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0). \quad (10)$$

2. Обобщенная матричная функция Миттаг–Леффлера. В работе [5] определена обобщенная матричная функция Миттаг–Леффлера:

$$E_{\rho}(B;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{\Gamma(k\rho^{-1}+\mu)}, \quad (11)$$

где $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), а B — произвольная квадратная матрица порядка m.

Обобщенная матричная функция Миттаг–Леффлера играет важную роль при изучении линейных систем дробного порядка. Будем обозначать I единичную матрицу порядка m. Справедлива следующая лемма, которая позволяет находить преобразование Лапласа выражений, содержащих обобщенную матричную функцию Миттаг–Леффлера.

Лемма 2. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, A — произвольная квадратная матрица порядка m. Тогда справедливо*

$$L\big\{t^{\beta-1}E_{1/\alpha}(At^{\alpha};\beta);s\big\} = s^{\alpha-\beta}(s^{\alpha}I - A)^{-1}.$$

Доказательство. Учитывая определения обобщенной матричной функцией Миттаг–Леффлера, гамма-функции Эйлера и используя замену $\tau = st$, получаем

$$L\left\{t^{\beta-1}E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{\alpha};\beta);s\right\} = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{\alpha};\beta)dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int\limits_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)s^{\alpha k+\beta}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\alpha k+\beta-1}\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(\alpha k+\beta)}.$$

Покажем, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(\alpha k+\beta)} = s^{\alpha-\beta}(s^{\alpha}I - A)^{-1}$. Последнее равносильно

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} = (s^{\alpha}I - A)^{-1}. \tag{12}$$

Домножим левую часть равенства (12) на $(s^{\alpha}I - A)$ (безразлично — слева или справа, поскольку матрицы коммутируют). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha}(s^{\alpha}I - A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k\alpha} - \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k+1)}s^{-(k+1)\alpha} = I.$$

Поскольку обратная матрица единственна, это завершает доказательство.

3. Системы дробного порядка. Пусть $g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — измеримая ограниченная функция. Тогда $g(t)e^{-st} \in L_1(0,\infty)$, $s \in \mathbb{C}$. Следовательно, к функции $g(t)$ применимо преобразование Лапласа [6].

Рассмотрим динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением

$$D^{\alpha}z = Az + g, \qquad n-1 < \alpha < n, \tag{13}$$

с начальными условиями

$$D^{\alpha-k}z(t)\big|_{t=0} = z_k^0, \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{14}$$

Лемма 3. *Траектория системы* (13), (14) *имеет вид*

$$z(t)=\sum_{k=1}^{n}t^{\alpha-k}E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{\alpha};\alpha-k+1)z_k^0+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\tau)^{\alpha};\alpha)g(\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

Доказательство. Применим к системе (13) преобразование Лапласа, учитывая формулу (9). Получим

$$s^{\alpha}Z(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{k-1}z_k^0=AZ(s)+G(s),$$

или

$$Z(s)=\sum_{k=1}^{n}s^{k-1}(s^{\alpha}I-A)^{-1}z_k^0+(s^{\alpha}I-A)^{-1}G(s). \tag{16}$$

Применяя к равенству (16) обратное преобразование Лапласа, с учетом леммы 2, получим

$$z(t)=\sum_{k=1}^{n}t^{\alpha-k}E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{\alpha};\alpha-k+1)z_k^0+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\tau)^{\alpha};\alpha)g(\tau)\,d\tau,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим динамическую систему дробного порядка в смысле Капуто, описываемую уравнением:

$$D^{(\alpha)}z=Az+g,\qquad n-1<\alpha<n, \tag{17}$$

с начальными условиями

$$z^{(k)}(0)=z_k^0,\qquad k=0,\ldots,n-1. \tag{18}$$

Лемма 4. *Траектория системы* (17), (18) *имеет вид:*

$$z(t)=\sum_{k=0}^{n-1}t^{k}E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{\alpha};k+1)z_k^0+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\tau)^{\alpha};\alpha)g(\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Доказательство. Применяя к системе (17) преобразование Лапласа, с учетом формулы (10), запишем

$$s^{\alpha}Z(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}z_k^0=AZ(s)+G(s),$$

или

$$Z(s)=\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}(s^{\alpha}I-A)^{-1}z_k^0+(s^{\alpha}I-A)^{-1}G(s). \tag{20}$$

Применим к (20) обратное преобразование Лапласа. Тогда, учитывая лемму 2, будем иметь

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{\alpha}; k+1) z_k^0 + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\tau)^{\alpha}; \alpha) g(\tau)\, d\tau.$$

Отметим, что формулы (15), (19) для некоторых частных случаев получены иным способом в работах [1, 5].

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent – II // Geophys. J. R. Astr. Soc. – 1967. – **13**. – P. 529–539.
3. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Арм. ССР. – 1968. – **3**, 1. – С. 3–29.
4. *Podlubny I.* Fractional differential equations. – San Diego: Acad. Press, 1999. – 340 p.
5. *Чикрий А. А., Эйдельман С. Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – **3**. – С. 3–32.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1976. – 543 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 06.07.2006