

А. Я. Бомба, д-р техн. наук,

С. В. Яроцак, аспірант

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

## ОДИН МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ

Розроблено алгоритм числового розв'язання обернених модельних крайових задач типу «нагнітальна та експлуатаційна свердловина» на квазіконформні відображення, що автоматично вирішує проблему побудови рівномірної гідродинамічної сітки, знаходження положення границі розділу рідин у різні моменти часу та частки витісняючої рідини (води) у повній фільтраційній витраті (зокрема, часу початку та повного обводнення експлуатаційної свердловини).

**Ключові слова:** квазіконформні відображення, лінія розділу, гідродинамічна сітка, крайові задачі, витіснення.

**Вступ.** Проблемам математичного моделювання процесів витіснення однієї рідини іншою присвячено значну кількість робіт як закордонних, так і вітчизняних вчених (див., напр. [1—6]). Відповідні задачі полягають і у побудові динамічних сіток (у тому числі знаходженні поля швидкості та різного роду витрат тощо) і у знаходженні рухомої лінії розділу (яку позначатимемо через  $\Gamma_t$ , а її рівняння у фіксований момент часу  $t$ :  $F(x, y, t) = 0$ ), яка розбиває область фільтрації на підобласті, в кожній із яких рухається тільки одна із рідин. При відшукуванні лінії розділу в роботах [3, 4] отримано дві еквівалентні форми рівнянь руху  $\Gamma_t$ :

$$\frac{\partial p_o}{\partial n} = \frac{m}{c_o} \frac{\partial F}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial n}, \quad \frac{\partial p_w}{\partial n} = \frac{m}{c_w} \frac{\partial F}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial n},$$

де  $c_o = \frac{k}{\mu_o}$ ,  $c_w = \frac{k}{\mu_w}$ ,  $\mu_o$ ,  $\mu_w$  — коефіцієнти в'язкості відповідно у

першій та другій зонах,  $k$  — коефіцієнт провідності,  $m$  — пористість,  $n$  — нормаль до відповідної кривої,  $p_o$ ,  $p_w$  — тиски. Недоліком такого підходу до побудови ліній розділу за елементарними переміщеннями вздовж нормалей (до попереднього положення  $\Gamma_t$ ) є те, що реальне (фізичне) переміщення частинок рідин відбувається вздовж ліній течії, а не вздовж нормалей. Існують і роботи в яких враховано можливість переміщення точок  $\Gamma_t$  вздовж лінії течії, однак, у припущенні, що поле швидкостей задане. Нами ж запропоновано комплексний підхід відшукування положення невідомої границі розділу рідин, який враховує фізичну сторону процесу руху, що відбувається вздовж ві-

домих ліній течії які знаходяться разом із полем швидкостей в процесі ітераційного розв'язку задачі. Для спрощення викладок розглядатимемо випадок, коли в пласті є лише дві свердловини: нагнітальна та експлуатаційна.

**Постановка задачі.** Розглянемо процес фільтрації двох рідин (наприклад, води і нафти, що не змішуються) в горизонтальному пласті (тризв'язній криволінійній області  $G_z$ , обмеженій трьома гладкими замкненими контурами:  $L_* = \{x+iy : x = x_*(\tau), y = y_*(\tau), \alpha_* < \tau < \beta_*\} = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ ,  $L^* = \{x+iy : x = x^*(\tau), y = y^*(\tau), \alpha^* < \tau < \beta^*\} = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ ,  $L_0 = \{x+iy : x = x_0(\tau), y = y_0(\tau), \alpha_0 < \tau < \beta_0\} = \{z : f_0(x, y) = 0\}$ ,  $z = x + iy$ ), який розробляється нагнітальною та експлуатаційною свердловинами (рис. 1).

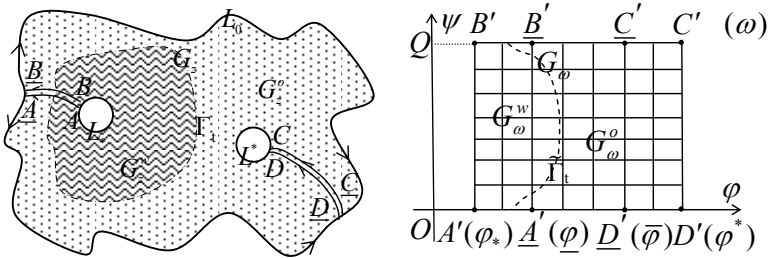


Рис. 1. Фізична область  $G_z$  та відповідна їй область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$

Границя  $\Gamma_t$ , положення якої в початковий момент часу  $t_0$  є відомим (зокрема, можна прийняти  $\Gamma_{t_0} = L_*$ ), розділяє пласт  $G_z$  на область фільтрації води  $G_z^w$  та область фільтрації нафти  $G_z^o$  (індексом «w» позначаємо величини, що характеризують рух рідини в  $G_z^w$ , а індексом «o» — в  $G_z^o$ ). Рух рідини у пористому пласті описується законом Дарсі та рівнянням нерозривності [1, 2]:

$$\bar{v} = k \cdot \text{grad} \varphi, \quad \text{div} \bar{v} = 0, \quad (x, y) \in G_z^w \cup G_z^o \quad (1)$$

за умов  $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{L_0} = 0$  на нерухомих ділянках границі

фільтраційної області та умов неперервності потоку і тиску (квазіпотенціалу) при переході через рухома границю  $\Gamma_t$ , на якій може відбуватися переломлення ліній течії, яке ускладнює пошук її положення

$(\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y)))$  — швидкість фільтрації,  $\varphi = \varphi(x, y)$  — квазі-потенціал,  $k$  — коефіцієнт фільтрації, причому  $k = k_w$ ,  $\varphi = \varphi_w$  в  $G_z^w$  і  $k = k_o$ ,  $\varphi = \varphi_o$  в  $G_z^o$ ,  $n$  — біжуча нормаль до відповідної кривої).

Аналогічно до [5, 6], ввівши комплексно спряжену до  $\varphi = \varphi(x, y)$  функцію течії  $\psi = \psi(x, y)$  та здійснивши умовні розрізи  $\Gamma_*$ ,  $\Gamma^*$  області  $G_z$  вздовж ліній розділу течії (через  $\underline{AA}$  та  $\underline{BB}$ ,  $\underline{CC}$  та  $\underline{DD}$  на рис. 1 позначено відповідно верхній та нижній береги цих розрізів, де  $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*)$ ,  $\underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0)$  — точки «призупинки»,  $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$ ,  $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$ ) приходимо до задачі на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  [5—7] утвореної при цьому однозв'язної області  $G_z^0 = G_z / (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$  на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = G_\omega^w \cup G_\omega^o = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  (де  $G_\omega^w$ ,  $G_\omega^o$  — відповідні  $G_z^w$ ,  $G_z^o$  підобласті області  $G_\omega$ , див., рис. 1) з невідомими параметрами  $Q$  (повна витрата);  $\underline{\varphi}$ ,  $\overline{\varphi}$  (потенціали в шуканих точках «призупинки» — відповідно «розходження» та «сходження» ліній течії);  $(x_0^*, y_0^*)$ ,  $(x_*^0, y_*^0)$ ;  $(x_*, y_*)$ ,  $(x^*, y^*)$ :

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (2)$$

$$v(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad v(x_*^0, y_*^0) = 0, \quad \varphi_w = \varphi_o|_{\Gamma_*}, \quad (v_w)_n = (v_o)_n|_{\Gamma^*},$$

де  $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ ,  $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$ .

Через геометричну складність області  $G_z^0$  та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  ми замість прямої задачі на квазіконформне відображення розглядатимемо обернену до неї. Зазначимо, що під терміном «обернення» ми розумітимемо перехід від квазіконформного відображення фізичної області  $G_z$  на відповідну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  до більш

вигідного оберненого відображення  $G_\omega \rightarrow G_z$ , а також і те, що задача на квазіконформне відображення  $G_z \rightarrow G_\omega$  ( $G_\omega \rightarrow G_z$ ) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про розв'язок задачі знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, граничні умови та ін.), адже при постановці крайової (фізичної) задачі в області  $G_\omega$  невідомими є її параметри (напр., повна фільтраційна витрата тощо).

Обернену крайову задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z^0$  та рівняння для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  і уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частини (виконання яких вимагатимемо і на розрізах із врахуванням їх «роздвоєння» при переході від області  $G_z$  до  $G_\omega$ ) характеристичної функції течії при невідомих  $Q$ ,  $\underline{\varphi}$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\Gamma_*$ ,  $\Gamma^*$  запишемо у вигляді:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^w \cup G_\omega^o, \quad (3)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (4)$$

$$f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \underline{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (5)$$

$$\nu(x(\underline{\varphi}, \tilde{\psi}), y(\underline{\varphi}, \tilde{\psi})) = 0, \quad \nu(x(\bar{\varphi}, \tilde{\psi}), y(\bar{\varphi}, \tilde{\psi})) = 0, \quad \tilde{\psi} = \{0, Q\},$$

$$[\varphi]_{\tilde{\Gamma}_i} = 0, \quad \left[ \frac{k}{J} \sqrt{\left( \frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\bar{\nu}, \bar{n}) \right]_{\tilde{\Gamma}_i} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left( k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (7)$$

де  $k = k_w$  в  $G_\omega^w$  і  $k = k_o$  в  $G_\omega^o$ ,  $\nu_x = \frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$ ,

$$\nu_y = -\frac{k}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$[\cdot]_{\tilde{\Gamma}_i}$  — стрибок відповідної функції на  $\tilde{\Gamma}_i$ .

**Процедуру покорокового наближеного знаходження границі розділу рідин** побудуємо так. За заданим початковим положенням границі розділу рідин  $\Gamma_{t_0}$  знаходимо розв'язок задачі (3)—(7). Положення  $\Gamma_t$  в кожен наступний момент часу  $t_{p+1} = t_p + \Delta t$ ,  $p = 0, 1, \dots$  (де  $\Delta t$  — деякий заданий достатньо малий часовий крок) знаходимо, використовуючи поле швидкостей при  $t = t_p$ , відповідні формули  $x = x(\varphi, \psi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi)$  квазіконформного відображення  $G_\omega$  на  $G_z$  та формулу для розрахунку часу проходження частинкою шляху від точки  $(\varphi_*, \bar{\psi})$  до біжучої точки  $(\varphi, \bar{\psi})$  вздовж лінії течії  $\psi(x, y) = \bar{\psi}$  [6]:

$$t = \Phi(\varphi, \bar{\psi}) = \int_{\varphi_*}^{df \varphi} \sigma v^{-2}(x(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}), y(\tilde{\varphi}, \bar{\psi})) d\tilde{\varphi}, \quad (8)$$

де  $\sigma = ak$  — пористість ґрунту ( $a$  — деяке додатне дійсне число).

**Різницьвий аналог задачі (3)—(7).** Введемо в області  $G_\omega$  ортогональну сітку

$$\begin{aligned} G_\omega^l = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi, \Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1} \text{ при } i = \overline{0, n_1}; \right. \\ \varphi_i = \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi, \Delta\varphi = \Delta\varphi_2 = \frac{\bar{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1} \text{ при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}; \\ \left. \varphi_i = \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi, \Delta\varphi = \Delta\varphi_3 = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1} \text{ при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}; \right. \\ \left. \psi_j = j\Delta\psi, \Delta\psi = \frac{Q}{m}, j = \overline{0, m}; \gamma_l = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi}, l = \overline{1, 3} \right\}, \end{aligned}$$

де  $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$ ,  $n_1, n_2, n_3, m \in \mathbb{N}$  — параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу,  $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \Delta\psi$  — кроки сітки відповідно по змінним  $\varphi$  та  $\psi$ ,  $\gamma_l$  — квазіконформний інваріант.

Рівняння (7) у внутрішності сіткової області  $G_\omega$  і розрізах  $\Gamma_*$ ,  $\Gamma^*$ , крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) апроксимуємо так [8, 9]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma_l^2 \left( k_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \\ & - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \quad \gamma_l^2 \left( k_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (y_{i,j} - \right. \\ & \left. - y_{i,j-1}) \right) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \quad k_{i,j\pm 1/2} = \frac{k_{i,j\pm 1} + k_{i,j}}{2}, \quad (9) \\ & k_{i\pm 1/2,j} = \frac{k_{i\pm 1,j} + k_{i,j}}{2}, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ & l = 2, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n-1}, \quad l = 3; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ & f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad f(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \quad (10) \\ & x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ & x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} & (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - \\ & - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - \\ & - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ & \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2}) \times \\ & \times (x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ & i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \quad (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1})(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + \\ & + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ . Невідому витрату  $Q$  шукаємо за

формулою  $Q = m\Delta\psi$ , де  $\Delta\psi = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta\varphi_l}{\gamma_l}$ ,  $\gamma_l$  — одержуємо на підста-

ві умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, \\
\gamma_2 &= \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j}, \\
\gamma_3 &= \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1, m-1} \gamma_{i,j}, \\
\gamma_{i,j} &= \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}},
\end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \\
b_{i,j} &= \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.
\end{aligned}$$

У процесі ітераційного розв'язку задачі невідомі  $\underline{\varphi}$ ,  $\bar{\varphi}$  шукаємо за формулами:  $\underline{\varphi} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi\gamma_1$ ,  $\bar{\varphi} = \varphi^* - (n_3 + 1)\Delta\psi\gamma_3$ .

Формули для розрахунку швидкості у внутрішніх вузлах сітки запишемо так:

$$(v_x, v_y)_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}),$$

де

$$\begin{aligned}
J_{i,j} &= \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l} \left( (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \right) \times \\
&\quad \times (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), i = \overline{1, n_1}, l = 1; i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1}, l = 2; \\
&\quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, l = 3; j = \overline{1, m-1}.
\end{aligned}$$

Аналогічно [6] шукаємо швидкості на розрізах  $\Gamma_*$ ,  $\Gamma^*$  та на інших ділянках границі даної області. Згідно з (8) маємо формулу для наближеного розрахунку часу проходження частинкою шляху вздовж  $j$ -тої лінії течії від  $i_*$ -ї до  $i^*$ -ї еквіпотенціалі:

$$t_{j(i_*, i^*)} = a \sum_{i=i_*}^{i^*} \frac{k_{i,j} \Delta_i \varphi}{v^2(x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j))}, \quad j = \overline{0, m}, (i_*, i^*) = \overline{0, n} \text{ (зокрема,}$$

$t_{j(0,n)}$  — час руху частинки рідини від нагнітальної свердловини до експлуатаційної).

**Алгоритм розв'язку різницевої задачі (9)—(12):** Задаємо геометричну конфігурацію фізичної області  $G_z$ ; параметри розбиття  $n_1, n_2, n_3$ , та  $m$  відповідної області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  деякої сіткової області  $G_\omega^I$  (параметри необхідної точності роботи алгоритму  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  та рівень квазіконформності  $\delta_*$  відображення), початкове наближення координат граничних вузлів  $x_{i,j}^{(0)}$  та  $y_{i,j}^{(0)}$ , задаємо так щоб виконувалися умови (10) та початкові значення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ , знаходимо початкове наближення витрати  $Q^{(0)}$  та  $\underline{\varphi}^{(0)} = \varphi_* + \frac{\varphi^* - \varphi_*}{3}$ ,

$\bar{\varphi}^{(0)} = \varphi^* - \frac{\varphi^* - \varphi_*}{3}$ . Уточнюємо координати внутрішніх вузлів динамічної сітки  $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$  за формулами, отриманими шляхом розв'язання (9) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$  (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використаємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Після цього, як і в [6], «підправляємо» граничні вузли (координати цього вузла підправляємо за умови фіксації сусідніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (11). Знаходимо нове наближення величин  $Q, \underline{\varphi}, \bar{\varphi}$  використовуючи значення квазіконформного інваріанту, знайдене за формулами (12). Якщо зміна невідомої величини  $Q$  за останню проведenu ітерацію більша за  $\varepsilon_1$ , то повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів. Визначаємо величину зміщення вузлів  $S$  на границі за проведenu  $\kappa$ -ту загальну ітерацію за формулою

$$S = \max_{i,j} \sqrt{\left(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)}\right)^2 + \left(y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)}\right)^2}$$
 і, якщо вона більша за  $\varepsilon_2$ ,

то повертаємося до уточнення внутрішніх вузлів, в протилежному випадку — оцінюємо ступінь квазіконформності  $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$  отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізи-



чну область із розрізами вздовж ліній течії, де  $\delta_1, \delta_2$  — нев'язки апроксимацій рівнянь (3):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|,$$

$$i = \overline{1, n_1}, l = 1; i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1}, l = 2; i = \overline{n_1+n_2+1, n-1},$$

$$l = 3; j = \overline{1, m-1}.$$

Використовуючи одержані значення  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ , знаходимо  $v_{i,j}^2 = v^2(x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j)) = (v_x^2 + v_y^2)_{i,j}$ , а також  $t_{i,j} = \Phi(\varphi_i, \psi_j)$ . Якщо час  $t = t_p$  є заданим (а саме, якщо  $\bar{t}_{l,j} < t_p < \bar{t}_{l+1,j}$ ), то відповідне йому значення квазіпотенціалу  $\bar{\varphi}_{p,j}$  знаходимо, наприклад, виходячи з пропорції  $\frac{\varphi_{l+1,j} - \varphi_{l,j}}{\bar{t}_{l+1,j} - \bar{t}_{l,j}} = \frac{\varphi_{l+1,j} - \bar{\varphi}_{p,j}}{\bar{t}_{l+1,j} - t_p}$ . Аналогічно в області  $G_z$  будуємо прообрази  $(x_{p,j}, y_{p,j})$  точок  $(\bar{\varphi}_{p,j}, \psi_j)$  (при цьому можемо використовувати як, аналогічну до попередньої, «просторово-часову» пропорцію, так і просторову). У результаті маємо наближення лінії розділу  $\Gamma_{t_p}$  при  $t = t_p$ . Далі збільшуємо час на  $\Delta t$  та повторюємо кроки алгоритму.

Якщо  $\delta \geq \delta_*$ , то збільшуємо кількість вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega^l$ .

**Комп'ютерна реалізація алгоритму та числові приклади.** Вище описаний алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. Продемонструємо його можливості на тестовому прикладі, коли,  $x^*(t) = 0.2 \cos(t) - 1$ ,  $y^*(t) = 0.2 \sin(t)$ ,  $x^*(t) = 0.2 \cos(t) + 1$ ,  $y^*(t) = 0.2 \sin(t)$ ,  $x_0(t) = 3 \cos(t)$ ,  $y_0(t) = 2 \sin(t)$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ ,  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 1$ ,  $a = 1$ ,  $k_o = 0.6$ ,  $k_w = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\Delta t = 0.001$ . Відповідна динамічна сітка у випадку  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 20 \times 80 \times 20 \times 87$  зображена на рис. 2, де жирною лінією виділено границю розділу рідин в момент часу  $t = \Phi(\varphi^*, \psi) = 0.37$  (час початку «заводнення» експлуатаційної свердловини). На рис. 3 зображена залежність від часу повної фільтр-

раційної витрати  $Q(t)$  та частки витісняючої рідини (води)  $\tilde{Q}(t)$  у повній витраті.

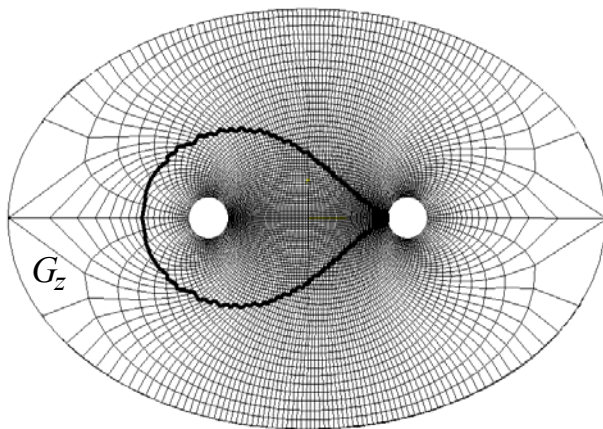


Рис. 2. Динамічна сітка для еліптичного пласта з двома свердловинами в момент часу  $t = 0.37$

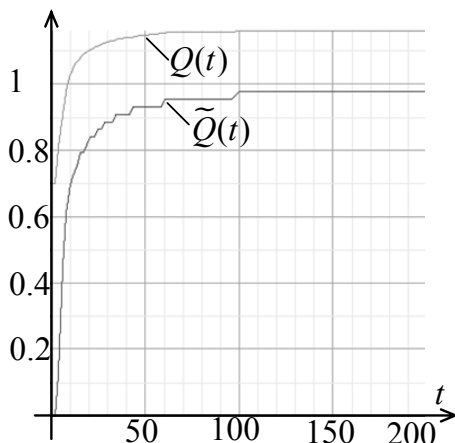


Рис. 3. Зміна в часі величин  $Q(t)$ ,  $\tilde{Q}(t)$

**Висновок.** На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено алгоритм числового розв'язання задачі про витіснення однієї рідини іншою, який автоматично вирішує проблему побудови гідродинамічної сітки, знаходження точок «призупинки» («розходження») та «сходження» течії), частки витісняючої рідини (води) у загальній фільтраційній витраті (зокрема, час початку та повного обводнення

експлуатаційної свердловини). Запропонований комплексний підхід відшукування положення невідомої границі розділу рідин враховує фізичні аспекти процесу руху частинок, що відбувається вздовж ліній течії, які знаходяться в процесі ітераційного розв'язку задачі. Особливо актуальним є можливість встановлення часу, коли заводненість пласта перевищує встановлену норму, а це, в свою чергу, означає, що подальша експлуатація свердловини економічно не вигідна і необхідною її зупинити, або ж провести водоізоляційні роботи [10].

### Список використаних джерел:

1. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. — Society for Industrial and Applied Mathematic. — 2006. — 531 p.
2. Currie I. G. Fundamental Mechanics of Fluids / I. G. Currie. — New York, Marcel Dekker, Inc. — 2003. — 525 p.
3. Тумашев Г. Г. К задаче о стягивании контура нефтеносности / Г. Г. Тумашев // уч. зап. КГУ: 113, кн. 10. — 1953. — С. 133—137.
4. Булыгин В. Я. К задаче об управлении движением контура нефтеносности / В. Я. Булыгин // уч. зап. КГУ: 115, кн. 12. — 1955. — С. 85—97.
5. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечкий. — К. : Наук. думка, 2007. — 308 с.
6. Бомба А. Я. Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху лінії розділу різнокольорових рідин / А. Я. Бомба, С. В. Ярошак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). — Рівне : РДГУ, 2009. — С. 20—35.
7. Лаврентьев М. А. Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1973. — 736 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.
9. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. — М. : Наука, 1977. — 456 с.
10. Газизов А. Ш. Повышение эффективности разработки нефтяных месторождений на основе ограничения движения вод в пластах / А. Ш. Газизов, А. А. Газизов. — М. : ООО «Недра-Бизнесцентр», 1999. — 285 с.

The algorithm of numerical solution of inverse model boundary problems such as "The injection and production wells" on quasiconformal mappings, which automatically solves the problem of constructing a uniform hydrodynamic grid, finding the position of the boundary between fluids at different times and the proportion of the displacing fluid (water) in the total filtration flow rate (in particular, the start time and full irrigation development well).

**Key words:** *quasiconformal mappings, separation line, hydrodynamic mesh, boundary problems, the displacement*

Отримано 26.04.10