

УДК 004.942.001

Л. О. Митько^{*}, канд. фіз.-мат. наук,

С. А. Положаєнко^{**}, д-р техн. наук,

М. Г. Сербов^{***}, канд. техн. наук

^{*} Інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України, м. Київ,

^{**} Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса,

^{***} Одеський державний екологічний університет, м. Одеса

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ХВИЛЕУТВОРЕННЯ ПРИ ДОННИХ ЗРУШЕННЯХ В МІЛКОВОДИХ АКВАТОРІЯХ

Запропоновано динамічну модель хвилеутворення, зумовленого донними зрушеннями у мілководних акваторіях. Інваріантне представлення моделі дозволяє подати її розв'язки у інтегральній формі, використовуючи апарат характеристик. Модель орієнтовано на гідравлічний розрахунок хвилі по заданих збудженнях вільної хвилі (наприклад, в результаті підводного землетрусу), а також на розв'язання зворотних задач, які інтерпретують процес збудження хвилі заданої мареограми.

Ключові слова: динамічна модель хвилеутворення, донні зсуви, хвиля заданої мареограми, задача відновлення зсуву дна.

Відхилення вільної поверхні води в довільній точці великої водної акваторії можуть бути зареєстровані шляхом безпосередніх вимірювань. Відповідні служби спостереження формують записи у вигляді мареограми, що є розгорткою за часом амплітуди хвилі, знятої в заданій точці за просторовими змінними. Така експериментальна інформація може бути використана як для отримання і перевірки адекватності динамічних моделей водної поверхні, так і для розв'язування деяких зворотних задач, наприклад, задачі хвилеутворення, викликані донними зрушеннями природного або штучного походження.

Аналіз літературних джерел [1—3] показує, що і дотепер замало адекватних моделей хвилеутворення за заданими збудженнями вільної хвилі, зумовленої зсувами дна тої або іншої природи.

1. Динамічна модель “мілкої води” у водоймах

Нехай у декартовій системі координат $\{s_1, s_2, z\}$, $s = (s_1, s_2)$, площина співпадає з рівнем незбудженої водної поверхні; вісь Oz направлена вертикально вгору; збудження дна задається співвідношенням $z = -h(s, t)$, де t — астрономічний час перебігу процесу; $z = V(s, t)$ — вільна поверхня води; $v(s, t)$ — швидкість зміни вільної поверхні у напрямку осі Oz ; $u(s, t)$ — швидкість зміни вільної

поверхні у напрямку осі Os_2 ; $h(s, t) = h(s) + \gamma(s, t)$, де $h(s)$ — відомий профіль дна океану, $\gamma(s, t)$ — зсув дна; t_0 — початок зсуву; t_T — час закінчення процесу зсуву дна: $\gamma(s, t_0) = 0$.

Відомо [1—3], що процес збудження хвилі зсуву дна на міліні може бути описано системою квазілінійних гіперболічних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} V_t + hv_{s_1} + hu_{s_2} &= -\gamma_t - h_{s_1} - h_{s_2} u \\ &= -\gamma_t - (h_{s_1} + \gamma_{s_1})v - (h_{s_2} + \gamma_{s_2})u; \\ v_t + gV_{s_1} + v \cdot v_{s_1} + u \cdot u_{s_1} &= 0; \\ u_t + gV_{s_2} + v \cdot v_{s_2} + u \cdot u_{s_2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де g — прискорення вільного падіння. Для системи (1) визначені початкові умови

$$V(s, t_0) = v(s, t_0) = u(s, t_0) = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) розглядається в довільній смузі по s та $t \in [t_0, t_1]$. Подальше розповсюдження хвилі при $t \geq t_T$ визначається розв'язком тих самих рівнянь (1) при $\gamma = 0$ з початковими умовами в момент часу $t = t_\gamma$, підрахованими в результаті розв'язку задачі Коші (1), (2). При відносно малому часі t_T добутками похідних від V, v, u, γ на ці ж функції можна знехтувати і, в результаті, одержати лінійну модель збудження хвилі зсуву дна на міліні:

$$V_t + hv_{s_1} + hu_{s_2} = -\gamma_t - h_{s_1} - h_{s_2} u; v_t + gV_{s_1} = 0; u_t + gV_{s_2} = 0, \quad (3)$$

яка, як показують численні експерименти [4], цілком адекватна реальній ситуації. Далі, двовимірну модель (3) розглянемо в циліндричному перерізі уздовж деякого фіксованого s_2 і покладемо $s_1 = s$ — одновимірному лінійному розміру. В результаті одержимо вихідну, для подальших досліджень, математичну модель збудження хвилі зсуву дна:

$$\begin{aligned} V_t + h(s)v_s = -h_s(s)v - \gamma_t; v_t + gV_s = 0; V(s, t_0) = v(s_\gamma, t_0) = 0, \\ t \in [t_0, t_\gamma]. \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки $h(s) > 0$ і корені характеристичного визначника системи (4) обчислюються за формулою $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{gh(s)}$, то модель (4) є системою двох лінійних, строго гіперболічних, рівнянь в частинних похідних з умовами Коші. Для подальшого нам зручно записати цю систему в інваріантній формі [4]. Введемо до розгляду інваріанти Рімана $x_1 = x_1(s, t)$, $x_2 = x_2(s, t)$, поклавши

$$\begin{aligned}x_1(s, t) &= \sqrt{g} V(s, t) + \sqrt{h(s)} v(s, t); \\x_2(s, t) &= \sqrt{g} V(s, t) - \sqrt{h(s)} v(s, t).\end{aligned}\quad (5)$$

Зрозуміло, що перетворення (5) є лінійним і виродженим, оскільки допускає зворотний перехід:

$$V(s, t) = \frac{x_1(s, t) + x_2(s, t)}{2\sqrt{g}}; \quad v(s, t) = \frac{x_1(s, t) - x_2(s, t)}{2\sqrt{h(s)}}. \quad (6)$$

Використовуючи співвідношення (5), (6), нескладно переконатися у тому, що модель (4) еквівалентна наступній задачі Коші для системи напівлінійних (в даному випадку — лінійних) гіперболічних рівнянь інваріантного вигляду, записаних у векторній формі:

$$x_t + \Lambda(s, t)x_s = f(x, u, s, t); \quad x(s, t_0) = x^0(s), \quad t \in [t_0, t_\gamma]. \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned}x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda(s) & 0 \\ 0 & -\lambda(s) \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; \\ \lambda(s) &= \sqrt{gh(s)}; \quad u(s, t) = \gamma_t(s, t); \\ f_1 &= f_2 = -a(s)(x_1 - x_2) - \sqrt{g} u(s, t); \\ a(s) &= \frac{\sqrt{g} h_s(s)}{4\sqrt{h(s)}}; \quad x^0(s) = 0; \quad \gamma(s, t_0) = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Перевага інваріантної моделі (7), в порівнянні з вихідною (4), полягає у тому, що її розв'язки можна легко подати в інтегральній формі, використовуючи апарат характеристик [4]. Нехай $s = s_1(\xi, \tau, t)$ і $s = s_2(\xi, \tau, t)$ — розв'язки звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{ds}{dt} = \lambda(s); \quad \frac{ds}{dt} = -\lambda(s),$$

які проходять через деяку точку (ξ, t) , тобто такі, що задовольняють початковим умовам $s_i(\xi, \tau, t)$, $i = 1, 2$. Тоді розв'язки системи (7) можна подати у вигляді

$$x_i(s, t) = \int_{t_0}^t f_i(x, u, \xi, \tau) \Big|_{\xi=s_i(s, t, \tau)} d\tau, \quad i = 1, 2.$$

Тому, якщо всередині області залежності розв'язку

$$G(s, t) = \{(\xi, \tau) : s_1(s, t, \tau) \leq \xi \leq s_2(s, t, \tau), \quad t \leq \tau \leq t\}$$

немає зсуву дна, тобто $u(s, t) = 0$, $(s, t) \in G(s, t)$, то розв'язок системи (7), (8) (а, отже, і системи (4)) залишаються в точці (s, t) незбудженими; $x(s, t) = 0$. Ця властивість розв'язку моделі "мілкої води" добре узгоджується із законом розподілу збуджень у спокійному середовищі, згідно якого хвиля, викликана зсувом дна, розповсюджується із швидкістю звуку у воді. Звідси функція $\lambda(s)$ в рамках моделі "мілкої води" характеризує швидкість розповсюдження збуджень в точці s , а функції $s_i(\xi, t, \tau)$, $i = 1, 2$ — траєкторій, за якими розповсюджуються збудження в площині змінних (s, t) .

З приведених міркувань виходить, що будь-який зсув дна, який розподілено в обмеженій області, викликає хвилю, яка розповсюджується від епіцентру землетрусу із швидкістю звуку у воді, і, через обмеженість швидкості звуку, область розповсюдження збудженої вільної поверхні води за кінцевий проміжок часу залишається кінцевою, тобто поза цією областю немає збудження вільної поверхні. Тому до задачі Коші (7), (8) додаються "природні" умови, необхідні при дослідженні задач оптимального управління, які інтерпретують зворотний процес збудження хвилі в рамках моделі (7), (8).

Квазілінійна модель "мілкої води", записана в циліндричному перерізі, одержана із системи (1):

$$V_t + vV_s + (V + h + \gamma)v_s = -\gamma_t - (h_s + \gamma_s)v; \quad v_t + gV_s + vv_s = 0; \quad (9)$$

$$V(s, t_\gamma) = v(s, t_\gamma) = 0, \quad t \in [t_0, t_\gamma], \quad t_\gamma \geq t_0. \quad (10)$$

Точність цієї моделі гарантується [1—3] за наявності "великого" часу і її можна використовувати для гідравлічного розрахунку хвилі, коли зсув дна вже закінчився ($\gamma(s, t) = 0$, $t \in [t_\gamma, t_V]$) і замість початкових умов (10) задані збудження вільної поверхні при $t = t_\gamma$;

$V(s, t_\gamma)$, $v(s, t_\gamma)$, одержані: або в результаті розв'язку прямої задачі (7), (8), або в результаті розв'язку задачі (9), (10). За допомогою цієї моделі можна також розрахувати збудження вільної поверхні до кінця зсуву дна: $V(s, t_\gamma)$, $v(s, t_\gamma)$ за заданими збудженнями вільної поверхні у момент часу $t = t_\gamma$.

Квазілінійна модель (9) використовується при постановці задач відновлення зсуву дна, що викликає хвилю заданої мареограми. Тому, як і в лінійній моделі, визначимо для неї характеристики, які позначатимемо $s_i(\xi, \tau, t)$, $i = 1, 2$, на відміну від характеристик лінійної моделі. При цьому розглянемо дві можливі постановки зворотної задачі.

2. Задача відновлення зсуву дна, що викликає хвилю заданого профілю.

Процес збудження хвилі зсувом дна описується рівняннями (4) або еквівалентними їм рівняннями (7), (8). У момент закінчення зсуву t_γ задано піднесення вільної поверхні води у вигляді відомої функції $y = y(s)$, $y(s) \equiv 0$, $s \leq s_0, s \geq s_1$, де s_0, s_1 — початок і кінець збудження вільної поверхні. Якщо піднесення $\tilde{y}(s)$ вільної поверхні задано у момент часу $t_\gamma > t_\gamma$: $\tilde{y}(s) \equiv 0$, $s > s_1$, $s < s_0$, то, піднесення $y(s)$ до моменту часу $t = t_\gamma$ можна переобчислити, використовуючи квазілінійну модель (9) розподілу хвилі. В цьому випадку $s_0 = \tilde{s}_2(\tilde{s}_0, t_\eta; t_\gamma)$, $s_1 = \tilde{s}_1(\tilde{s}_1, t_0; t_\gamma)$, де $\tilde{s}_2(\tilde{s}_0, t_\eta; t_\gamma)$, $\tilde{s}_1(\tilde{s}_1, t_0; t_\gamma)$ — характеристики квазілінійної моделі, визначені в точках (\tilde{s}_0, t_η) , (\tilde{s}_1, t_γ) відповідно. Графічно цю ситуацію відображено на рис. 1.

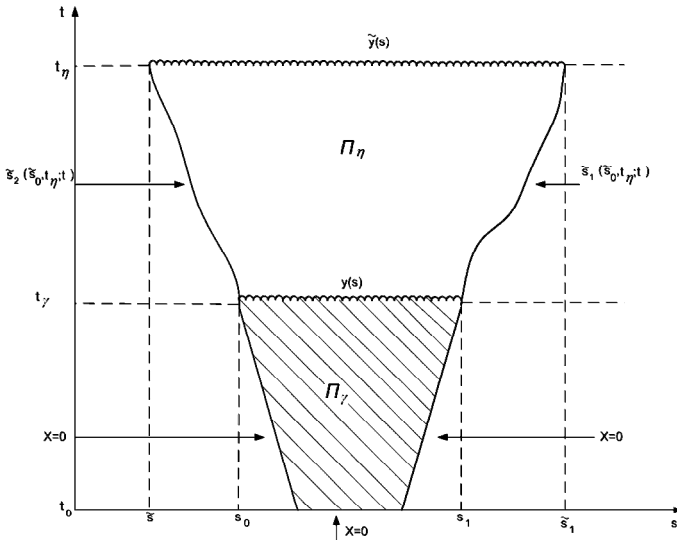


Рис. 1. Моделювання хвилеутворення за квазілінійною моделлю виду (9)

Необхідно знайти такий зсув дна $\gamma(s, t) = V(s, t)$, $\gamma(s, t_0) = 0$, при якому, у момент часу $t = t_\gamma$, розв'язок систем (7), (8) задовольняє рівності

$$\frac{x_1(s, t_\gamma) + x_2(s, t_\gamma)}{2\sqrt{g}} = y(s).$$

Можна сформулювати відповідну задачу оптимального управління. Перш за все, визначимо область Π_γ розв'язку системи (7), (8). Оскільки всюди поза відрізком $[s_0, s_1]$ поверхня води у момент часу $t = t_\gamma$ незбуджена, то областю визначення розв'язку системи (7), (8) є область

$$\Pi_\gamma = \left\{ (s, t) : s_2(s_0, t_\gamma; t) \leq s \leq s_1(s_1, t_\gamma; t), t \in [t_0, t_\gamma] \right\}, \quad (11)$$

де $s = s_1(s_0, t_\gamma; t)$, $s = s_2(s_1, t_\gamma; t)$ — перша і друга характеристики системи (7), (8), які визначені в точках (s_0, t_γ) , (s_1, t_γ) відповідно:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1(s_1, t_\gamma; t)}{dt} &= \lambda(s_1(s_1, t_\gamma; t)), \quad s_1(s_1, t_\gamma; t) = s_1; \\ \frac{ds_2(s_0, t_\gamma; t)}{dt} &= -\lambda(s_2(s_0, t_\gamma; t)), \quad s_2(s_0, t_\gamma; t) = s_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Звідси, на додаток до умов Коші, в системі (7), (8) виникають “природні” граничні умови:

$$x_2(s_1(s_1, t_\gamma; t), t) = x_1(s_2(s_0, t_\gamma; t), t) = 0, \quad t \in [t_0, t_\gamma]. \quad (13)$$

Таким чином, в області Π_γ визначені стан $x = x(s, t)$ та управління процесом $u = u(s, t)$. Зв'язок між станом і управлінням задано початково-граничною задачею (7), (8), (13). Кусково-неперервні функції $u = u(s, t)$ (враховуємо, що $u = \gamma_1$, $\gamma(s, t_0) = 0$) задовольняють обмеженням $u = u(s, t) \in U$, якими зумовлено додаткову фізичну інформацію, що звужує клас можливих зсувів дна. Необхідно віднайти таке припустиме управління $u^* = u^*(s, t)$, на якому функціонал

$$I(u) = \int_{s_0}^{s_1} \left(x_1(s, t_\gamma) + x_2(s, t) - 2\sqrt{g} y(s) \right)^2 ds, \quad (14)$$

визначений на розв'язках системи (7), (8), (13), досягає якнайменшого значення. Якщо $I(u^*) = 0$, то ми знайшли зсув дна, яка викликає хвилю заданого профілю. Якщо $I(u^*) > 0$, то це означає, що в даному класі припустимих зсувів розв'язок зворотної задачі не існує і, отже, потрібно розширювати клас зсувів, тобто послабляти обмеження, що накладаються на характер зсувів. У цьому полягає основна перевага інтерпретації зворотної проблеми цунамі, як задачі оптимального управління.

3. Задача відновлення зсувів дна, що викликає хвилю заданої мареограми.

Вважатимемо, що процес збудження хвилі зсувами дна за малий час дії зсуву $(t_\gamma - t_0)$ описується лінійною системою гіперболічних рівнянь (7), (8), а процес розповсюдження хвилі при $t > t_\gamma$ — квазілінійною системою (9) при $\gamma(s, t) \equiv 0$, для якої початковими умовами у момент часу $t = t_\gamma$ є значення $V(s, t_\gamma)$, $v(s, t_\gamma)$, підраховані в результаті розв'язання системи (7), (8). Далі припустимо, що в деякій точці \bar{s} розташовано мареограф, який фіксує мареограму хвилі протягом деякого часу $[t, t_V]$ у вигляді відомої функції $z(t)$ такої, що $z(t) \equiv 0$ при $t \leq \bar{t}$. Для визначеності припустимо, що епіцентр землетрусу знаходиться праворуч від точки \bar{s} . Крім того, відомо час початку і кінця землетрусу, тобто моменти часу t_0 і t_γ . Природно припустити, що хвиля приходить в точку \bar{s} з деяким запізненням у порівнянні з моментом початку землетрусу, тобто $t_0 < \bar{t}$. Також, природно, вважати, що $t_V > t_\gamma$. Тепер, залежно від розташування точок t_γ і \bar{t} , виникають три варіанти визначення області Π_γ розповсюдження хвилі за квазілінійним законом (9) і області Π_γ , де визначено лінійний керований процес (7), (8). Ці варіанти графічно зображено на рис. 2 — рис. 3.

Нагадаємо, що s_i — характеристики лінійної системи, а \tilde{s}_i — характеристики квазілінійної системи, $i = 1, 2$. Порядок обчислення характеристик таких.

Рис. 2, а:

$$\begin{aligned} \text{I: } s &= \tilde{s}_2(\bar{s}, t_V; t); \text{ II: } s = \tilde{s}_2(\bar{s}, t_\gamma; t), \quad s = \tilde{s}_2(\bar{s}, t_V; t_\gamma); \\ \text{III: } s &= s_2(\bar{s}, \bar{t}; t); \text{ IV: } s = \tilde{s}_2(\hat{s} t_\gamma; t), \quad \hat{s} = s_2(\bar{s}, \bar{t}; t_\gamma); \\ \text{V: } s &= \tilde{s}_1(\bar{s}, t_V; t) \end{aligned}$$

Рис. 2, б:

$$\begin{aligned} \text{I: } s &= \tilde{s}_2(\bar{s}, t_V; t); \text{ II: } s = s_2(\tilde{s}, t_\gamma; t), \quad \tilde{s} = \tilde{s}_2(\bar{s}, t_V; t_\gamma); \\ \text{III: } s &= s_2(\bar{s}, t_\gamma; t), \quad t \in [t_0, t_\gamma]; \text{ IV: } s = \tilde{s}_2(\bar{s}, t_\gamma; t), \quad t \in [t_\gamma, t_\eta]; \\ \text{V: } s &= \tilde{s}_1(\bar{s}, t_V; t) \end{aligned}$$

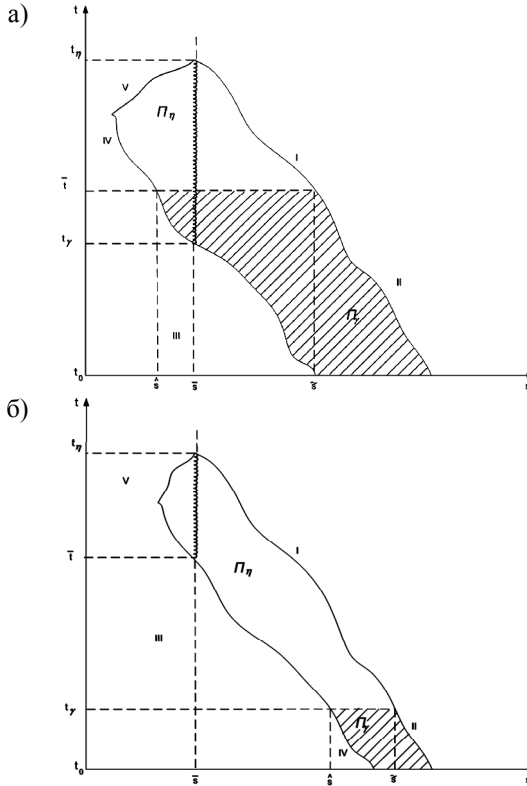


Рис. 2. Відновлення зсувів дна, які викликають хвилю заданої мареографи при розташуванні мареографу у зоні землетрусу.

На рис. 2 відображено ситуацію, коли мареограф розташований в зоні дії землетрусу, що маловірогідно. Найбільш вірогідний третій варіант, зображений на рис. 3:

$$\begin{aligned}
 \text{I: } & s = \tilde{s}_2(\bar{s}, t_\gamma; t); \quad t \in [t_\gamma, t_\gamma]; \\
 \text{II: } & s = s_2(\tilde{s}, t_\gamma; t), \quad \tilde{s} = \tilde{s}_2(\bar{s}, t_\gamma; t_\gamma), \quad t \in [t_0, t_\gamma]; \\
 \text{III: } & s = \tilde{s}_2(\bar{s}, \bar{t}; t), \quad t \in [t_\gamma, t_\eta]; \\
 \text{IV: } & s = s_2(\tilde{s}, t_\gamma; t), \quad \tilde{s} = \tilde{s}_2(\bar{s}, \bar{t}; t_\gamma), \quad t \in [t_0, t_\gamma]; \text{ V: } s = \tilde{s}_1(\bar{s}, t_\gamma; t).
 \end{aligned}$$

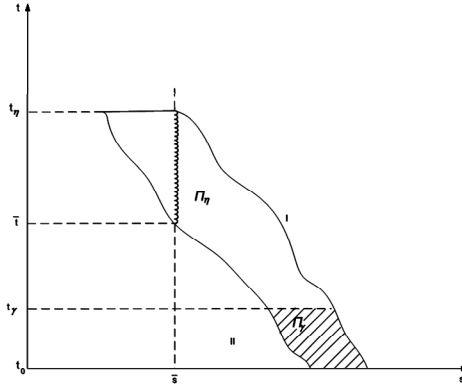


Рис. 3. Відновлення зсувів дна, що викликають хвилю заданої мареографи при розташуванні мареографу поза зоною землетрусу

Скрізь, поза область, обмежену лініями I—V, немає збудження вільної поверхні при тому ж самому зсуві, який викликає в точці \bar{s} хвилю заданої мареограми $z(t) = 0$ при $t \geq t_\gamma$ і $t \leq \bar{t}$. Звідси, в системах (7)—(9), виникають “природні” граничні умови, які полягають у тому, що розв’язок систем (7)—(9) тотожно дорівнює нулю уздовж тих характеристик, за допомогою яких будуються лінії I—V, що обмежують область визначення процесу $\Pi = \Pi_V \cup \Pi_\gamma$. Тепер зворотну задачу можна сформулювати таким чином.

У області Π_γ необхідно віднайти такий зсув дна $\gamma_i(s, t) = u(s, t)$, $\gamma(s, t_0) = 0$, за якого розв’язок лінійної системи (7), (8) з “природними” граничними умовами, що підставлено при $t = t_\gamma$ буде початковою умовою для квазілінійної системи (9) при $\gamma(s, t) \equiv 0$ і своїми, “природно” граничними умовами, причому такими, для яких розв’язки системи (9) мають властивість

$$V(\bar{s}, t) = z(t), \quad t \in [\bar{t}, t_\gamma]. \quad (15)$$

Мовою математичної теорії оптимального управління ця задача формулюється таким чином. Нехай Π_γ — область визначення управляючої функції $u = u(s, t)$ з класу кусково-неперервних і таких, які задовольняють умовам типу включення ($u(s, t) \in U$), а також таких, в яких міститься додаткова фізична інформація, що звужує клас можливих зсувів дна $\gamma(s, t)$, $\gamma = u$. Зв’язок між станом процесу $x(s, t)$ і управлінням $u(s, t)$ задано у вигляді задачі Коші (7), (8) для лінійної системи гіперболічних рівнянь з додатковими “природними”

граничними умовами. Розв'язок даної задачі за будь-якого припустимого управління у момент часу $t = t_\gamma$ є початковою умовою для квазіоптимальної, вже некерованої, системи гіперболічних рівнянь (9) (при $\gamma(s, t) \equiv 0$) зі своїми “природно” граничними умовами. На розв'язках цих двох систем визначено функціонал

$$I(u) = \int_{\bar{t}}^{t_\eta} [\eta(s, t) - z(t)]^2 dt \rightarrow \min. \quad (16)$$

Управління $u^*(s, t)$, $(s, t) \in \Pi_\gamma$, що дає якнайменше значення (екстремум) функціоналу (16), можна визначити як оптимальне. Якщо $I(u^*) = 0$, то зворотна задача (15) — розв'язана. Далі, якщо $I(u^*) > 0$, то необхідно розширити клас припустимих зсувів і спочатку розв'язувати задачу (16).

Таким чином, наведено динамічні моделі задачі хвилеутворення, яке викликано донними зрушеннями. Також сформульовано задачі та одержано відповідні алгоритми оптимального управління, які інтерпретують проблему відновлення зсувів дна, що викликають хвилю заданої мареограми.

Список використаних джерел:

1. Стокер Дж. Волны на воде / Дж. Стокер. — М. : Изд-во иностр. лит., 1959. — 617 с.
2. Гусяков В. К. Обзор работ по проблеме возбуждения волн цунами / В. К. Гусяков // Методы расчета возникновения и распространения волн цунами. — М. : ин-т океанологии АН СССР, 1978. — С. 18—29.
3. Янушкаушас А. П. Возбуждение волн источниками переменной интенсивности / А. П. Янушкаушас // Методы расчета возникновения и распространения волн цунами. — М. : ин-т океанологии АН СССР, 1978. — С. 100—110.
4. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М. : Наука, 1978. — 668 с.

The dynamic model of the waveeducation conditioned by the ground changes in shallow aquatoriums is offered. Invariant presentation of model allows to represent its upshots in an integral form, using the vehicle of descriptions. A model is oriented to the hydraulic calculation of wave on the set excitations of free wave (for example, as a result of submarine earthquake), and also on the decision of reverse tasks which interpret the process of excitation of wave of set seadescription.

Key words: *dynamic model of waveeducation, ground changes, wave of set seadescription, task of renewal of change of bottom.*

Отримано: 25.11.2009