



УДК 62-50.517.9.519.534.1

© 2007

Член-корреспондент НАН України А. Е. Божко

О некоторых особенностях в реализации дискретных оптимальных управлений колебательными системами

The algorithms of the optimal and quasioptimal controls over oscillatory systems are generalized. The peculiarities of a realization of these algorithms with due regard for a special expansion of the step functions of optimal control are given.

На основе работ [1, 2] в [3, 4] осуществлен синтез оптимальных и квазиоптимальных управлений колебательными системами с любым числом степеней свободы. Алгоритмы этих управлений являются дискретными и имеют вид

$$U_{\text{опт}} = U_{\text{max}} \text{sign}(\bar{x}, t), \quad (1)$$

где U_{max} — максимально возможная величина модуля управляющего воздействия; \bar{x} — вектор координатных функций x_1, \dots, x_n ($x_1 = x$; $x_2 = \dot{x}$; $x_3 = \ddot{x}$ и т. д.); t — время.

Как видно из (1), данное управление является дискретным с моментами переключения полярности U_{max} в точках, когда $f(\bar{x}, t) = 0$. В этих точках $U_{\text{опт}}$ скачком переходит из положения $\pm U_{\text{max}}$ в положение $\mp U_{\text{max}}$, т. е. в моменты переключения (при $f(\bar{x}, t) = 0$) $U_{\text{опт}} = U_{\text{max}}1(-t_n)$ или $U_{\text{опт}} = -U_{\text{max}}1(t - t_n)$, где $1(t - t_n)$ — единичная функция; t_n — момент переключения $U_{\text{опт}}$.

В соответствии с решением, использующим принцип максимума [2] для колебательных систем (КС) с одной, двумя и n степенями свободы, алгоритмы оптимального управления имеют общий вид соответственно [4, (5.9), (5.16), (5.25)]

$$F_{i\text{опт}}(t) = F_{i0} \text{sign} \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^n C_{k\Psi} e^{-\alpha_k \Psi t} \sin(\beta_k \Psi t + \varphi_{k\Psi}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Величины, входящие в (2), расшифрованы в [4]. Метод моментов позволил синтезировать алгоритм оптимального управления КС с любым числом степеней свободы в виде [4, (5.75)]

$$F_{k\text{опт}}(t) = F_{k\text{max}} \text{sign} \frac{1}{m_k} \sum_{s=1}^n A_{sr} e^{-\alpha_s \lambda t} \cos \beta_s \lambda t, \quad (3)$$

где входящие величины даны в [4].

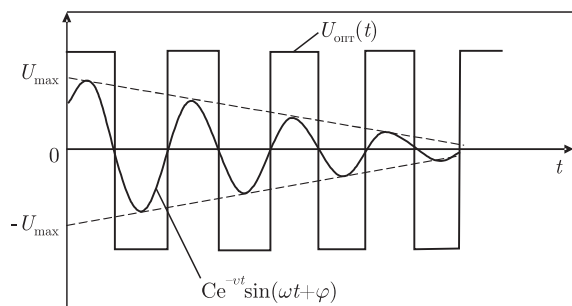


Рис. 1

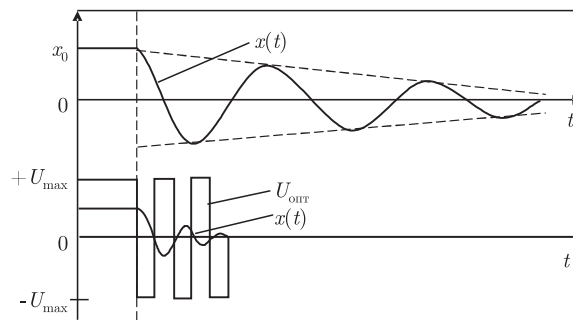


Рис. 2

В работе [4] синтезированы алгоритмы квазиоптимального управления КС также с любым числом степеней свободы. Их общий вид следующий [4, (5.132)]:

$$U_i^0(\bar{\varepsilon}_y) = -U_{i \max}^0 \operatorname{sign} \sum_{j=1}^{2i} k_{j \varepsilon n} \varepsilon_{yj}, \quad (4)$$

где $k_{j \varepsilon n}$ — коэффициенты, расшифрованные в [4]; ε_{yj} — координаты ошибок $\varepsilon_{y1} = \varepsilon_{ya} \sin \omega t$, $\varepsilon_{y2} = \dot{\varepsilon}_{y1}$, $\varepsilon_{y3} = \ddot{\varepsilon}_{y1}$ и т. д.

Выражения (2)–(4) соответствуют алгоритму (1), являются дискретными оптимальными управлениями колебательными системами. Представленные алгоритмы можно свести к такому виду:

$$U_{\text{опт}}(t) = U_{\max} \operatorname{sign} C e^{-\nu t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (5)$$

Данное утверждение основывается на учете тригонометрического преобразования [5]

$$u = a \sin \omega t + b \cos \omega t = A \sin(\omega t + \Psi), \quad (6)$$

где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\Psi = \arctg b/a$. В алгоритмах (2)–(4) под знаком sign стоят суммы тригонометрических функций $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ со своими коэффициентами и углами сдвига. Если использовать правило (6), то, последовательно преобразуя данные алгоритмы, начиная с максимальной координаты, например $x_n = x_{na} \sin(\omega t + \varphi)$, и складывая ее с $x_{n-1} = x_{(n-1)a} \sin(\omega t + \varphi_{n-1})$, а затем полученный результат складывая с $x_{n-2} = x_{(n-2)a} \sin(\omega t + \varphi_{n-2})$ и т. д., в конечном итоге можно получить (5). В дальнейшем будем принимать во внимание алгоритм (5), который при первой видимости графически может быть изображен так, как показано на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что при $C e^{-\nu t} \sin(\omega t + \varphi) = 0$ осуществляется скачкообразное переключение управления с $+U_{\max}$ до $-U_{\max}$ и наоборот, т. е., как было ранее отмечено, в точках переключения $U_{\text{опт}}(t = t_n)$ представляет собой скачкообразные функции $\pm |U_{\max}| \cdot 1(t - t_n)$. Заметим, что при реализации алгоритма (5) в каждой точке переключения $U_{\text{опт}}(t - t_n)$ происходит переходной процесс в колебательной системе КС, который изменяет общую картину $U_{\text{опт}}(t)$ и колебаний КС, изображенную на рис. 1. Подтверждением этому является рис. 2, где на верхнем графике показано затухание колебаний x в свободном переходном процессе при отключении управляющего воздействия. Второй график (внизу) изображает затухание КС при действии оптимального управления $U_{\text{опт}}(t)$, описываемого выражением (5).

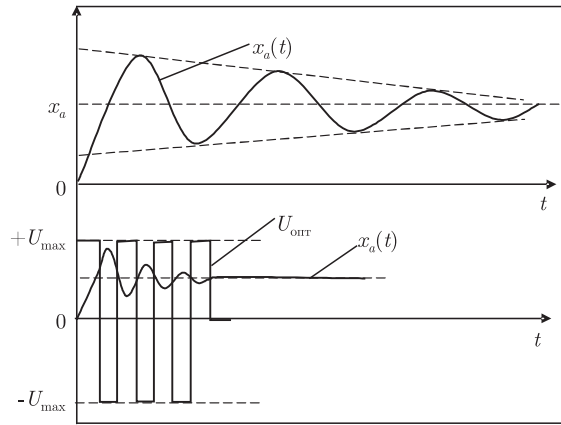


Рис. 3

Как видно из этого графика, при $U = U_{\text{опт}}(t)$ $x(t)$ затухает в пять и более раз быстрее, чем при неуправляемом переходном процессе. Суть действия $U_{\text{опт}}$ состоит в следующем. При подаче на вход КС $-U_{\text{max}}$ система стремится достигнуть нового устойчивого положения, переходя в отрицательную область, но как только КС пересекает линию абсцисс, управляющее воздействие $U_{\text{опт}}$ переключается на $+U_{\text{max}}$. В этом случае КС, все еще переходя через условный для алгоритма (5) ноль, стремится возвратиться в положительную область, но при пересечении $x(t)$ линии абсцисс $U_{\text{опт}}$ переключается на $-U_{\text{max}}$ и КС стремится возвратиться в отрицательную область. С каждым таким следящим за точкой пересечения $x(t)$ с линией абсцисс переключением $U_{\text{опт}}$ КС колеблется с все более затухающей амплитудой и увеличивающейся частотой, т. е. с все меньшим и меньшим полупериодом колебаний. При $x(t) = (0,05 \div 0,1)x_{\text{max}}$ $U_{\text{опт}}$ отключается и $x(t)$ считается погашенным. Если же КС включается на управляющее воздействие, то алгоритм (5) необходимо представить в виде

$$U_{\text{опт}}(t) = U_{\text{max}} \text{sign}[x_a + Ce^{-\vartheta t} \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (7)$$

Покажем преимущество (7) по сравнению с обычным режимом включения КС. Пояснением к этому служит рис. 3, где на верхнем графике изображена кривая изменения амплитуды колебаний при включении КС на постоянное по амплитуде управляющее воздействие U . В этом случае $x_a(t)$ приходит к своему установившемуся значению после погашения свободной составляющей, которая может быть при малом коэффициенте затухания ϑ длительной. На нижнем графике рис. 3 изображена кривая изменения x_a при оптимальном управляющем воздействии (7). Как видно из этого графика, свободная составляющая в $x_a(t)$ затухает значительно быстрее. Заметим, что в последнем случае в момент отключения $U_{\text{опт}}(t)$ включается обычное U , поддерживающее колебания КС с амплитудой x_a . Но при этом переходный процесс такой, как на верхнем графике рис. 3, отсутствует.

Таким образом, видно: для того чтобы оптимальное управление $U_{\text{опт}}$ было именно оптимальным, оно должно следить за переходным процессом КС. А это значит, что при каждом переключении $U_{\text{опт}}$ необходимо рассчитывать поведение КС в переходном процессе, что является, особенно для КС с n степенями свободы, нетривиальной задачей. Решение этой задачи еще более усложняется, если учесть, что скачкообразную функцию $1(t)$ можно представить в виде особого разложения следующим образом [6]:

$$U \cdot 1(t) = E(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t, \quad \sum_{k=1}^n U_{ak} = U, \quad U_{ak} = \frac{U a_1}{\pi \omega_k}, \quad (8)$$

где α — коэффициент затухания; U_{ak} , ω_k — амплитуда и круговая частота k -й гармоники соответственно.

Выражение (8) можно включить в (5) и (7), если их представить в виде

$$U_{\text{опт}}(t) = U_{\text{max}} 1(t) \text{sign} C e^{-\vartheta t} \sin(\omega t + \varphi),$$

$$U_{\text{опт}}(t) = U_{\text{max}} 1(t) \text{sign}[x_a + C e^{-\vartheta t} \sin(\omega t + \varphi)].$$

Тогда получим

$$U_{\text{опт}}(t) = \left[U_{\text{max}}(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right] \text{sign} C e^{-\vartheta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (9)$$

$$U_{\text{опт}}(t) = \left[U_{\text{max}}(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right] \text{sign}[x_a + C e^{-\vartheta t} \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (10)$$

Представление оптимальных управляющих воздействий КС в виде (9) и (10) несколько изменяет вид графиков оптимальных переходных процессов КС, изображенных на рис. 2 и 3 из-за некоторой задержки в начале переходного процесса КС при таком (8) представлении скачкообразной функции $U1(t)$. Доказательство такой задержки дано в работе [6]. При $\alpha = \infty$ этой задержки нет. В принципе при оптимальных управлениях (9), (10) переходные процессы в КС значительно сокращаются по сравнению с режимом неоптимального управления. При наличии встроенного в систему управления вычислительного устройства (компьютера) и системы обратной связи (измерения x_a в динамике) решение задачи о переходных процессах в КС упрощается.

Итак, из отмеченного следует, что получаемые во многих работах дискретные алгоритмы оптимального управления динамическими объектами в вопросе их реализации требуют формирования замкнутости этих объектов обратными измерительными связями при наличии вычислительных средств расчета переходных процессов объектов при скачкообразных входных воздействиях с учетом их особого разложения (6).

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — Москва: Наука, 1968. — 475 с.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — Москва: Наука, 1961. — 384 с.
3. Божко А. Е. Оптимальное управление в системах воспроизведения вибраций. — Киев: Наук. думка, 1977. — 219 с.
4. Божко А. Е. Синтез оптимального управления колебательными системами. — Киев: Наук. думка, 1990. — 164 с.
5. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. — Москва: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956. — 608 с.
6. Божко А. Е. Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях постоянного тока // Доп. НАН України. — 2004. — № 2. — С. 83–87.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 17.04.2006