УДК 517.962.2

Г. П. Пелюх

О линеаризации систем нелинейных функционально-разностных уравнений в окрестности положения равновесия

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

Встановлено умови існування неперервної взаємно однозначної заміни змінних, яка приводить нелінійну систему функціонально-різницевих рівнянь до лінійного вигляду.

Одним из наиболее эффективных методов исследования систем нелинейных разностных уравнений вида

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + F(x(t)) \tag{1}$$

является метод нормальных форм Пуанкаре, позволяющий свести исследование таких систем уравнений в окрестности положения равновесия к исследованию систем уравнений наиболее простого вида. При этом такие наиболее простые формы указываются и зависят от условий, которым удовлетворяют матрица Λ и вектор-функция $F(x)$. К примеру, если все собственные числа матрицы Λ по модулю меньше (или если все больше) единицы и отсутствуют резонансы, вектор-функция $F(x)$ является голоморфной в области $D\colon |x| < a$, $F(0) = 0$, $\left.\dfrac{\partial F(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, то существует замена переменных

$$x = y + \gamma(y),$$

где вектор-функция $\gamma(y)$ является голоморфной в некоторой области $\widetilde{D} \subseteq D$, $\gamma(0) = 0$, $\left.\dfrac{\partial \gamma(y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, приводящая систему уравнений (1) к линейному виду

$$y(t+1) = \Lambda y(t). \tag{2}$$

Этот результат, принадлежащий Пуанкаре [1, 2], положил начало многочисленным исследованиям, направленным на развитие и применение этого метода при изучении других классов уравнений [3–7]. В частности, в [5–7] метод нормальных форм развит для исследования неавтономных разностных уравнений

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + F(t, x(t)) \tag{3}$$

в окрестности положения равновесия $x = 0$ $(F(t, 0) \equiv 0)$ при различных предположениях относительно матрицы Λ и вектор-функции F. Однако в настоящее время существуют уравнения, исследование которых с помощью метода нормальных форм не дает желаемых результатов. К таким уравнениям относятся, в частности, функционально-разностные уравнения вида

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + F(t, x(t), x(f(t))), \tag{4}$$

где Λ — постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, $F\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Эти уравнения исследуются в настоящей работе. При этом главной целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) $\det \Lambda \neq 0$;

2) все элементы вектора $F(t, x, y)$ *и функция* $f(t)$ *являются непрерывными относительно всех своих аргументов в области* $D\colon t \in \mathbb{R}^+$, $|x| < a$, $|y| < a$, $F(t, 0, 0) \equiv 0$;

3) вектор-функция $F(t, x, y)$ *удовлетворяет соотношению*

$$|F(t, x', y') - F(t, x'', y'')| \leqslant \varphi(t)(|x' - x''| + |y' - y''|),$$

где $\varphi(t)$ — *некоторая непрерывная неотрицательная функция такая, что ряд*

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^i \varphi(t + i)$$

равномерно сходится при всех $t \in \mathbb{R}^+$ *и* $2|\Lambda^{-1}|\Phi(t) \leqslant \Delta < 1$.

Тогда существует непрерывная в области $\widetilde{D} \subseteq D$, *взаимно однозначная замена переменных*

$$x(t) = \Gamma(t, y(t)), \tag{5}$$

приводящая систему уравнений (4) *к линейному виду* (2).

Доказательство. Если $x(t)$ — произвольное непрерывное при $t \in \mathbb{R}^+$ решение системы уравнений (4), принадлежащее области D, то вектор-функция

$$y(t) = \widetilde{\Gamma}(t, x(t)) = x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^{-(i+1)} F(t + i, x(t + i), x(f(t + i))) \tag{6}$$

является непрерывным ограниченным при $t \in \mathbb{R}^+$ решением системы уравнений (2). Действительно, в силу условий *1–3* ряд (6) равномерно сходится к некоторой непрерывной вектор-функции $y(t)$ и имеет место соотношение

$$|y(t)| \leqslant |x(t)| + \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i+1} |F(t + i, x(t + i), x(f(t + i)))| \leqslant$$
$$\leqslant |x(t)| + \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i+1} |\varphi(t + i)(|x(t + i)| + |x(f(t + i))|) \leqslant a + a\Delta \leqslant \frac{a}{1 - \Delta}.$$

Далее, поскольку

$$x(t + 1) \equiv \Lambda x(t) + F(t, x(t), x(f(t))),$$

то, принимая во внимание (6), получаем

$$y(t + 1) = x(t + 1) + \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^{-(i+1)} F(t + i + 1, x(t + i + 1), x(f(t + i + 1))) =$$

$$= \Lambda x(t) + F(t, x(t), x(f(t))) + \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda^{-i} F(t+i, x(t+i), x(f(t+i))) =$$

$$= \Lambda \left[x(t) + \Lambda^{-1} F(t, x(t), x(f(t))) + \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda^{-(i+1)} F(t+i, x(t+i), x(f(t+i))) \right] =$$

$$= \Lambda \left[x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^{-(i+1)} F(t+i, x(t+i), x(f(t+i))) \right] = \Lambda y(t),$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что если $y(t)$ — произвольное непрерывное ограниченное при $t \in \mathbb{R}^+$ решение системы уравнений (2), то существует единственная непрерывная ограниченная при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функция $x(t) = \Gamma(t, y(t))$ такая, что $\widetilde{\Gamma}(t, \Gamma(t, y(t))) \equiv y(t)$ и $x(t)$ является решением системы уравнений (4). Для этого, очевидно, достаточно показать, что система уравнений (6) имеет единственное непрерывное решение $x(t)$, удовлетворяющее указанным выше условиям.

С помощью соотношений

$$\begin{aligned} &x_0(t) = y(t), \\ &x_m(t) = y(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^{-(i+1)} F(t+i, x_{m-1}(t+i), x_{m-1}(f(t+i))), \qquad m = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

определим последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, и докажем, что она равномерно сходится при всех $t \in \mathbb{R}^+$ к некоторой непрерывной ограниченной вектор-функции $x(t)$, удовлетворяющей системе уравнений (6). Действительно, поскольку $|y(t)| \leqslant M$ (M — некоторая положительная постоянная такая, что $M/(1-\Delta) < a$), то, принимая во внимание условия *1–3* и соотношения (7), можно последовательно показать, что вектор-функции $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, определены и непрерывны при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Более того, покажем, что при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $m \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|x_m(t)| \leqslant \frac{M}{1-\Delta}. \tag{8}$$

В самом деле, так как оценка (8) выполняется при $m = 0$, то в силу (7) при $m = 1$ получаем

$$|x_1(t)| = |y(t)| + \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i+1} |F(t+i, y(t+i), y(f(t+i)))| \leqslant$$

$$\leqslant M + \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i+1} \varphi(t+i)(|y(t+i)| + |y(f(t+i))|) \leqslant$$

$$\leqslant M + 2M|\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i) \leqslant M + M\Delta \leqslant \frac{M}{1-\Delta},$$

т. е. в этом случае оценка (8) имеет место. Предположим, что она доказана уже для некоторого $m \geqslant 1$ и покажем ее справедливость для $m + 1$. Действительно, в силу (7), (8) и *1–3* находим

$$|x_{m+1}(t)| \leqslant M + \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i+1} |F(t+i, x_m(t+i), x_m(f(t+i)))| \leqslant$$

$$\leqslant M + |\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i)(|x_m(t+i)| + |x_m(f(t+i))|) \leqslant$$

$$\leqslant M + 2\frac{M}{1-\Delta} |\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i) \leqslant M + \frac{M}{1-\Delta}\Delta = \frac{M}{1-\Delta}.$$

Таким образом, оценка (8) справедлива при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $m \geqslant 0$.

Теперь докажем, что последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $m \geqslant 1$ имеет место оценка

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leqslant M\Delta^m. \tag{9}$$

Действительно, в силу (7) и *1–3* при $m = 1$ получаем

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i+1} |F(t+i, y(t+i), y(f(t+i)))| \leqslant$$

$$\leqslant |\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i)(|y(t+i)| + |y(f(t+i))|) \leqslant$$

$$\leqslant 2M|\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i) \leqslant M\Delta$$

и, следовательно, в этом случае оценка (9) имеет место. Рассуждая по индукции, предположим, что она доказана уже для некоторого $m \geqslant 1$ и покажем ее справедливость для $m+1$. В самом деле, принимая во внимание (7), (9) и *1–3*, получаем

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i+1} |F(t+i, x_m(t+i), x_m(f(t+i))) - F(t+i, x_{m-1}(t+i), x_{m-1}(f(t+i)))| \leqslant$$

$$\leqslant |\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i)(|x_m(t+i) - x_{m-1}(t+i)| + |x_m(f(t+i)) - x_{m-1}(f(t+i))|) \leqslant$$

$$\leqslant 2M\Delta^m |\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i) \leqslant M\Delta^{m+1}.$$

Тем самым доказано, что оценка (9) имеет место при всех $t \in \mathbb{R}^+$, $m \geqslant 1$ и, следовательно, последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится при всех

$t \in \mathbb{R}^+$ к некоторой непрерывной вектор-функции $x(t) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t)$, удовлетворяющей условию

$$|x(t)| \leqslant \frac{M}{1-\Delta}$$

(вытекает из (8)). Переходя в (7) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что вектор-функция $x(t) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t)$ является решением системы уравнений (6). Следовательно, вектор-функция $x(t) = \Gamma(t, y(t)) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\widetilde{\Gamma}(t, \Gamma(t, y(t))) \equiv y(t).$$

Покажем, что таким образом построенное решение $x(t) = \Gamma(t, y(t))$ системы уравнений (6) является единственным. Действительно, предположим противное, что существует еще одно непрерывное ограниченное при $t \in \mathbb{R}^+$ решение $\widetilde{x}(t)$ такое, что $\widetilde{x}(t) \neq x(t)$. Тогда в силу *1–3* имеем

$$|x(t)-\widetilde{x}(t)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i+1} |F(t+i, x(t+i), x(f(t+i))) - F(t+i, \widetilde{x}(t+i), \widetilde{x}(f(t+i)))| \leqslant$$

$$\leqslant |\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i)(|x(t+i) - \widetilde{x}(t+i)| + |x(f(t+i)) - \widetilde{x}(f(t+i))|) \leqslant$$

$$\leqslant 2|\Lambda^{-1}| \sum_{i=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{i} \varphi(t+i) \|x(t) - \widetilde{x}(t)\| \leqslant \Delta \|x(t) - \widetilde{x}(t)\|,$$

где $\|x(t) - \widetilde{x}(t)\| = \sup\limits_{t} |x(t) - \widetilde{x}(t)|$. Отсюда следует

$$\|x(t) - \widetilde{x}(t)\| \leqslant \Delta \|x(t) - \widetilde{x}(t)\|,$$

что возможно лишь в случае, когда $x(t) \equiv \widetilde{x}(t)$. Полученное противоречие доказывает, что при выполнении условий *1–3* вектор-функция $x(t) = \Gamma(t, y(t)) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t)$ является единственным непрерывным ограниченным при $t \in \mathbb{R}^+$ решением системы уравнений (6).

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что вектор-функция $x(t) = \Gamma(t, y(t)) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t)$ является непрерывным ограниченным при $t \in \mathbb{R}^+$ решением системы уравнений (4). В самом деле, поскольку

$$x(t) \equiv y(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^{-(i+1)} F(t+i, x(t+i), x(f(t+i))),$$

то имеем

$$x(t+1) \equiv y(t+1) - \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^{-(i+1)} F(t+1+i, x(t+1+i), x(f(t+1+i))) \equiv$$

$$\equiv \Lambda y(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^{-i} F(t+i, x(t+i), x(f(t+i))) + F(t, x(t), x(f(t))) \equiv$$

$$\equiv \Lambda\left[y(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^{-(i+1)} F(t+i, x(t+i), x(f(t+i)))\right] + F(t, x(t), x(f(t))) \equiv$$

$$\equiv \Lambda x(t) + F(t, x(t), x(f(t))),$$

что и требовалось показать. Тем самым теорема полностью доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственных фондов фундаментальных исследований Украины и Беларуси, проект 29.1/025.

1. *Poincaré H.* Sur les courbes definies equations differentielles // J. Math. Ser. 4. – 1886. – **2**. – P. 151–217.
2. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – Москва; Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1947. – 390 с.
3. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 304 с.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1970. – 720 с.
5. *Пелюх Г. П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Дифференц. уравнения. – 1996. – № 2. – С. 304–312.
6. *Пелюх Г. П.* О структуре общего решения систем нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1999. – № 10. – С. 1368–1378.
7. *Пелюх Г. П.* Общее решение систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Там же. – 2000. – № 7. – С. 936–953.

Институт математики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 29.12.2008

G. P. Pelyukh

On the linearization of a system of nonlinear functional-difference equations in a neighbourhood of the equilibrium

We establish conditions for the existence of a continuous one-to-one change of variables transforming a nonlinear system of functional-difference equations to that of a linear form.