УДК 517.954

М. М. Копець

Перенесення початкової умови для рівняння теплопровідності

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

Для рівняння теплопровідності запропоновано алгоритм перенесення початкової умови. Цей алгоритм забезпечує стійкість процедури перенесення початкової умови.

Розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > t_0 > 0, \tag{1}$$

де невідома функція $u(x,t)$ задовольняє початкову

$$\int\limits_0^l \psi_0(x) u(x,t_0)\, dx = \lambda_0 \tag{2}$$

та крайову умови

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3}$$

Функції $f(x,t)$, $\psi_0(x)$ вважаються заданими неперервними функціями своїх аргументів, числа a, l, t_0, λ_0 також задані.

Означення. Початкова умова (2) називається перенесеною з точки t_0 в деяку точку $t > t_0$, якщо можна знайти незалежно від функції $u(x,t)$ такі функції $\psi(x,t)$ та $\lambda(t)$, які задовольняють відповідно умови $\psi(x,t_0) = \psi_0(x)$, $\lambda(t_0) = \lambda_0$, і такі, що для будь-якого $t \neq t_0$ виконується рівність

$$\int\limits_0^l \psi(x,t) u(x,t)\, dx = \lambda(t). \tag{4}$$

Безпосередньо з рівності (4) із врахуванням (1) та (3) отримаємо

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \int\limits_0^l \left[\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} u(x,t) + \psi(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] dx =$$

$$= \int\limits_0^l \left[\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} u(x,t) + a^2 \psi(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \psi(x,t) f(x,t)\right] dx =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} u(x,t) + a^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} u(x,t) + \psi(x,t) f(x,t)\right] dx = \int_0^l \psi(x,t) f(x,t)\, dx,$$

якщо функція $\psi(x,t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{5}$$

та крайові умови

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0. \tag{6}$$

Одержаний результат можна сформулювати таким чином.

Теорема 1. *Нехай функція $\psi(x,t)$ є розв'язком такого рівняння з частинними похідними:*

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > t_0 > 0, \tag{7}$$

і задовольняє початкову умову

$$\psi(x,t_0) = \psi_0(x) \tag{8}$$

та крайові умови

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0. \tag{9}$$

а функція $\lambda(t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \int_0^l \psi(x,t) f(x,t)\, dx \tag{10}$$

та початкову умову $\lambda(t_0) = \lambda_0$. Тоді функція $u(x,t)$ для будь-яких $t > t_0$ задовольняє умову (4).

Очевидно, що розв'язок крайової задачі (7)–(9) може досить швидко зростати при зростанні змінної t. Щоб уникнути цього явища, замість функції $\psi(x,t)$, яка є розв'язком задачі (7)–(9), будемо шукати функцію $\mu(x,t) = \beta(t)\psi(x,t)$, де функцію $\beta(t)$ вибираємо таким чином, щоб виконувалось співвідношення

$$\int_0^l \mu^2(x,t)\, dx = \text{const}. \tag{11}$$

Із умови (11) безпосередньо отримаємо

$$\int_0^l \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} \mu(x,t)\, dx = 0, \tag{12}$$

Очевидно, що

$$\frac{\partial\mu(x,t)}{\partial t} = \frac{d\beta(t)}{dt}\psi(x,t) + \beta(t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{d\beta(t)}{dt}\psi(x,t) - a^2\beta(t)\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}. \tag{13}$$

Оскільки

$$\psi(x,t) = \frac{\mu(x,t)}{\beta(t)},$$

то з рівності (13) маємо

$$\frac{\partial\mu(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\beta(t)}\frac{d\beta(t)}{dt}\mu(x,t) - a^2\frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial x^2}. \tag{14}$$

Підставляючи (14) в (12), знаходимо

$$\frac{1}{\beta(t)}\frac{d\beta(t)}{dt} = a^2\frac{\int\limits_0^l \frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial x^2}\mu(x,t)\,dx}{\int\limits_0^l \mu^2(x,t)\,dx}. \tag{15}$$

Із врахуванням цього співвідношення з рівності (14) отримаємо, що функція $\mu(x,t)$ повинна задовольняти рівняння

$$\frac{\partial\mu(x,t)}{\partial t} = a^2\left[\frac{\int\limits_0^l \frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial x^2}\mu(x,t)\,dx}{\int\limits_0^l \mu^2(x,t)\,dx}\mu(x,t) - \frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial x^2}\right], \tag{16}$$

крайові умови

$$\mu(0,t) = \mu(l,t) = 0 \tag{17}$$

та початкову умову

$$\mu(x,t_0) = \psi_0(x), \tag{18}$$

оскільки функція $\beta(t)$ з рівняння (15) визначається з точністю до сталого множника, то завжди можна взяти, що $\beta(t_0) = 1$.

Далі перейдемо до знаходження функції $\lambda(t)$. Шукаємо її в такому вигляді:

$$\lambda(t) = \int\limits_0^l \mu(x,t)u(x,t)\,dx. \tag{19}$$

Диференціюючи рівність (19) за змінною t, отримаємо

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \int\limits_0^l \left[\frac{\partial\mu(x,t)}{\partial t}u(x,t) + \mu(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]dx. \tag{20}$$

Підставляючи в рівність (20) вирази для $\partial u(x,t)/\partial t$ та $\partial\mu(x,t)/\partial t$, відповідно із співвідношень (1) та (16) отримаємо для функції $\lambda(t)$ диференціальне рівняння

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = a^2 \frac{\int\limits_0^l \frac{\partial^2\mu(x,t)}{\partial x^2}\mu(x,t)\,dx}{\int\limits_0^l \mu^2(x,t)\,dx}\lambda(t) + \int\limits_0^l \mu(x,t)f(x,t)\,dx. \tag{21}$$

Підсумовуючи отримані результати, приходимо до такого висновку.

Теорема 2. *Нехай функція* $\mu(x,t)$ *є розв'язком крайової задачі* (16)–(18), *функція* $\lambda(t)$ *задовольняє рівняння* (21) *та початкову умову* $\lambda(t_0) = \lambda_0$. *Тоді функція* $u(x,t)$ *для всіх* $t > t_0$ *задовольняє співвідношення* (19), *причому справедлива рівність* $\int\limits_0^l \mu^2(x,t)\,dx = \int\limits_0^l \psi_0^2(x)\,dx$.

Необхідно відзначити, що для випадку системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь подібний алгоритм вперше було запропоновано в роботі [1].

1. *Абрамов А. А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1961. – **1**, № 3. – С. 542–545.

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 29.12.2008*

M. M. Kopets

Transference of the initial condition for the heat equation

For the heat equation, the algorithm of transference of the initial condition is proposed. This algorithm provides the stability of the transference.