УДК 519.6

І. В. Нефьодова, ст. викладач

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ПРО ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР ПРЯМИХ ІНТЕРЛІНАЦІЇ В МЕТОДІ ЛІДР НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

У роботі пропонується метод оптимального вибору ліній інтерлінації $x = x_k, \left(k = \overline{1,m}\right)$, $y = y_l, \left(l = \overline{1,n}\right)$ в методі ЛІДР (методі розв'язання двовимірних крайових задач шляхом зведення їх до систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь).

Ключові слова: *двовимірна крайова задача, поліноми Чебишова 1-го роду, інтерлінація функцій двох змінних, метод ЛІДР.*

Питання вибору вузлів інтерполяції при наближенні диференційованих функцій алгебраїчними інтерполяційними поліномами є одним з ключових питань теорії наближення. Це ж стосується і вибору ліній інтерлінації при наближенні функцій двох і більше змінних операторами поліноміальної інтерлінації. Щодо оптимального вибору ліній інтерлінації при наближенні диференційовних розв'язків крайових задач, то тут авторам невідомі твердження аналогічні твердженням П. Л. Чебишова. Тому актуальною є задача знаходження наближених розв'язків двовимірних крайових задач методом ЛІДР з використанням найкращого вибору ліній інтерлінації.

Метод ЛІДР, запропонований в працях О.М. Литвина (див. бібліографію [1, с. 528–530]), допускає вибір ліній інтерлінації не довільним чином, а з умови найкращого наближення формули інтерлінації до точного розв'язку. Автору роботи невідомі дослідження інших авторів, присвячені методам вибору ліній інтерлінації. У роботі [2] для найкращого наближення функцій в нормі $L^1\,[-1,1]^2$ запропоновано використовувати оператори інтерлінації на лініях, які є вузлами поліномів Чебишова 2-го роду (по x і по y) [3, с. 90–97]. У роботі цю ідею пропонується застосувати в методі ЛІДР.

Метою даної роботи є побудова і дослідження алгоритму методу ЛІДР з оптимальним вибором ліній інтерлінації.

Наближений розв'язок крайової задачі

$$Lu\left(x, y\right) = f\left(x, y\right), \quad \left(x, y\right) \in G, \tag{1}$$

$$u\left(x, y\right) = 0, \left(x, y\right) \in \partial G, \tag{2}$$

$$Lu(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x,y)u,$$

$$G = \{|x| < 1, |y| < 1\},\ \partial G = \{(x,y): x = \pm 1, -1 \le y \le 1;\ y = \pm 1, -1 < x < 1\}$$

будемо знаходити методом зведення до системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (ЛІДР) у вигляді формули

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{m-1} h1_k(x)\varphi_k(y) + \sum_{l=1}^{n-1} h2_l(y)\psi_l(x) - \\ -\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1} w_{k,l} h1_k(x) h2_l(y), \tag{3}$$

де $h1_k(x) = h1_k(x,X) = \prod_{\substack{i=1,\\ i\ne k}}^{m-1} \frac{x - X_i}{X_k - X_i}$, $h2_l(y) = h2_l(y,Y) = \prod_{\substack{j=1,\\ j\ne l}}^{n-1} \frac{y - Y_i}{Y_k - Y_i}$,

$X = [X_1,...,X_{m-1}]$, $Y = [Y_1,...,Y_{n-1}]$, функції $\varphi_k(y), \left(k = \overline{1,m-1}\right)$ та $\psi_l(x), \left(l = \overline{1,n-1}\right)$ і сталі $w_{k,l}$ $\left(k = \overline{1,m-1};\ l = \overline{1,n-1}\right)$ є невідомими з властивостями

$$\psi_l(x_k) = \varphi_k(y_l) = w_{k,l}, \tag{4}$$

$$\psi_l(-1) = 0,\ \psi_l(1) = 0,\ \varphi_k(-1) = 0,\ \varphi_k(1) = 0,\ \left(k = \overline{1,m-1};\ l = \overline{1,n-1}\right), \tag{5}$$

які знаходяться з умови мінімуму функціоналу, відповідного поставленій крайовій задачі.

Згідно з теоремами про наближення диференційовних функцій операторами поліноміальної інтерлінації [1, с. 157–163] похибка $R(x,y) = u(x,y) - w(x,y)$ визначається формулою [1, с. 160]

$$R(x,y) = u^{(m,n)}(\xi,\eta)\cdot\frac{\prod_{i=0}^{m}(x - X_i)}{(m+1)!}\cdot\frac{\prod_{j=0}^{n}(y - Y_j)}{(n+1)!}, \tag{6}$$

$$X_0 = 0 < \xi < 1 = X_m,\ \ Y_0 = 0 < \eta < 1 = Y_n,$$

тобто $|R(x,y)|$ для заданої функції $u(x,y)$ буде найменшим при такому виборі прямих інтерлінації, при яких функція $\frac{\prod_{i=0}^{m}|x - X_i|}{(m+1)!}\cdot\frac{\prod_{j=0}^{n}|y - Y_j|}{(n+1)!}$ буде мінімальною для $|x| \le 1, |y| \le 1$.

Згідно леми Cea [4, с. 109] таке твердження повинно бути справедливим також для наближеного розв'язку, отриманого методом ЛІДР. Тобто, в даній задачі прямі інтерлінації повинні проходити через точки-нулі поліномів, які є аналогами поліномів Чебишова 1-го роду, які повинні дорівнювати нулю також в точках $x = \pm 1$.

Для знаходження невідомих функцій $\varphi_k(y), \left(k = \overline{1, m-1}\right)$ та $\psi_l(x)$, $\left(l = \overline{1, n-1}\right)$ і сталих $w_{k,l}$ $\left(k = \overline{1, m-1};\ l = \overline{1, n-1}\right)$ запишемо системи

$$\int_{-1}^{1} \left(Lw(x,y) - f(x,y)\right) h1_k(x)\,dx = 0,\ k = \overline{1, m-1}, \tag{7}$$

$$\int_{-1}^{1} \left(Lw(x,y) - f(x,y)\right) h2_l(y)\,dy = 0,\ l = \overline{1, n-1}, \tag{8}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(Lw(x,y) - f(x,y)\right) h1_k(x)\, h2_l(y)\,dxdy = 0,\ \ k = \overline{1, m-1},\ \ l = \overline{1, n-1}. \tag{9}$$

Ці системи треба розв'язувати сумісно з системою граничних умов (5), які витікають із граничної умови (2), а також з врахуванням умов (4).

Питання вибору вузлів полінома

$$q(x) = q(x, X) = \left|(x+1)\cdot \prod_{k=1}^{m-1}\left(x - X_k\right)\cdot(x-1)\right|,$$

який на кінцях інтервалу $[-1,1]$ дорівнює нулю $\left(q(\pm 1) = 0\right)$, з умови найменшого відхилення від нуля

$$\max_{-1\le x\le 1} q(x, X) \to \min_{X},\quad -1 = X_0 < X_1 < X_2 < \ldots < X_{m-1} < X_m = 1$$

пропонується розв'язувати для кожного m за допомогою чисельних методів.

Наприклад, при $m = 4$ маємо вузли $-1, -0.6177, 0, 0.6177, 1$; при $m = 6$ маємо вузли –1, –0.7851, –0.3468, 0, 0.3472, 0.7852, 1; при $m = 8$ маємо вузли –1, –0.8566, –0.5262, –0.2523, 0, 0.2523, 0.5262, 0.8566, 1; при $m = 10$ маємо вузли –1, –0.8978, –0.6557, –0.4105, –0.2011, 0, 0.2011, 0.4105, 0.6557, 0.8978, 1.

Написані вище твердження є справедливими також для функцій змінної y

$$g(y) = g(y, Y) = \left|(y+1)\cdot \prod_{l=1}^{n-1}\left(y - Y_l\right)\cdot(y-1)\right|.$$

Підставляючи ці вузли при заданих m та n і використовуючи схему методу ЛІДР, описаного в [5, стор. 117–121], отримаємо наближений розв'язок знайдений з оптимальним вибором ліній інтерлінації.

Зупинимось на деяких аспектах чисельної реалізації цього методу на прикладі задачі (1)–(2) при $a(x,y)=b(x,y)=1,\quad c(x,y)=0$, $f(x,y)=-2$, $m=n=4$.

Враховуючи симетрію точного розв'язку, отримаємо в структурі наближеного розв'язку (3) всього дві невідомі функції $\varphi_1(t)\equiv\varphi_3(t)\equiv\psi_1(t)\equiv\psi_3(t),\ -1\le t\le 1,\quad \varphi_2(t)\equiv\psi_2(t),\ -1\le t\le 1$, які повинні задовольняти умовам

$$\begin{aligned}&\varphi_1(\pm1)=0,\ \varphi_2(\pm1)=0,\ \varphi_1(x_1)=\varphi_1(x_3)=w_{11}=w_{13}=w_{31}=w_{33},\\&\varphi_1(x_2)=\varphi_2(x_1)=\varphi_2(x_3)=w_{12}=w_{21}=w_{23}=w_{32},\ \varphi_2(x_2)=w_{22},\end{aligned}\tag{10}$$

та три невідомі сталі w_{11}, w_{12}, w_{22}. Для спрощення покладемо $h(x)=h1(x)=h2(x)$, $h(y)=h1(y)=h2(y)$.

Тобто наближений розв'язок буде мати вигляд

$$\begin{aligned}w(x,y)=&\left[h_1(x)+h_3(x)\right]\varphi_1(y)+\left[h_1(y)+h_3(y)\right]\varphi_1(x)+h_2(x)\varphi_2(y)+\\&+h_2(y)\varphi_2(x)-w_{1,1}\left[h_1(x)h_1(y)+h_3(x)h_1(y)+h_1(x)h_3(y)+h_3(x)h_3(y)\right]-\\&-w_{1,2}\left[h_2(x)h_1(y)+h_1(x)h_2(y)+h_3(x)h_2(y)+h_2(x)h_3(y)\right]-w_{2,2}h_2(x)h_2(y).\end{aligned}$$

Введемо позначення $\Phi_1(y)=h_1(y)+h_3(y)$, $\Phi_2(x)=h_1(x)+h_3(x)$, $\Phi_3(x,y)=h_1(x)h_1(y)+h_3(x)h_1(y)+h_1(x)h_3(y)+h_3(x)h_3(y)$, $\Phi_4(x,y)=h_2(x)h_1(y)+h_1(x)h_2(y)+h_3(x)h_2(y)+h_2(x)h_3(y)$, тоді наближений розв'язок може бути представлений у вигляді

$$\begin{aligned}w(x,y)=&\varphi_1(x)\Phi_1(y)+\Phi_2(x)\varphi_1(y)+\varphi_2(x)h_2(y)+\varphi_2(y)h_2(x)-\\&-w_{11}\Phi_3(x,y)-w_{12}\Phi_4(x,y)-w_{22}h_2(x)h_2(y)\end{aligned}$$

Систему інтегро-диференціальних рівнянь для знаходження функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ отримуємо прирівнюючи до нуля варіації функціоналу

$$J(\varphi_1,\varphi_1',\varphi_2,\varphi_2')=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+4w\right]dxdy$$

за функціями φ_1, φ_2:

$$\delta_{\varphi_1}\left(J(\varphi_1,\varphi_1',\varphi_2,\varphi_2')\right)=0,\ \delta_{\varphi_2}\left(J(\varphi_1,\varphi_1',\varphi_2,\varphi_2')\right)=0,$$

що приводить до наступних рівнянь Ейлера:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial\varphi_1'}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial\varphi_1}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial\varphi_2'}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial\varphi_2}=0,\end{cases}$$

де $F\left(x,\varphi_1(x),\varphi_1'(x)\right)=\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+4w\right]dy$.

Система складається з наступних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\varphi_1''(x)\int\limits_{-1}^{1}\Phi_1^2\left(y\right)dy+\Phi_2''\left(x\right)\int\limits_{-1}^{1}\Phi_1\left(y\right)\varphi_1\left(y\right)dy+\\
&+\varphi_2''\left(x\right)\int\limits_{-1}^{1}\Phi_1\left(y\right)h_2\left(y\right)dy+h_2''\left(x\right)\int\limits_{-1}^{1}\Phi_1\left(y\right)\varphi_2\left(y\right)dy-\\
&-w_{11}\int\limits_{-1}^{1}\Phi_{3xx}''\left(x,y\right)\Phi_1\left(y\right)dy-w_{12}\int\limits_{-1}^{1}\Phi_{4xx}''\left(x,y\right)\Phi_1\left(y\right)dy-\\
&-w_{22}h_2''\left(x\right)\int\limits_{-1}^{1}h_2\left(y\right)\Phi_1\left(y\right)dy-2\int\limits_{-1}^{1}\Phi_1\left(y\right)dy=0,
\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_1''(x)\int\limits_{-1}^{1}\Phi_1\left(y\right)h_2\left(y\right)dy+\Phi_2''\left(x\right)\int\limits_{-1}^{1}h_2\left(y\right)\varphi_1\left(y\right)dy+\\
&+\varphi_2''\left(x\right)\int\limits_{-1}^{1}h_2^2\left(y\right)dy+h_2''\left(x\right)\int\limits_{-1}^{1}h_2\left(y\right)\varphi_2\left(y\right)dy-\\
&-w_{11}\int\limits_{-1}^{1}\Phi_{3xx}''\left(x,y\right)h_2\left(y\right)dy-w_{12}\int\limits_{-1}^{1}\Phi_{4xx}''\left(x,y\right)h_2\left(y\right)dy-\\
&-w_{22}h_2''\left(x\right)\int\limits_{-1}^{1}h_2^2\left(y\right)dy-2\int\limits_{-1}^{1}h_2\left(y\right)dy=0.
\end{aligned}\tag{12}$$

Ці рівняння повинні розв'язуватись при умовах (10), а також сумісно з рівняннями

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J}{\partial w_{11}}=0,\\ \dfrac{\partial J}{\partial w_{12}}=0,\\ \dfrac{\partial J}{\partial w_{22}}=0.\end{cases}\tag{13}$$

Звертаємо увагу, що кожне рівняння системи (11)–(12) є лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку з коефіцієнтами, деякі з яких є інтегралами, що залежать від невідомих функцій, наприклад $A1=\int\limits_{-1}^{1}\Phi_1\left(y\right)\varphi_1\left(y\right)dy$, $A2=\int\limits_{-1}^{1}\Phi_1\left(y\right)\varphi_2\left(y\right)dy$, … Тобто ця система двох рівнянь є системою інтегро-диференціальних рівнянь. Тому загальний розв'язок цих інтегро-диференціальних рівнянь буде залежати від цих параметрів та довільних сталих, які повинні знаходитись шляхом задовільнення граничним умовам, підстановки цих формул в систему (13) і у формули для $A1$, $A2$, ...

Висновок. У роботі запропонована нова схема методу ЛІДР для розв'язання двовимірних крайових задач з використанням поліноміальної інтерлінації з оптимальним вибором ліній інтерлінації. В подальшому автор планує розробити пакет програм для розв'язання крайових задач запропонованим методом.

Автор висловлює подяку д-ру фіз.-мат. наук, професору Литвину О.М. за постановку задачі та допомогу.

Список використаних джерел:

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування : монографія / О. М. Литвин. — Х. : Основа, 2002. — 544 с.
2. Haussmann W. Blending interpolation and best L^1 – approximation / W. Haussmann, K. Zeller // Arch Math (Basel). — 1983. — Vol. 40, № 6. — P. 545–552.
3. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М. : МГУ, 1976. — 304 с.
4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. — М. : Мир, 1980. — 520 с.
5. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи : навч. посіб. / О. М. Литвин. — К. : Наук. думка, 2005. — 344 с.

The method of optimum choice of lines of interlineation $x = x_k, \left(k = \overline{1,m}\right)$, $y = y_l, \left(l = \overline{1,n}\right)$ is offered in this work in the method of LIDE (method of solution of two-dimensional boundary value problem by reducing to linear integro-differential equations systems).

Key words: *two-dimentional boundary value problem, polynomials of Chebishova of 1-th kinds, interlineation functions two variables, method of LIDE.*

Отримано 28.05.10