transform calculated polyparametric family improper integrals own elements for proper hybrid differential operator.

Key words: *improper integrals, Cauchy function, the main solution, hybrid integral transformation, the basic identity conditions of the unique solvability, logical scheme.*

Отримано 21.08.10

УДК 519.6

О. М. Литвин[1]**,** д-р фіз.-мат. наук,
Ю. І. Першина[2]**,** канд. фіз.-мат. наук

[1]Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків
[2]Національний технічний університет «ХПІ», м. Харків

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗРИВНИХ СПЛАЙНІВ

У роботі пропонується метод наближення розривної функції однієї змінної за допомогою розривного сплайну, використовуючи метод мінімакса.

Ключові слова: *розривна функція, розривний сплайн, мінімакс.*

Вступ. Задачі наближення розривних функцій виникають значно частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наведемо кілька прикладів. При дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність) [1]. При дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду при переході від однієї складової кори до іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо). Тому актуальною є розробка методів наближення розривних функцій.

Постановка задачі. Нехай задана функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ з розривами першого роду в точках x_k, $k=\overline{1,n}$. Ці точки розбивають інтервал $[a,b]$ на n частин. Отже, точки розриву співпадають з точками розриву функції $f(x)$. Наближувати функцію $f(x)$ будемо лінійним сплайном, який на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ має такий вигляд:

$$Sp_k(x,A) = A_{k,1}\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+2}} + A_{k,2}\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \ k = \overline{1, n-1}, \tag{1}$$

де $A_{k,1}$, $A_{k,2}$, $k = \overline{1, n-1}$ — параметри сплайну на k-му інтервалі.

Мета роботи: знайти такі параметри $A_{k,1}$, $A_{k,2}$, $k = \overline{1, n-1}$, щоб наближення було найкращим в тому чи іншому сенсі. Для розв'язання цієї задачі будемо користуватися методом мінімакса [2].

Опис методу. У цій роботі сплайном найкращого наближення будемо вважати сплайн, який на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ має найменше максимальне відхилення від наближуваної функції $f(x)$.

Теорема 1. Якщо на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ невідомі параметри матриці A знаходити з умови

$$\max_{1 \le k \le n-1} \left| f(x) - Sp_k(x,A) \right| \to \min_A, \tag{2}$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Доведення витікає з того, що кожний з елементів, який треба мінімізувати, дорівнює максимальному відхиленню наближуючого сплайна від функції $f(x)$. Тому при знаходженні параметрів з умови (2), отримаємо $A_{k,1}$, $A_{k,2}$, які забезпечують найменше відхилення.

Теорема 2. Якщо наближувана функція $f(x)$ є розривною кусково-лінійною функцією з точками розриву $x = x_k$, $k = \overline{1, n}$ і наближуємо її кусково-лінійним розривним сплайном $Sp(x, A)$, що визначається формулами (1) і невідомі параметри-елементи матриці A знаходимо з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто

$$Sp(x, A) = f(x).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ на k-ому інтервалі має вигляд

$$f_k(x,B) = B_{k,1}\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+2}} + B_{k,2}\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \ k = \overline{1, n-1}.$$

Розглянемо максимум різниці функції $f(x)$ на наближуваного сплайна (1) на k-тому інтервалі

$$\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left| f(x) - Sp_k(x,A) \right| = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left\{ \left| f(x_k + 0) - Sp_k(x_k + 0, A) \right|, \right.$$

$$\left. \left| f(x_{k+1} - 0) - Sp_k(x_{k+1} - 0, A) \right| \right\} = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left\{ \left| B_{1,k} - A_{1,k} \right|, \left| B_{2,k} - A_{2,k} \right| \right\}.$$

Знайдемо мінімум отриманого максимуму

$$\min \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left\{ \left| B_{1,k} - A_{1,k} \right|, \left| B_{2,k} - A_{2,k} \right| \right\}.$$

Звідси витікає, що

$$\left|B_{1,k} - A_{1,k}\right| = 0,\ \left|B_{2,k} - A_{2,k}\right| = 0 \Rightarrow B_{1,k} = A_{1,k},\ B_{2,k} = A_{2,k}.$$

Теорема доведена.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближуючого сплайна і найкраще наближення сплайна до функції проводимо аналітично. На кожному із інтервалів $\left[x_k, x_{k+1}\right]$, $k = \overline{1, n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{[x_k, x_{k+1}]}(A) = \max_{[x_k, x_{k+1}]}\left\{\left|f_k(x_k) - Sp_k(x_k, A)\right|, \left|f_k(x_{k+1}) - Sp_k(x_{k+1}, A)\right|,\right.$$
$$\left.\left|f_k(c_2) - Sp_k(c_1, A)\right|, \ldots, \left|f_k(c_m) - Sp_k(c_m, A)\right|\right\}, \tag{3}$$

де c_l, $l = \overline{1, m}$ — стаціонарні точки функції $J_k(x, A) = f_k(x) - Sp_k(x, A)$ на інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$.

А потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх інтервалах:

$$W = \min_{1 \le k \le n-1}\left(J_{[x_k, x_{k+1}]}(A)\right) = \min_{1 \le k \le n-1}\left(\max_{a \le x \le b}\left|f(x) - Sp_k(x, A)\right|\right).$$

Отримаємо матрицю W, яка і представляє собою шукану матрицю параметрів $A_{k,1}$, $A_{k,2}$, $k = \overline{1, n-1}$.

Наведемо приклади.

Приклад 1. Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1,1]$ з однією точкою розриву $x = 0$ першого роду (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ x-1, & 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

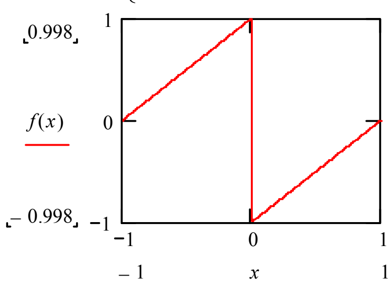

Рис. 1. *Графічний вигляд наближуваної функції*

Обираємо вузли сплайна: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Наближуємо функцію $f(x)$ сплайном вигляду:

$$Sp(x,A)=\begin{cases} A_{1,1}\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+A_{1,2}\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1<x<x_2 \\ A_{2,1}\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3}+A_{2,2}\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}, & x_2<x<x_3 \end{cases}.$$

У цьому прикладі точка розриву $x=0$ збігається з точкою розриву наближуючого сплайна і найкраще наближення сплайна до функції проводимо аналітично. На кожному із інтервалів $[-1,0]$ та $[0,1]$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції $f(x)$ за таким алгоритмом: оскільки і сплайн і наближуюча функція на кожному інтервалі є прямими, то максимальне значення відхилення буде дорівнювати одному з двох значень

$f(0-0)-Sp(0-0)$ та $f(-1)-Sp(-1)$ на інтервалі $[-1,0]$,

$f(0+0)-Sp(0+0)$ та $f(1)-Sp(1)$ на інтервалі $[0,1]$

Отже, задача зводиться до знаходження таких значень параметрів A, при яких буде виконуватись

$$\max_{[-1,0]}\{f(0-0)-Sp(0-0),\ f(-1)-Sp(-1)\}\to\min_A,$$

$$\max_{[0,1]}\{f(0+0)-Sp(0+0),\ f(1)-Sp(1)\}\to\min_A.$$

У цьому прикладі сплайн буде мати вигляд

$$Sp(x,A)=\begin{cases} -A_{1,1}x+A_{1,2}(1+x), & -1<x<0 \\ -A_{2,1}(x-1)+A_{2,2}x, & 0<x<1 \end{cases}.$$

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x,A)$ від функції $f(x)$ дорівнює:

$$J(x,A)=\left|f(x)-Sp(x,A)\right|=\begin{cases} \left|x+1-A_{1,1}x-A_{1,2}(1+x)\right|, & -1\le x<0 \\ \left|x-1+A_{1,2}(x-1)-A_{2,2}x\right|, & 0\le x\le 1 \end{cases}.$$

Згідно формули (3) від цієї функції знайдемо максимум по x.

$$JM(A)=\max_{x\in[-1,1]}(J(x,A))=\begin{cases} \max\left\{\left|-A_{1,1}\right|,\left|1-A_{1,2}\right|\right\}, \\ \max\left\{\left|-1-A_{2,1}\right|,\left|-A_{2,2}\right|\right\}. \end{cases}$$

Таким чином, задача звелась до знаходження параметрів сплайна — елементів матриці A, які забезпечують мінімум серед двох величин

$$\min_A JM(A)=\min_A\left\{\max\left\{\left|-A_{1,1}\right|,\left|1-A_{1,2}\right|\right\},\max\left\{\left|-1-A_{2,1}\right|,\left|-A_{2,2}\right|\right\}\right\}.$$

У результаті отримаємо таку матрицю A:

$$A=W=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції в прикладі 1 буде мати вигляд:

$$Sp(x,W)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1<x<x_2\\ \dfrac{-x+x_3}{x_2-x_3}, & x_2<x<x_3\end{cases}.$$

Ми отримали точний вираз функції $f(x)$, тобто $Sp(x,W)=f(x)$, що підтверджує викладену вище теорію.

Приклад 2. Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1,1]$ з двома точками розриву першого роду (рис. 2)

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x\le -0.5\\ x, & -0.5<x\le 0.5\\ x-1. & 0.5<x\le 1\end{cases}.$$

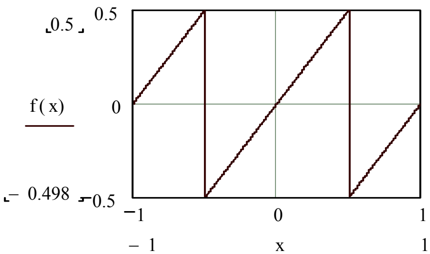

Рис. 2. *Графічний вигляд наближуваної функції*

Обираємо вузли: $x_1=-1,\ x_2=-0.5, x_3=0.5,\ x_4=1$.

Наближуємо функцію $f(x)$ сплайном вигляду:

$$Sp(x,A)=\begin{cases}A_{1,1}\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+A_{1,2}\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1\le x<x_2,\\ A_{2,1}\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3}+A_{2,2}\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}, & x_2\le x<x_3,\\ A_{3,1}\dfrac{x-x_4}{x_3-x_4}+A_{3,2}\dfrac{x-x_3}{x_4-x_3}, & x_3\le x\le x_4.\end{cases}$$

Тобто сплайн для прикладу 2 буде мати вигляд:

$$Sp(x,A)=\begin{cases}-A_{1,1}(2x+1)+A_{1,2}(2x+2), & -1\le x<-0.5,\\ -A_{2,1}(x-0.5)+A_{2,2}(x+0.5), & -0.5\le x<0.5,\\ -A_{3,1}(2x-2)+A_{3,2}(2x-1), & 0.5\le x\le 1.\end{cases}$$

Як і в прикладі 1 максимальне значення абсолютного відхилення функції від сплайна буде досягатися на кінцях інтервалів.

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x,A)$ від функції $f(x)$ буде мати вигляд:

$$J(x,A)=\left|f(x)-Sp(x,A)\right|=$$

$$=\begin{cases}\left|x+1+A_{1,1}(2x+1)-A_{1,2}(2x+2)\right|, x\in[-1,-0.5),\\ \left|x+A_{1,2}(x-0.5)-A_{2,2}(x+0.5)\right|,\ x\in[-0.5,0.5),\\ \left|x-1+A_{3,1}(2x-2)-A_{3,2}(2x-1)\right|, x\in[0.5,1].\end{cases}$$

Знайдемо максимальне значення по x відхилення отриманого абсолютного відхилення на кожному з інтервалів згідно формули (3)

$$JM(A)=\max_{x\in[-1,1]}(J(x,A))=\begin{cases}\max\left\{\left|-A_{1,1}\right|,\left|0.5-A_{1,2}\right|\right\},\\ \max\left\{\left|-0.5-A_{2,1}\right|,\left|0.5-A_{2,2}\right|\right\},\\ \max\left\{\left|-0.5-A_{3,1}\right|,\left|-A_{3,2}\right|\right\}.\end{cases}$$

Тепер знаходимо мінімум від отриманих максимумів.

$$\min_A JM(A)=\min_A\Big\{\max\left\{\left|-A_{1,1}\right|,\left|0.5-A_{1,2}\right|\right\},$$

$$\max\left\{\left|-0.5-A_{2,1}\right|,\left|0.5-A_{2,2}\right|\right\},\max\left\{\left|-0.5-A_{3,1}\right|,\left|-A_{3,2}\right|\right\}\Big\}.$$

У результаті отримаємо таку матрицю A:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0\end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції в прикладі 2 буде мати вигляд:

$$Sp(x,A)=\begin{cases}0.5\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1<x<x_2,\\ -0.5\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3}+0.5\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}, & x_2<x<x_3,\\ -0.5\dfrac{x-x_4}{x_3-x_4}, & x_3<x<x_4.\end{cases}$$

Як і в прикладі 1, ми отримали точний вираз функції $f(x)$

$$Sp(x,W) = f(x),$$

що підтверджує викладену вище теорію.

Приклад 3. Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$ з двома точками розриву першого роду, яка не є лінійною (рис. 3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(x+\pi\right), & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin(x), & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{2}{\pi}\left(x-\pi\right), & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

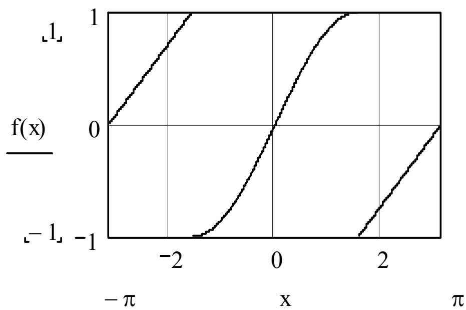

Рис. 3. *Графічний вигляд наближуваної функції*

Обираємо вузли: $x_1 = -\pi,\ x_2 = -\dfrac{\pi}{2}, x_3 = \dfrac{\pi}{2}, x_4 = \pi.$

Наближуємо сплайном такого ж вигляду як і в прикладі 2. Тобто наближуючий сплайн в цьому прикладі буде мати вигляд:

$$Sp(x,A) = \begin{cases} -A_{1,1}\dfrac{2x+\pi}{\pi} + 2A_{1,2}\dfrac{x+\pi}{\pi}, & -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ -A_{2,1}\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\pi} + A_{2,2}\dfrac{x+\dfrac{\pi}{2}}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ -2A_{3,1}\dfrac{x-\pi}{\pi} + A_{3,2}\dfrac{2x-\pi}{\pi}, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x,A)$ від функції $f(x)$ буде мати вигляд:

$$J(x,A)=\left|f(x)-Sp(x,A)\right|=$$

$$=\begin{cases}\left|\dfrac{2}{\pi}\left(x+\pi\right)+A_{1,1}\dfrac{2x+\pi}{\pi}-2A_{1,2}\dfrac{x+\pi}{\pi}\right|, & x\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \left|\sin(x)+A_{2,1}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\pi}-A_{2,2}\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right|, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \left|\dfrac{2}{\pi}\left(x-\pi\right)+2A_{3,1}\dfrac{x-\pi}{\pi}-A_{3,2}\dfrac{2x-\pi}{\pi}\right|, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases} \quad (4)$$

Знайдемо максимальне значення по x отриманої абсолютної різниці на кожному з інтервалів:

1. На інтервалі $\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ будемо користуватися формулою (3), як і в попередніх прикладах:

$$JM1(A)=\max_{x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)}(J(x,A))=\max\left\{\left|-A_{1,1}\right|,\left|1-A_{1,2}\right|\right\}.$$

2. Розглянемо інтервал $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Нехай $g(x)=\sin(x)$ на цьому інтервалі наближується лінійною функцією $y=ax$ (рис. 4).

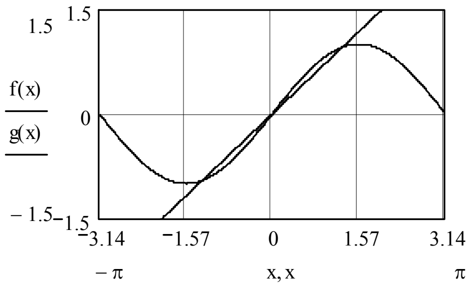

Рис. 4. *Наближення функції $f(x)$ функцією $y=ax$.*

Розглянемо різницю функції та наближуючого сплайну: $h(x)=\sin x-ax.$ Максимум від цієї функції може досягатися на кінцях інтервалу та в точці екстремуму. Знайдемо цю точку.

$$h'(x)=0\Rightarrow\cos x-ax=0\Rightarrow x=\pm\arccos(a)$$

Розглянемо максимум різниці $h(x)$:

$$\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\left(\left|h(x)\right|\right)=\max\left\{\left|\sin(\arccos a)-a\cdot\arccos a\right|,\ \left|a\frac{\pi}{2}-1\right|\right\}=$$

$$=\max\left\{\left|\sqrt{1-a^2}-a\cdot\arccos a\right|,\ \left|a\frac{\pi}{2}-1\right|\right\}=\left|a\frac{\pi}{2}-1\right|.$$

Тобто на інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ максимальне значення по x абсолютної різниці наближуваної функції $f(x)$ і сплайна $Sp(x,A)$ (4) буде мати вигляд:

$$JM2(A)=\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(J(x,A))=$$

$$=\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\left|\sin(x)+A_{2,1}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\pi}-A_{2,2}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right|=\max\left\{\left|-1-A_{2,1}\right|,\left|1-A_{2,2}\right|\right\}.$$

3. На інтервалі $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ максимальне значення відхилення (4) буде мати вигляд:

$$JM3(A)=\max_{x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}(J(x,A))=\max\left\{\left|-1-A_{3,1}\right|,\left|-A_{3,2}\right|\right\}.$$

Тепер знаходимо мінімум від отриманих максимумів.

$$\min_A JM(A)=$$

$$=\min\left\{JM1(A),JM2(A),JM3(A)=\min_A\left\{\max\left\{\left|-A_{1,1}\right|,\left|1-A_{1,2}\right|\right\}\right\},\right.$$

$$\left.\max\left\{\left|-1-A_{2,1}\right|,\left|1-A_{2,2}\right|\right\},\max\left\{\left|-1-A_{3,1}\right|,\left|-A_{3,2}\right|\right\}\right\}.$$

У результаті отримаємо таку матрицю A:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції в прикладі 3 буде мати вигляд:

$$Sp(x, A) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x+\pi), & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{2x}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(x-\pi), & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Висновок. У роботі запропонований метод, за допомогою якого можна наблизити функцію однієї змінної з розривами першого роду розривним лінійним сплайном. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайна не співпадають з точками розриву функції $f(x)$.

Як вже зазначалося, цей метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, у медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Список використаних джерел:

1. Литвин О. М. Про один метод розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії / О. М. Литвин, О. О. Литвин // Тезисы докладов Международной конференции АППММ'06. — Х. : ІПМАШ ім. А. М. Підгорного, 2006. — С. 18.
2. Демьянов В. Ф. Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. — М. : Наука, 1972. — 368 с.

In work the method of approach of explosive function of one variable by means of an explosive spline is offered, using a minimax method.

Key words: *explosive functions, explosive spline, a minimax method.*

Отримано 27.06.10