УДК 517.518

С. О. Кирилов, канд. фіз.-мат. наук

Одеський національний морський університет, м. Одеса

КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є ФУНКЦІЙ ІЗ ЗАГАЛЬНИХ СИМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Отримані деякі нові оцінки коефіцієнтів Фур'є функцій з симетричних просторів.

Ключові слова: *коефіцієнти Фур'є, функції, симетричний простір, теорема, тригонометрична система, властивість, сукупність.*

Вступ. Стаття присвячена отриманню оцінок коефіцієнтів Фур'є функцій, що належать певним функціональним просторам, за загальними ортонормованими системами. Такі оцінки мають теоретичне значення та застосовуються в теорії ортогональних рядів, теорії функціональних просторів.

Перші оцінки норм функцій через їх коефіцієнти Фур'є за тригонометричною системою були одержані Хаусдорфом і Юнгом, а також, дещо пізніше, Харді і Літтлвудом. У наступні роки у роботах Пелі, Марцинкевича і Зігмунда ці результати були перенесені на загальні ортонормовані системи. Аналоги таких результатів були також одержані в інших просторах функцій у роботах ряду математиків. Так, наприклад, у роботах [1], [2] коефіцієнтні оцінки були одержані для функцій із загальних симетричних просторів, проте лише у випадку, коли ортонормована система є обмеженою у сукупності.

Метою нашої роботи є одержання оцінок коефіцієнтів Фур'є функцій із загальних симетричних просторів у випадку, коли ортонормована система не є обмеженою у сукупності.

Основна частина. Спочатку наведемо декілька означень.

Простір E вимірних функцій на [0, 1] називається симетричним, якщо із нерівності $|f(t)| \le |g(t)|$ і умови $g(t) \in E$ випливає, що $\|f\|_E \le \|g\|_E$ і із рівновимірності функцій f і g виходить, що $\|f\|_E = \|g\|_E$.

Прикладами симетричних просторів є відомі простори Лебега і Лоренца. Деякі інші приклади симетричних просторів наведені у монографії [3, с. 145-156].

Нехай тепер $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормована система на відрізку [0, 1], при всіх $n = 1, 2,\ldots$ $\varphi_n \in L_\infty$, $\|\varphi_n\|_\infty = M_n$, $\sum_{k=1}^{n} M_k^2 = B_n$.

Позначимо $\theta_\tau f(s) = \begin{cases} f\left(\dfrac{s}{\tau}\right), 0 \le s \le \min(1,\tau), \\ 0, \tau < s \le 1. \end{cases}$

Основним результатом нашої роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай симетричний простір E такий, що*

$$\|\theta_\tau\|_{E\to E} = \overline{\overline{o}}\left(\tau^{1/2}\right), \tau \to 0\,, \tag{1}$$

$$\|\theta_\tau\|_{E\to E} = \overline{\overline{o}}\left(\tau\right), \tau \to \infty\,. \tag{2}$$

Якщо $f \in E$, $\{c_n\}$ – коефіцієнти Фур'є функції f, то

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\left(M_n\chi_{(0,\frac{1}{B_n})}\right\|_E \le c\|f\|_E\,.$$

Відповідний результат для систем, обмежених у сукупності, був одержаний у роботі [2]. Щоб одержати нашу теорему ми використовуємо метод, який базується на оцінках незростаючих переставлень функцій. Основною в доведенні є лема.

Лема 1. *Нехай $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормована система на відрізку* [0, 1] *і* $\|\varphi_n\|_\infty \le M_n$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k^2$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тоді*

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|M_k \le B_n\int_0^t f^*(s)ds + \sqrt{B_n}\left(\int_t^1 f^*(s)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right). \tag{3}$$

Доведення. Покладемо $\tilde{S}_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{sign} c_k\, M_k\varphi_k(x)$. Використовуючи відомі властивості переставлень функцій та нерівність Гельдера, маємо

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|M_k = \int_0^1 f(x)\tilde{S}_n(x)dx \le \int_0^1 f^*(t)\tilde{S}_n^*(t)dt \le \int_0^t f^*(u)\tilde{S}_n^*(u)du +$$

$$+\int_t^1 f^*(u)\tilde{S}_n^*(u)du \le \int_0^t f^*(u)du\left\|\tilde{S}_n^*\right\|_\infty + \left(\int_t^1 f^*(u)\frac{du}{\sqrt{u}}\right)\left\|\tilde{S}_n^*\right\|_2.$$

Далі помічаємо

$$\left\|\tilde{S}_n^*\right\|_\infty \le \sum_{k=1}^{n} M_k^2 = B_n.$$

І, нарешті,

$$\left\|\tilde{S}_n^*\right\|_2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} M_k^2\right)^{1/2} = \sqrt{e_n}\,.$$

Об’єднуючи ці оцінки, одержуємо потрібний результат.

Доведення теореми 1. Використаємо (3). Якщо

$$Tf(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left|c_n\right| M_n \chi_{\left(0,\frac{1}{B_n}\right)}\,,$$

то (див. [4])

$$\left(Tf\right)^*(t) \le \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds + \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\int_t^1 f^*(s)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right),$$

внаслідок того, що $Tf(t)$ стала на $\left[\frac{1}{B_{n+1}},\frac{1}{B_n}\right)$, а права частина (3) угнута. Якщо ми позначимо

$$H_1 f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\,,\ H_2 f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\int_t^1 f^*(s)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right),$$

то завдяки симетричності E

$$\left\|Tf\right\|_E = \left\|\left(Tf\right)^*\right\|_E \le c\left\{\left\|H_1 f\right\|_E + \left\|H_2 f\right\|_E\right\}.$$

Далі

$$\left\|H_2 f\right\|_E = \left\|\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\int_t^1 f^*(s)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right)\right\|_E = \left\|\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\int_0^{1/t}\frac{f^*(t\tau)}{\sqrt{t\tau}}td\tau\right)\right\|_E \le$$

$$\le \int_1^{\infty}\frac{\left\|\theta_{1/\tau}f(t)\right\|_E}{\sqrt{\tau}}d\tau \le \int_1^{\infty}\frac{\left\|\theta_{1/\tau}\right\|_{E\to E}}{\sqrt{\tau}}d\tau\left\|f\right\|_E\,.$$

Відомо, [5, с. 260], що завдяки напівмультиплікативності $\left\|\theta_\tau\right\|_{E\to E}$ із (1) виходить, що $\left\|\theta_\tau\right\|_{E\to E} = \overline{\overline{o}}\left(\tau^{1/2+\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$, якщо $\tau \to 0$.

Але тоді $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\left\|\theta_{1/\tau}\right\|_{E\to E}}{\sqrt{\tau}}d\tau < \infty$.

Аналогічними міркуваннями показуємо із (2), що $\left\|H_1 f\right\|_E \le c\left\|f\right\|_E$, звідки і виходить наша теорема.

Покладемо

$$\left(Rf\right)(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\left(M_k\right)\chi_{\left[\frac{1}{B_{n+1}},\frac{1}{B_n}\right)}(t)\right.\right.\,.$$

Легко бачити, що при всіх $t \in (0, 1)$

$$\left(Rf\right)(t)=\left(Tf\right)(t)\,.$$

Наслідок. Якщо E задовольняє умови (1), (2), то

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\left(M_k\right)\chi_{\left[\frac{1}{B_{n+1}},\frac{1}{B_n}\right)}(t)\right.\right.\right\|_E \le c\left\|f\right\|_E\,.$$

Зауважимо, що при наших припущеннях відносно системи $\left\{\varphi_n(x)\right\}$, на підставі узагальнення теореми Мерсера, яке отримав Буллін [6], $\frac{c_n}{M_n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Скажімо, що симетричний простір E володіє B-властивістю відносно системи $\left\{\varphi_k(x)\right\}$, якщо для будь-якої послідовності $\left\{\alpha_k\right\}$, такої, що

$$\frac{\alpha_k}{M_k}\to 0\ \ (k\to\infty),$$

знайдеться $f \in E$ та послідовність $\left\{n_k\right\}$, такі, що $c_{n_k}=\alpha_k$.

С. Банах показав, що L_1 володіє B-властивістю відносно тригонометричної системи. В. О. Родін [2] показав, що якщо $E \neq L_1$, то цей простір не володіє B-властивістю відносно будь-якої рівномірно обмеженої ортонормованої системи. Ми перенесемо це твердження на випадок систем, що не є обмеженими у сукупності.

Теорема 2. *Нехай $E \neq L_1$. Тоді E не володіє B-властивістю відносно будь-якої ортонормованої системи із L_∞.*

Доведення. Використовуючи відому нерівність [3, с. 162], якщо $\psi(t)=t/\varphi_E(t)$, то

$$\int_0^{1/B_n} f^*(s)ds \le \psi\left(\frac{1}{B_n}\right)\left\|f\right\|_E=\frac{1}{B_n\varphi_E\left(\frac{1}{B_n}\right)}\left\|f\right\|_E\,.$$

Далі, тому що $\left\|f\right\|_E \ge \left\|f^*(t)\chi_{(0,s)}(t)\right\|_E \ge f^*(s)\varphi_E(s)$ при $0 < s \le 1$, то

$$\int_{1/B_n}^{1} \frac{f^*(s)}{\sqrt{s}} ds \le \int_{1/B_n}^{1} \frac{f^*(s)}{\sqrt{s}\varphi_E(s)} ds \|f\|_E .$$

Якщо симетричний простір $E \ne L_1$, то

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_E(t)}{t} = \infty .$$

Звідки $\frac{1}{\sqrt{s}\varphi_E(s)} = \overline{\overline{o}}\left(s^{-3/2} \right)$ і $\int_{1/B_n}^{1} \frac{1}{\sqrt{s}\varphi_E(s)} ds = \overline{\overline{o}}\left(B_n^{1/2} \right)$.

Далі, з леми 1 випливає

$$\sum_{k=1}^{n} c_k M_k \le AB_n \mu_n \|f\|_E , \tag{4}$$

де $\mu_n = \frac{1}{B_n \varphi_E\left(\frac{1}{B_n}\right)} + B_n^{-1/2} \int_{1/B_n}^{1} \frac{1}{\sqrt{s}\varphi_E(s)} ds \to 0$ при $n\to\infty$.

Але при будь-якій послідовності $\{\mu_n\}$ такій, що $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, знайдеться послідовність $\{\alpha_n\}$ така, що $\frac{\alpha_n}{M_n} \to 0$ при $n\to\infty$ і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k M_k}{B_n \mu_n} = \infty . \tag{5}$$

Із (4) і (5) виходить, що E не володіє B-властивістю відносно системи $\{\varphi_n(x)\}$.

Висновки. Отримані деякі нові оцінки коефіцієнтів Фур'є функцій з симетричних просторів.

Список використаних джерел:

1. Гулисашвили А. Б. Коэффициенты Фурье суммируемых функций / А. Б. Гулисашвили, В. А. Родин, Е. М. Семенов // Мат. сб. – 1977. – Т. 102. – № 3. – С. 362–371.
2. Родин В. А. Точные оценки коэффициентов Фурье и K-функционалы / В. А. Родин, В. И. Овчинников, В. Д. Распопова // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32. – Вып. 3. – С. 295–302.
3. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
4. Calderon A.P. Spaces between L_1 and L_∞ and theorem of Marcinkiewicz / A. P. Calderon // Studia Math. – 1966. – V. 26. – № 3. – P. 273–299.

5. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : ИЛ, 1962. – 829 с.
6. Bullen P. S. Properties of the coefficient of orthonormal sequences / P. S. Bullen // Canad. J. Math. – 1961. – V. 13. – № 2. – P. 305–315.

Some new estimates of the Fourier coefficients for functions from symmetrical spaces are obtained.

Key words: *Fourier coefficients, functions, symmetric space, theorem, trigonometric system, property, totality.*

Отримано: 18.06.2010

УДК 517.443

І. М. Конет[*], д-р фіз.-мат. наук,
М. П. Ленюк[**], д-р фіз.-мат. наук

[*] Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський
[**] Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, м. Чернівці

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА–ФУР’Є–(КОНТОРОВИЧА–ЛЄБЄДЄВА) НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом порівняння розв’язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Ейлера, Фур’є та Конторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку, методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення, підсумовано поліпараметричну сім’ю функціональних рядів за власними елементами відповідного гібридного диференціального оператора.

Ключові слова: *функціональні ряди, функції Бесселя, головні розв’язки, гібридне інтегральне перетворення, функції впливу, функції Гріна, умови спряження, умова однозначної розв’язності, основна тотожність, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу знаходяться, як правило, в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що