УДК 517.5

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ СІЧНИХ ПЛОЩИН НА ВИПАДОК ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ЧЕБИШОВСЬКОЇ ТОЧКИ СИСТЕМИ ОПУКЛИХ ОБМЕЖЕНИХ ЗАМКНЕНИХ МНОЖИН, ЯКІ НЕПЕРЕРВНО ЗМІНЮЮТЬСЯ, ВІДНОСНО СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ПІДПРОСТОРУ

У статті узагальнено метод січних площин розв'язування задачі опуклого програмування на випадок задачі відшукання чебишовської точки системи опуклих обмежених замкнених множин лінійного над полем комплексних чисел нормованого простору, які неперервно змінюються у розумінні метрики Гаусдорфа, відносно скінченновимірного підпростору цього простору.

Ключові слова: *система опуклих обмежених замкнених множин, відносна чебишовська точка, метод січних площин.*

Вступ. У роботі для відшукання чебишовської точки системи опуклих обмежених замкнених множин лінійного над полем комплексних чисел нормованого простору, які неперервно змінюються у розумінні метрики Гаусдорфа, відносно скінченновимірного підпростору цього простору модифіковано метод січної площини розв'язування задачі опуклого програмування, запропонований у праці [1], а також доведено його збіжність.

Постановка задачі. Нехай X – лінійний над полем комплексних чисел нормований простір. Для підмножини F та елемента g цього простору покладемо $E_F(g)=\inf\limits_{y\in F}\|g-y\|$. Величину $E_F(g)$ називають найкращим наближенням елемента g множиною F або відстанню від цього елемента до множини F.

Будемо позначати через $O(X)$ сукупність опуклих обмежених замкнених множин простору X, через $H(A,B)=\max\left\{\sup\limits_{x\in A}E_B(x),\sup\limits_{y\in B}E_A(y)\right\}$ — гаусдорфову відстань між множинами A,B із $O(X)$.

Нехай, крім того, S – компакт, $C(S,O(X))$ – множина багатозначних відображень компакта S в X таких, що для кожного $s\in S$

$a(s)=O_s\in O(X)$ і вони неперервні на S відносно метрики Гаусдорфа на $O(X)$, $a\in C\big(S,O(X)\big)$, V – лінійний підпростір простору X, породжений лінійно незалежними векторами $g_i\in X$, $i=\overline{1,n}$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V)=\min_{g\in V}\max_{s\in S}E_{a(s)}(g)=\min_{g\in V}\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\|g-y\|=$$
$$=\min_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n}\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^n\alpha_i g_i-y\right\|. \tag{1}$$

Існує елемент $g^*\in V$ такий, що $\alpha_a^*(V)=\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*-y\right\|$. Його будемо називати чебишовською точкою відносно підпростору V (у підпросторі V) системи $\{a(s),s\in S\}$ опуклих обмежених замкнених множин простору X, які неперервно змінюються щодо гаусдорфової відстані на $O(X)$, або екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Задача про відшукання відносної чебишовської точки виникає, зокрема, при найкращій рівномірній апроксимації неперервного у розумінні метрики Гаусдорфа багатозначного відображення множинами сталих однозначних відображень.

Практичне відшукання величини (1) та її екстремального елемента вимагає побудови відповідних чисельних методів.

Мета роботи. Побудувати чисельний метод відшукання величини (1) та її екстремального елемента.

Допоміжні твердження. Позначимо через X^* – простір, спряжений з X, через B^* – замкнену одиничну кулю простору X^*: $B^*=\left\{f:f\in X^*,\|f\|\le 1\right\}$. Як відомо (див., наприклад, [2, с. 156]), для будь-якого елемента $z\in X$ існує елемент $f_z\in B^*$ такий, що $f_z(z)=\|z\|$. Звідси випливає, що для всіх $z\in X$

$$\|z\|=\max_{f\in B^*}\operatorname{Re}f(z). \tag{2}$$

Твердження 1. *Нехай* g_i, $i=\overline{1,n}$, *– лінійно незалежні елементи простору* X. *Тоді існують функціонали* $f_j\in B^*$, $j=\overline{1,m_1}$, *такі, що*

$$\min_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_{\mathbb{R}^n}}\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^n\alpha_i\operatorname{Re}f_j(g_i)=\overline{\mu}>0,$$

де $S_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \alpha : \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$ *– одинична сфера простору* $\mathbb{R}^n$.

Твердження 2. *Нехай* $g \in X$, $a \in C(S, O(X))$,

$$E_{a(s)}(g) = \inf_{y \in a(s)} \|g - y\|, \ s \in S .$$

Функція $s \in S \to E_{a(s)}(g)$ *є неперервною по s на S.*

Твердження 3. *Нехай F – опукла замкнена множина простору X, g – довільний елемент цього простору. Має місце рівність*

$$E_F(g) = \inf_{y \in F} \|g - y\| = \max_{f \in B^*} \left(\operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right).$$

Твердження 4. *Функція*

$$(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \to \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i - y \right\|$$

є неперервною по $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *на* $\mathbb{R}^n$.

Основні результати. Поряд із задачею відшукання величини (1) будемо розглядати таку задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень:

$$\inf \theta \tag{3}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f(g_i) - \theta \le \sup_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y), \ f \in B^*, \ s \in S . \tag{4}$$

Теорема 1. *Задача (3), (4) має оптимальний розв'язок. Справедлива рівність* $\theta^* = \alpha_a^*(V)$, *де* θ^* *– оптимальне значення цільової функції задачі (3), (4).*

Для того щоб елемент $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ *був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб вектор* $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*; \theta^*)$ *був оптимальним розв'язком задачі (3), (4).*

<u>Доведення</u>. Нехай $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Тоді з урахуванням твердження 3

$$\alpha_a^*(V) = \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i - y \right\| =$$
$$= \max_{s\in S} \max_{f\in B^*} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \operatorname{Re} f(g_i) - \sup_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right). \tag{5}$$

З (5) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \operatorname{Re} f(g_i) - \alpha_a^*(V) \le \sup_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y),\ f\in B^*,\ s\in S.$$

Тому вектор $(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*;\alpha_a^*(V))$ є допустимим розв'язком задачі (3), (4). У зв'язку з цим

$$\inf\{\theta : \text{при обмеженнях (4)}\} \le \alpha_a^*(V). \tag{6}$$

Нехай тепер $(\alpha_1',...,\alpha_n';\theta')$ є довільним допустимим розв'язком задачі (3), (4). Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \operatorname{Re} f(g_i) - \theta' \le \sup_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y),\ f\in B^*,\ s\in S.$$

З цієї нерівності з урахуванням твердження 3 отримаємо

$$\alpha_a^*(V) \le \max_{s\in S} \max_{f\in B^*} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \operatorname{Re} f(g_i) - \sup_{y\in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right) =$$
$$= \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' g_i - y \right\| \le \theta'. \tag{7}$$

Тому

$$\alpha_a^*(V) \le \inf\{\theta : \text{при обмеженнях (4)}\}. \tag{8}$$

З (6), (8) маємо, що

$$\theta^* = \inf\{\theta : \text{при обмеженнях (4)}\} = \alpha_a^*(V). \tag{9}$$

Оскільки вектор $(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*;\alpha_a^*(V))$ є допустимим розв'язком задачі (3), (4), то звідси випливає, що він є її оптимальним розв'язком.

Нехай тепер вектор $(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*;\theta^*)$ є оптимальним розв'язком задачі (3), (4). Оскільки має місце рівність (9) і для будь-якого допустимого розв'язку $(\alpha_1',...,\alpha_n';\theta')$ задачі (3), (4) справедливе співвідношення (7), то

$$\alpha_a^*(V) \le \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i - y \right\| \le \theta^* = \alpha_a^*(V).$$

Звідси випливає, що елемент $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Перейдемо до описання запропонованого методу. На попередньому кроці методу вибираємо функціонали $f_j \in B^*$, $j = \overline{1, m_1}$, такі, що

$$\min_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_{\mathbb{R}^n}} \max_{1\le j\le m_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f_j\left(g_i\right) = \overline{\mu} > 0, \tag{10}$$

та довільні точки $s_j \in S$, $j = \overline{1, m_1}$

Відповідно до твердження 1 вищеназвані функціонали існують.

Нехай на l-му кроці методу отримано оптимальний розв'язок $\left(\alpha_1^l,\dots,\alpha_n^l;\theta^l\right)$ такої задачі лінійного програмування

$$\min \theta \tag{11}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f_j\left(g_i\right) - \theta \le \sup_{y\in a\left(s_j\right)} \operatorname{Re} f_j\left(y\right),\ j = \overline{1, m_l}, \tag{12}$$

де $m_l = m_1 + l - 1$, $l = 1, 2, \dots$, $s_j \in S$, $f_j \in B^*$, $j = \overline{1, m_l}$.

Оскільки має місце співвідношення (10), то цільова функція задачі (11), (12) обмежена знизу на множині її допустимих розв'язків. Тому оптимальний розв'язок $\left(\alpha_1^l,\dots,\alpha_n^l;\theta^l\right)$ цієї задачі існує (див., наприклад, [3, с. 110]).

Теорема 2. *Має місце співвідношення*

$$\theta^l \le \alpha_a^*\left(V\right) \le \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l g_i - y\right\|,\ l = 1, 2, \dots. \tag{13}$$

Якщо

$$\theta^l = \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l g_i - y\right\|, \tag{14}$$

то вектор $g^l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l g_i$ *є екстремальним елементом для величини (1) і справедлива рівність*

$$\theta^l = \alpha_a^*\left(V\right) = \max_{s\in S} \inf_{y\in a(s)} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l g_i - y\right\|. \tag{15}$$

<u>Доведення</u>. Оскільки вектор $\left(\alpha_1^l,...,\alpha_n^l;\theta^l\right)$ є оптимальним розв’язком задачі (11), (12), то з урахуванням теореми 1 одержимо, що

$$\theta^l = \inf\left\{\theta : \text{при обмеженнях (12)}\right\} \le$$
$$\le \inf\left\{\theta : \text{при обмеженнях (4)}\right\} = \alpha_a^*\left(V\right).$$

Справедливість лівої частини співвідношення (13) встановлена. Оскільки вектор $g^l = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i \in V$, то має місце права нерівність співвідношення (13). Якщо має місце рівність (14), то з (13) випливає, що має місце рівність (15) і, отже, вектор $g^l = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Продовжимо опис методу. Якщо для $l \in \{1,2,...\}$ має місце рівність (14), то згідно з теоремою 2 вектор $g^l = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i$ є екстремальним елементом для величини (1) і $\alpha_a^*\left(V\right) = \theta^l$.

В цьому випадку процес відшукання величини (1) і її екстремального елемента завершено.

Якщо ж $\theta^l < \max\limits_{s\in S}\inf\limits_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i - y\right\|$, то знаходимо $s_{m_l+1} \in S$, $f_{m_l+1} \in B^*$ такі, що

$$\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i - y\right\| = \inf_{y\in a\left(s_{m_l+1}\right)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i - y\right\| =$$
$$= \max_{f\in B^*}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l \operatorname{Re} f\left(g_i\right) - \sup_{y\in a\left(s_{m_l+1}\right)}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right) = \tag{16}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l \operatorname{Re} f_{m_l+1}\left(g_i\right) - \sup_{y\in a\left(s_{m_l+1}\right)}\operatorname{Re} f_{m_l+1}\left(y\right).$$

Тоді до обмежень (12) задачі лінійного програмування (11), (12) добавляємо обмеження

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \operatorname{Re} f_{m_l+1}\left(g_i\right) - \theta \le \sup_{y\in a\left(s_{m_l+1}\right)}\operatorname{Re} f_{m_l+1}\left(y\right),$$

знаходимо оптимальний розв’язок $\left(\alpha_1^{l+1},...,\alpha_n^{l+1};\theta^{l+1}\right)$ отриманої в результаті цього нової задачі лінійного програмування і т.д.

Теорема 3. *Послідовність* $\left\{\theta^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ *є неспадною, існує* $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^l$. *Послідовність* $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$, *де* $\alpha^l=\left(\alpha_1^l,...,\alpha_n^l\right)$, $l=1,2,...$, *є обмеженою послідовністю простору* $\mathbb{R}^n$. *Для будь-якої часткової границі* $\alpha^*=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*\right)$ *послідовності* $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ *елемент* $g^*=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i$ *є екстремальним елементом для величини (1).*

Має місце співвідношення $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^l=\alpha_a^*\left(V\right)=\max\limits_{s\in S}\inf\limits_{y\in a(s)}\left\|g^*-y\right\|$.

<u>Доведення.</u> Оскільки обмеження задачі лінійного програмування (11), (12), яка розв’язується на l-му кроці, включаються в обмеження задачі лінійного програмування, яка розв’язується на $l+1$-му кроці методу, а цільові функції цих задач однакові, то для відповідних їх оптимальних розв’язків $\left(\alpha_1^l,...,\alpha_n^l;\theta^l\right)$ і $\left(\alpha_1^{l+1},...,\alpha_n^{l+1};\theta^{l+1}\right)$ виконується нерівність $\theta^l\le\theta^{l+1}$, $l=1,2,...$. Згідно з теоремою 2 $\theta^l\le\alpha_a^*\left(V\right)$. Тому існує $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^l$ і справедлива нерівність

$$\lim_{l\to\infty}\theta^l\le\alpha_a^*\left(V\right). \tag{17}$$

Переконаємося, що послідовність $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$, де $\alpha^l=\left(\alpha_1^l,...,\alpha_n^l\right)$, $l=1,2,...$, є обмеженою послідовністю простору $\mathbb{R}^n$.

Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність $\left\{\alpha^{l_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left\|\alpha^{l_\nu}\right\|=+\infty$. Без обмеження загальності будемо вважати, що уже $\lim\limits_{l\to\infty}\left\|\alpha^l\right\|=+\infty$. Оскільки $\left(\alpha_1^l,...,\alpha_n^l;\theta^l\right)$ є оптимальним розв’язком задачі (11), (12), то

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l\operatorname{Re}f_j\left(g_i\right)-\theta^l\le\sup_{y\in a\left(s_j\right)}\operatorname{Re}f_j\left(y\right),\ j=\overline{1,m_1},\ l=1,2,....$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^l}{\left\|\alpha^l\right\|}\operatorname{Re} f_j\left(g_i\right)-\frac{1}{\left\|\alpha^l\right\|}\theta^l \le \frac{1}{\left\|\alpha^l\right\|}\sup_{y\in a\left(s_j\right)}\operatorname{Re} f_j\left(y\right),\ j=\overline{1,m_1},\ l=1,2,\ldots \quad (18)$$

Оскільки $\left(\frac{\alpha_1^l}{\left\|\alpha^l\right\|},\ldots,\frac{\alpha_n^l}{\left\|\alpha^l\right\|}\right)\in S_{\mathbb{R}^n}$, то з послідовності $\left\{\left(\frac{\alpha_1^l}{\left\|\alpha^l\right\|},\ldots,\frac{\alpha_n^l}{\left\|\alpha^l\right\|}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\left\{\left(\frac{\alpha_1^{l_\nu}}{\left\|\alpha^{l_\nu}\right\|},\ldots,\frac{\alpha_n^{l_\nu}}{\left\|\alpha^{l_\nu}\right\|}\right)\right\}_{\nu=1}^{\infty}$. Нехай $\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\alpha_1^{l_\nu}}{\left\|\alpha^{l_\nu}\right\|},\ldots,\frac{\alpha_n^{l_\nu}}{\left\|\alpha^{l_\nu}\right\|}\right)=\left(\alpha_1',\ldots,\alpha_n'\right)$.

Зрозуміло, що $\left(\alpha_1',\ldots,\alpha_n'\right)\in S_{\mathbb{R}^n}$. З урахуванням зазначеного вище, обмеженості послідовності $\left\{\theta^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ (існує $\lim_{l\to\infty}\theta^l$) з (18) одержимо, що $\max_{1\le j\le m_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' \operatorname{Re} f_j\left(g_i\right)\right)\le 0$, що суперечить (10).

Отже, $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору $\mathbb{R}^n$. Нехай $\alpha^*=\left(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*\right)$ її часткова границя. Переконаємося, що вектор $g^*=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1).

Існує підпослідовність $\left\{\alpha^{l_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha^{l_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\left(\alpha_1^{l_\nu},\ldots,\alpha_n^{l_\nu}\right)=\left(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*\right)=\alpha^*.$$

На кроці $l_\nu+1$ до обмежень задачі лінійного програмування типу (11), (12), яка розв'язана на кроці l_ν, добавляється обмеження

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\right)-\theta\le \sup_{y\in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)}\operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(y\right),$$

де $$\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}g_i-y\right\|=\inf_{y\in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}g_i-y\right\|=$$

$$= \max_{f \in B^*} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} \operatorname{Re} f(g_i) - \sup_{y \in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)} \operatorname{Re} f(y) \right) = \tag{19}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(g_i) - \sup_{y \in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(y).$$

Тому

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_{\nu+1}} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(g_i) - \theta^{l_{\nu+1}} \le \sup_{y \in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(y),\ \nu = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Маємо далі з урахуванням (19), що

$$\left| \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i - y \right\| - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_{\nu+1}} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(g_i) - \sup_{y \in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(y) \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(g_i) - \sup_{y \in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(y) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_{\nu+1}} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(g_i) + \sup_{y \in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(y) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^{l_\nu} - \alpha_i^{l_{\nu+1}} \right) \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(g_i) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_i^{l_\nu} - \alpha_i^{l_{\nu+1}} \right| \|g_i\|, \nu = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки $\lim_{\nu \to \infty} \left(\alpha_1^{l_\nu}, \ldots, \alpha_n^{l_\nu} \right) = \left(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^* \right)$, то звідси, неперервності функції $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \to \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i - y \right\|$ по $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ на $\mathbb{R}^n$ (див. твердження 4) та нерівностей (13), (20) випливає, що

$$\alpha_a^*(V) \le \lim_{\nu \to \infty} \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i - y \right\| = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i - y \right\| =$$

$$= \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| g^* - y \right\| =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_{\nu+1}} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(g_i) - \sup_{y \in a\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}(y) \right) \leq$$

$$\leq \lim_{\nu \to \infty} \theta^{l_{\nu+1}} = \lim_{l \to \infty} \theta^l \leq \alpha_a^*(V).$$

Звідси маємо, що

$$\lim_{l \to \infty} \theta^l = \alpha_a^*(V) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| g^* - y \right\|.$$

Тому $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Зауваження. З доведеної теореми випливає, що оцінки (13) можна використати для відшукання величини $\alpha_a^*(V)$ з наперед заданою точністю.

Список використаних джерел:

1. Kelly J. E. The „Cutting plane" methods for solving convex programs / J. E. Kelly // SIAM J. – 1960. – 8, № 4. – P. 703–712.
2. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М. : Мир, 1967. – 624 с.
3. Юдин Д. Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М. : Физматгиз, 1963. – 774 с.

Generalized method of cutting planes for solving a convex programming to the case of the problem of finding the Chebyshev point of a system of convex closed bounded sets of linear over the complex numbers normed spaces that are continually changing in the sense of Hausdorff metric, relatively the finite-dimensional subspace of this space.

Key words: *Chebyshev point, a system of convex bounded closed sets, method of cutting planes.*

Отримано: 25.05.2010