УДК 517.443

О. Ю. Тарновецька, викладач

Чернівецький факультет національного технічного університету „ХПІ", м. Чернівці

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній осі з однією точкою спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Лежандра та Ейлера методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, умова однозначної розв'язності, логічна схема.*

Постановка проблеми. Тонкостінні елементи композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростіших випадках величини, які характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді поліпараметричного невласного інтегралу, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена дана робота.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_1^+ = \{r : r \in (0, R_1) \bigcup (R_1, \infty)\}$ розв'язок сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Лежандра та Ейлера

$$\begin{aligned} &\left(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in \left(0, R_1\right), \\ &\left(B_\alpha - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in \left(R_1, \infty\right), \end{aligned} \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) u_2(r)\right]\bigg|_{r=R_1} = \omega_{j1}, \; j=1,2. \tag{2}$$

У рівностях (1), (2) беруть участь узагальнений диференціальний оператор Лежандра 2-го порядку [1]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\right), \ \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0,$$

диференціальний оператор Ейлера 2-го порядку [2]

$$B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2, \ 2\alpha+1>0, \ \mu = (\mu_1, \mu_2)$$

та величини

$$q_j > 0, \ \alpha_{jk}^1 \geq 0, \ \beta_{jk}^1 \geq 0, \ c_{11}c_{21} > 0,$$

$$c_{j1} = \alpha_{2j}^1 \beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1 \beta_{2j}^1, \ j,k = 1,2.$$

Фундаментальну систему розв’язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2\right)\mathrm{v} = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра 1-го роду $P^{(\mu)}_{-1/2+q_1}(\operatorname{ch} r)$ та 2-го роду $L^{(\mu)}_{-1/2+q_1}(\operatorname{ch} r)$ [1], фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_\alpha - q_2^2\right)\mathrm{v} = 0$ утворюють функції $\mathrm{v}_1 = r^{-(\alpha-q_2)}$ та $\mathrm{v}_2 = r^{-(\alpha+q_2)}$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв’язків дає можливість побудувати загальний розв’язок крайової задачі (1), (2) методом функцій Коші [2,3]:

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 P^{(\mu)}_{-1/2+q_1}(chr) + \int_0^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) sh\rho d\rho, \\ u_2 &= A_2 r^{-(\alpha+q_1)} + \int_{R_1}^{\infty} E_2(r,\rho) g_2^*(\rho) \rho^{2\alpha+1} d\rho, g_2^*(\rho) = \rho^{-2} g_2(\rho). \end{aligned} \tag{3}$$

У рівностях (3) $E_j(r,\rho)$ — функції Коші [2, 3]:

$$\begin{gathered} E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0, \\ \left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0} - \left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, j = 1,2, \end{gathered} \tag{4}$$

де

$$\varphi_1(r) = \operatorname{sh}\rho, \ \varphi_2(r) = \rho^{2\alpha+1}$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E_1}\equiv C_1P^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr), & 0<r<\rho<R_1,\\ \overset{+}{E_2}\equiv C_2P^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr)+D_2L^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr), & 0<\rho<r<R_1.\end{cases}$$

Властивості (4) функції Коші дають співвідношення:

$$(C_2-C_1)=-B_{(\mu)}(q_1)L^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho), D_2=B_{(\mu)}(q_1)P^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho),$$

$$B_\mu(q_1)=\frac{\pi}{2}\frac{2^{\mu_1}}{2^{\mu_2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\nu^+)\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\nu^-)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\nu^+)\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\nu^-)};\nu^\pm=\frac{1}{2}(\mu_1\pm\mu_2). \quad (5)$$

Доповнимо систему рівностей (5) алгебраїчним рівнянням

$$(\alpha_{11}^1 \frac{d}{dr}+\beta_{11}^1)\overset{+}{E_1}\Big|_{r=R_1}=0: Z^{(\mu),11}_{-\frac{1}{2}+q_1,11}(chR_1)C_2+Z^{(\mu),12}_{-\frac{1}{2}+q_1,11}(chR_1)D_2=0. \quad (6)$$

Із алгебраїчної системи (5), (6) знаходимо, що

$$C_1=B_{(\mu)}(q_1)[Z^{(\mu),11}_{-\frac{1}{2}+q_1,11}(chR_1)]^{-1}F^{(\mu),1}_{-\frac{1}{2}+q_1,11}(chR_1,ch\rho).$$

Цим функція Коші $E_1(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_1(r,\rho)=\frac{B_{\mu(q_1)}}{Z^{(\mu),11}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1)}\begin{cases}P^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr)F^{(\mu);1}_{-\frac{1}{2}+q_1,11}(chR_1,ch\rho), 0<r<\rho<R_1,\\ P^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)F^{(\mu),1}_{-\frac{1}{2}+q_1,11}(chR_1,ch\rho), 0<\rho<r<R_1.\end{cases} \quad (7)$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E_2}\equiv C_1r^{-\alpha-q_2}+D_1r^{-\alpha+q_2}, & R_1<r<\rho<\infty,\\ \overset{+}{E_2}\equiv C_2r^{-\alpha-q_2}, & R_1<\rho<r<\infty.\end{cases}$$

Властивості (4) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_1-C_2)\rho^{-\alpha-q_2}-D_1\rho^{-\alpha+q_2}=0,$$

$$(\alpha+q_2)(C_1-C_2)\rho^{-\alpha-q_2}+(-\alpha+q_2)D_1\rho^{-\alpha+q_2}=\rho^{-2\alpha}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$(C_1-C_2)=\frac{1}{2q_2}\rho^{-\alpha+q_2},\ D_1=\frac{1}{2q_2}\rho^{-\alpha-q_2}. \quad (8)$$

Доповнимо систему (8) алгебраїчним рівнянням

$$(\alpha_{12}^1 \, d\!\!\diagup\!_{dr} + \beta_{12}^1)\,\bar{E}_2\Big|_{r=R_1} = 0 : Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1)C_1 + Z_{\alpha,12}^{12}(q_2, R_1)D_1 = 0. \quad (9)$$

Із алгебраїчної системи (8), (9) знаходимо, що

$$C_2 = -\frac{1}{2q_2 Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1)}\left[Z_{\alpha,12}^{12}(q_2, R_1)\rho^{-\alpha-q_2} - Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1)\rho^{-\alpha+q_2} \right] \equiv$$

$$\equiv -\left[2q_2 Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1) \right]^{-1} \psi_{\alpha,12}^{1*}(q_2, \rho).$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho) = -\frac{1}{2q_2 Z_{\alpha,12}^{11}} \begin{cases} \rho^{-\alpha-q_2}\psi_{\alpha,12}^{1*}(q_2, r), R_1 < r < \rho < \infty, \\ r^{-\alpha-q_2}\psi_{\alpha,12}^{1*}(q_2, \rho), R_1 < \rho < r < \infty. \end{cases} \quad (10)$$

У рівностях (9), (10) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha,j2}^{m1}(q_2, R_m) =$$

$$= (\alpha_{j2}^m \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^m)\rho^{-\alpha-q_2}\Big|_{r=R_1} \equiv \left[-(\alpha+q_2)R_1^{-1}\alpha_{j2}^m + \beta_{j2}^m \right] R_1^{-\alpha-q_2},$$

$$Z_{\alpha,j2}^{m2}(q_2, R_m) =$$

$$= (\alpha_{j2}^m \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^m)\rho^{-\alpha+q_2}\Big|_{r=R_1} \equiv \left[(-\alpha+q_2)R_1^{-1}\alpha_{j2}^m + \beta_{j2}^m \right] R_1^{-\alpha+q_2}.$$

Повернемось до формул (3). Умови спряження (2) для визначення величин A_1, A_2 дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} Z_{-1\!/\!_2+q_1;11}^{(\mu),11}(chR_1)A_1 - Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1)A_2 &= \omega_{11}, \\ Z_{-1\!/\!_2+q_1;21}^{(\mu),11}(chR_1)A_1 - Z_{\alpha,22}^{11}(q_2, R_1)A_2 &= \omega_{21} + G_{12}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут бере участь функція

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{shR_1}\int_0^{R_1} \frac{P_{-1\!/\!_2+q_1}^{(\mu)}(ch\rho)}{Z_{-1\!/\!_2+q_1;11}^{(\mu);11}(chR_1)} g_1(\rho)sh\rho d\rho + \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{\infty} \frac{\rho^{-\alpha-q_2}g_2(\rho)}{Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1)}\rho^{2\alpha-1}d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1), (2): для $\vec{q} = \{q_1; q_2\} \neq \vec{0}$ визначник алгебраїчної системи (11)

$$\Delta_\mu(q) \equiv Z_{\nu_1;21}^{(\mu);11}(chR_1)Z_{\alpha,12}^{11}(q_2, R_1) -$$

$$-Z_{\nu_1;11}^{(\mu);11}(chR_1)Z_{\alpha,22}^{11}(q_2, R_1) \neq 0, \nu_1 = -\frac{1}{2} + q_1. \quad (12)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1), (2):

1) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{1}_{\alpha,(\mu);11}(r,q)=\frac{-Z^{11}_{\alpha,22}(q_2,R_1)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr),$$

$$R^{1}_{\alpha,(\mu);21}(r,q)=\frac{Z^{11}_{\alpha,12}(q_2,R_1)}{\Delta\alpha,_{(\mu)}(q)}P^{(\mu)}_{\nu_1}(chr),$$

$$R^{2}_{\alpha,(\mu);11}(r,q)=\frac{-Z^{(\mu);11}_{\nu_1;21}(chR_1)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}r^{-\alpha-q_2}, \tag{13}$$

$$R^{2}_{\alpha,(\mu);21}(r,q)=\frac{Z^{(\mu);11}_{\nu_1;11}(chR_1)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}r^{-\alpha-q_2}.$$

2) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\alpha,(\mu);11}(r,\rho,q)=\frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}\times\begin{cases}P^{\mu}_{\nu_1}(chr)\Big[Z^{11}_{\alpha,12}(q_2,R_1)F^{(\mu),1}_{\nu_1;21}(chR_1,ch\rho)-\\ \quad -Z^{11}_{\alpha,22}(q_2,R_1)F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}(chR_1,ch\rho)\Big],\ 0<r<\rho<R_1,\\ P^{\mu}_{\nu_1}(ch\rho)\Big[Z^{11}_{\alpha,12}(q_2,R_1)F^{(\mu),1}_{\nu_1;21}(chR_1,chr)-\\ \quad -Z^{11}_{\alpha,22}(q_2,R_1)F^{(\mu),1}_{\nu_1;11}(chR_1,chr)\Big],\ 0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$H_{\alpha,(\mu);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}P^{(\mu)}_{-1/2+q_1}(chr)\rho^{-\alpha-q_2},$$

$$H_{\alpha,(\mu);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{shR_1}\frac{1}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}P^{(\mu)}_{-1/2+q_1}(ch\rho)r^{-\alpha-q_2},$$

$$H_{\alpha,(\mu);22}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}\begin{cases}\rho^{-\alpha-q_2}[Z^{(\mu);11}_{-1/2+q_{1;11}}(chR_1)\psi^{1*}_{\alpha,22}(q_2,r)-\\ \quad -Z^{(\mu);11}_{-1/2+q_{1;21}}(chR_1)\psi^{1*}_{\alpha,12}(q_2,r)],\quad R_1<r<\rho<\infty,\\ r^{-\alpha-q_2}[Z^{(\mu);11}_{-1/2+q_{1;11}}(chR_1)\psi^{1*}_{\alpha,22}(q_2,\rho)-\\ \quad -Z^{(\mu);11}_{-1/2+q_{1;21}}(chR_1)\psi^{1*}_{\alpha,12}(q_2,\rho)],\quad R_1<\rho<r<\infty.\end{cases} \tag{14}$$

В результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (11) в силу умови (12) та підстановки одержаних значень A_1, A_2 у формули (3), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$u_j(r)=R^j_{\alpha,(\mu);11}(r,q)\omega_{11}+R^j_{\alpha,(\mu);21}(r,q)\omega_{21}+\int\limits_0^{R_1}H_{\alpha,(\mu);j1}(r,\rho,q)\times$$

$$\times g_1(\rho)sh\rho d\rho+\int\limits_{R_1}^{\infty}H_{\alpha,(\mu);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,\ j=1,2. \qquad (15)$$

Побудуємо тепер розв’язок крайової задачі (1), (2) методом гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині I_1^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\alpha,(\mu)}=\theta(r)\theta(R_1-r)\Lambda_{(\mu)}+\theta(r-R_1)B_\alpha, \qquad (16)$$

де $\theta(x)$ — функція Гевісайда [3].

ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$ як сполучення самоспряжених диференціальних операторів є самоспряженим й має одну особливу точку $r=\infty$. А, отже, спектр оператора $M_{\alpha,(\mu)}$ дійсний та неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$ і йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\in G,$$

де G — область визначення ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$.

При цьому функції $V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)$ повинні бути обмеженим на множині I_1^+ розв’язком системи рівнянь

$$\begin{aligned}&\left(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2\right)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)=0, r\in(0,R_1),\\&\left(B_\alpha+b_2^2\right)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)=0, r\in(R_1,\infty)\end{aligned} \qquad (17)$$

за однорідними умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\right]\right|_{r=R_1}=0,\ j=1,2, \qquad (18)$$

де

$$b_j(\beta)=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}, k_j^2\ge 0, j=1,2.$$

Обмеженим на $(0,R_1)$ розв’язком диференціального рівняння $\left(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2\right)v=0,$ є функція $P^{(\mu)}_{-1/2+ib_1}(chr)$[1]. Фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha+b_2^2)v=0$ утворюють функції $V_1=r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r)$ та $V_2=r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r)$ [2].

Якщо покласти

$$V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) = A_1 P^{(\mu)}_{-1/2+ib_1}(chr),$$
$$V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta) = A_2 r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r) + B_2 r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r), \quad (19)$$

то умови спряження (18) дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$Y^{11}_{\alpha;12}(b_2,R_1)A_2 + Y^{12}_{\alpha,12}(b_2,R_1)B_2 = A_1 Z^{(\mu);11}_{-1/2+ib_1;11}(chR_1),$$
$$Y^{11}_{\alpha;22}(b_2,R_1)A_2 + Y^{12}_{\alpha,22}(b_2,R_1)B_2 = A_1 Z^{(\mu);11}_{-1/2+ib_1;21}(chR_1). \quad (20)$$

У рівностях (20) беруть участь функції:

$$Y^{11}_{\alpha;j2}(b_2,R_1) == [(\beta^1_{j2} - \alpha^1_{j2}\alpha R_1^{-1})\cos(b_2\ln R_1) - b_2 R_1^{-1}\alpha^1_{j2}\sin(b_2\ln R_1)]R_1^{-\alpha},$$
$$Y^{12}_{\alpha;j2}(b_2,R_1) == [(\beta^1_{j2} - \alpha^1_{j2}\alpha R_1^{-1})\sin(b_2\ln R_1) + b_2 R_1^{-1}\alpha^1_{j2}\cos(b_2\ln R_1)]R_1^{-\alpha}.$$

Оскільки визначник системи (20)

$$q_\alpha(\beta) \equiv Y^{11}_{\alpha;12}Y^{12}_{\alpha;22} - Y^{11}_{\alpha;22}Y^{12}_{\alpha;12} = c_{21}b_2(\beta)R_1^{-(2\alpha+1)} \neq 0,$$

то при $A_1 = q_\alpha(\beta)$ маємо: $A_2 = \omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)$, $B_2 = -\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)$,

$$\omega_{\alpha,(\mu);j}(\beta) = Z^{(\mu);11}_{-1/2+ib_1;11}(chR_1)Y^{1j}_{\alpha,22}(b_2,R_1) - Z^{(\mu);11}_{-1/2+ib_1;21}(chR_1)Y^{1j}_{\alpha,12}(b_2,R_1),$$

Підставивши вирази A_1, A_2 та B_2 в рівності (19), знаходимо, що функції

$$V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) = q_\alpha(\beta)P^{(\mu)}_{-1/2+ib_1}(chr),$$
$$V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta) = [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)\cos(b_2\ln r) - \omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)\sin(b_2\ln r)]r^{-\alpha}. \quad (21)$$

Наявність вагової функції

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 shr + \theta(r - R_1)\sigma_2 r^{2\alpha-1},$$
$$\sigma_1 = c_{11}R_1^{2\alpha+1} : c_{21}shR_1, \sigma_2 = 1,$$

спектральної функції $V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)$ та спектральної щільності $\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) = \beta[b_2(\beta)]^{-1}([\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)]^2)^{-1}$, дає можливість визначити пряме $H_{\alpha,(\mu)}$ та обернене $H^{-1}_{\alpha,(\mu)}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_1^+ ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$ [4]:

$$H_{\alpha,(\mu)}[g(r)] = \int_0^\infty g(r)V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \quad (22)$$

$$H^{-1}_{\alpha,(\mu)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \quad (23)$$

Функція $g(r)\in G$, де G — область визначення ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$.

При цьому має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$:

$$H_{\alpha,(\mu)}[M_{\alpha,(\mu)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - k_1^2\tilde{g}_1(\beta) - k_2^2\tilde{g}_2(\beta) + \\ +c_{21}^{-1}R_1^{2\alpha+1}\left[Z^1{}_{\alpha,(\mu);12}(\beta)\omega_{21} - Z^1{}_{\alpha,(\mu);22}(\beta)\omega_{11}\right], \quad (24)$$

де

$$Z^1{}_{\alpha,(\mu);i2}(\beta) = (\alpha_{i2}^1\frac{d}{dr} + \beta_{i2}^1)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\Big|_{r=R_1}, i = 1,2.$$

Єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), побудований за відомою логічною схемою [1] методом гібридного інтегрального перетворення ($H_{\alpha,(\mu)}$, $H_{\alpha,(\mu)}^{-1}$), має структуру:

$$u_j(r) = \int_0^{R_1}(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)V_{\alpha,(\mu),1}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q^2})d\beta g_1(\rho)\sigma_1 sh\rho d\rho +$$

$$+\int_{R_1}^\infty(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)V_{\alpha,(\mu),2}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q^2})d\beta g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha-1}d\rho +$$

$$+c_{21}^{-1}R_1^{2\alpha+1}[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z^1{}_{\alpha,(\mu),12}(\beta)V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\omega_{21} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z^1{}_{\alpha,(\mu),22}(\beta)\times$$

$$\times V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\omega_{11}],\ j=1,2, q^2 = \max\left\{q_1^2, q_2^2\right\} \quad (25)$$

Порівнюючи розв'язки (15) й (25) в силу теореми єдиності, отримуємо формули обчислення поліпараметричних невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\alpha,(\mu),j}(\beta)V_{\alpha,(\mu),k}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q^2})d\beta = \frac{1}{\sigma_k}H_{\alpha,(\mu);jk}(r,\rho,q),\ j,k=1,2, \quad (26)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z^1{}_{\alpha,(\mu),12}(\beta)V_{\alpha,(\mu);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q^2})d\beta = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}R^j{}_{\alpha,(\mu);21}(r,q),\ j=1,2, \quad (27)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z^1{}_{\alpha,(\mu),22}(\beta)V_{\alpha,(\mu);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q^2})d\beta = -\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}R^j{}_{\alpha,(\mu);11}(r,q),\ j=1,2. \quad (28)$$

Функції впливу $H_{\alpha,(\mu),jk}(r,\rho,q)$ визначені рівностями (14), а функції Гріна умов спряження $R^{j}_{\alpha,(\mu);11}(r,q)$ визначені формулами (13).

Зауваження 1. Якщо $q^2 = q_1^2$, то $k_1^2 = 0, k_2^2 = q_1^2 - q_2^2 \geq 0$. У цьому випадку $b_1 = \beta, b_2 = (\beta^2 + q_1^2 - q_2^2)^{1/2}$, $\beta^2 + q^2 \equiv \beta^2 + q_1^2$.

Зауваження 2. Якщо $q^2 = q_2^2$, то $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2 \geq 0, k_2^2 = 0$. У цьому випадку $b_1 = (\beta^2 + q_2^2 - q_1^2)^{1/2}, b_2 = \beta$, $\beta^2 + q^2 \equiv \beta^2 + q_2^2$.

Зауваження 3. Оскільки у формулах (26)—(28) праві частини не залежать від нерівності $q_1^2 - q_2^2 \geq 0$ або нерівності $q_2^2 - q_1^2 \geq 0$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_0^2$, звужуючи при цьому сім'ю невласних інтегралів.

Основна теорема. Якщо вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; B_\alpha[g_2(r)]\}$ неперервна на множині I_1^+, функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження (2) і виконана умова (12) однозначної розв'язності крайової задачі (1), (2), то справджуються формули (25)—(28) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$, визначеного рівністю (16).

Список використаних джерел:

1. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.

By the method of comparison of decisions, built on the polar axis with the one contact point for the separate system of differential equalizations of Lezhandra and Euler by the method of functions Koshi and by the method of the proper hybrid integral transform, polyparametric family of infinite integrals is calculated.

Key words: *infinite integrals, functions Koshi, the main decisions, hybrid integrated transform, the basic identity, condition of simple solvability, logical chart.*

Отримано: 20.07.2009