УДК 517.91: 532. 2

О. М. Нікітіна, старший викладач
Національний технічний університет «ХПІ», м. Харків

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА-ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя-Ейлера-Фур'є на полярній осі з двома точками спряження.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, ядро Діріхле, спектральна функція, спектральна щільність, інтегральне зображення, основна тотожність.*

Вступ. Відомо, що метод відокремлення змінних та метод інтегральних перетворень є найбільш поширеними методами побудови точних аналітичниз розв'язків лінійних крайових задач математичної фізики. У випадку кусково-однорідних середовищ метод відокремлення змінних практично не застосовний, але одним із ефективних методів побудови точних розв'язків крайових задач в таких середовищах виявився метод гібридних інтегральних перетворень, започаткованих в роботах Я. С. Уфлянда [1]. У подальшому основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень (ГІП) розвинуто в монографії [2]. Ця стаття присвячена побудові одного класу ГІП та їх застосуванню.

Основна частина. Побудуємо методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\upsilon,(\alpha)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\upsilon,\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\alpha_2}^* +$$
$$+\theta(r - R_2)a_3^2 \frac{d^2}{dr^2}, \qquad (1)$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3], $a_j^2 > 0$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

У рівності (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя B_{υ,α_1} [4], Ейлера $B_{\alpha_2}^*$ [5] та Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [5]:

$$B_{\upsilon,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_1 + 1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\upsilon^2 - \alpha_1^2}{r^2}, \quad B_{\alpha_2}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2,$$
$$\upsilon \geq \alpha_1, \; 2\alpha_j + 1 > 0, \; j = 1, 2.$$

Означення. За область визначення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r)=\left\{B_{\upsilon,\alpha_1}[g_1(r)];B^*_{\alpha_2}[g_2(r)];g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині I_2^+;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k)g_k(r)-(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k}=0,\quad j,k=1,2\,; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$[(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0)g_1(r)]\Big|_{r=R_0}=0,\ \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma_2}g_3(r)]=0\,. \tag{3}$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jm}^k\geq 0$, $\beta_{jm}^k>0$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $j,k=1,2$, $\alpha_j>0$, $2\alpha_j+1>0$, $\alpha_{11}^0<0$, $\beta_{11}^0\geq 0$, $\left|\alpha_{11}^0\right|+\beta_{11}^0\neq 0$.

Визначимо числа

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{a_1^{-2}}{R_2^{2\alpha_2+1}},\ \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{a_2^{-2}}{R_2^{2\alpha_2+1}},\ \sigma_{31}=\frac{1}{a_3^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}+$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}+\theta(r-R_2)\sigma_3$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r),v(r)\big)=\int_{R_0}^{\infty}u(r)v(r)\sigma(r)dr\equiv\int_{R_0}^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr+\int_{R_2}^{\infty}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 dr;\ u\in G,\ v\in G. \tag{4}$$

Для $u\in G$ та $v\in G$ із умов спряження (2) випливає базова тотожність

$$\left[u_k(r)\frac{dv_k}{dr}-v_k(r)\frac{du_k}{dr}\right]\Bigg|_{r=R_k}=$$
$$=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[u_{k+1}(r)\frac{dv_{k+1}}{dr}-v_{k+1}(r)\frac{du_{k+1}}{dr}\right]\Bigg|_{r=R_k},k=1,2. \tag{5}$$

На основі базової тотожності (5), властивостей функцій $u \in G$ та $v \in G$ й структури σ_1, σ_2, σ_3 встановлюємо, що

$$\left(M_{\upsilon,(\alpha)}[u], v\right) = \left(u, M_{\upsilon,(\alpha)}[v]\right). \tag{6}$$

Рівність (6) означає, що ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний [6]. Оскільки оператор $M_{\upsilon,(\alpha)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$ і йому відповідає спектральна вектор-функція.

$$V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta) +$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta) + \theta(r-R_2)V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta). \tag{7}$$

Функції $V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)$ знайдемо як обмежений на множині I_2^+ розв’язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Ейлера та Фур’є

$$\begin{aligned}
&(B_{\upsilon,\alpha_1} + b_1^2)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \ r \in (R_0, R_1), \\
&(B^*_{\alpha_2} + b_2^2)V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta) = 0, \ r \in (R_1, R_2), \\
&(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2)V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta) = 0, \ r \in (R_2, \infty)
\end{aligned} \tag{8}$$

за умовами спряження (2) та крайовими умовами (3) де

$$b_j = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2} a_j^{-1}, \ k_j^2 \geq 0, \ j = \overline{1,3}.$$

Фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\upsilon,\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції Бесселя першого роду $J_{\upsilon,\alpha_1}(b_1 r)$ та другого роду $N_{\upsilon,\alpha_1}(b_1 r)$ [4]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r)$ [5]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Фур’є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)v = 0$ утворюють тригонометричні функції $v_1 = \cos b_3 r$ та $v_2 = \sin b_3 r$ [5].

Якщо покласти

$$V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)=A_1J_{\upsilon,\alpha_1}(b_1r)+B_1N_{\upsilon,\alpha_1}(b_1r),\quad r\in(R_0,R_1),$$
$$V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)=A_2r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)+B_2r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r),\quad r\in(R_1,R_2),\ (9)$$
$$V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)=A_3\cos b_3r+B_3\sin b_3r,\quad r\in(R_2,\infty),$$

то умови спряження (2) для визначення шести величин A_j та B_j $(j=\overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь

$$u^{01}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)A_1+u^{02}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)B_1=0,$$
$$u^{11}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1)A_1+u^{12}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1)B_1-Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)A_2-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)B_2=0,$$
$$Y^{21}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)B_2-v^{21}_{j2}(b_3R_2)A_3-v^{22}_{j2}(b_3R_2)B_3=0,\ j=1,2,\quad (10)$$

У системі (10) беруть участь функції:

$$u^{11}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1)=\left(\alpha^1_{j1}\frac{\upsilon-\alpha_1}{R_1}+\beta^1_{j1}\right)J_{\upsilon,\alpha_1}(b_1R_1)-\alpha^1_{j1}b_1^2R_1J_{\upsilon+1,\alpha_1+1}(b_1R_1),$$
$$u^{12}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1)=\left(\alpha^1_{j1}\frac{\upsilon-\alpha_1}{R_1}+\beta^1_{j1}\right)N_{\upsilon,\alpha_1}(b_1R_1)-\alpha^1_{j1}b_1^2R_1N_{\upsilon+1,\alpha_1+1}(b_1R_1),$$
$$Y^{m1}_{\alpha_2;jk}(b_2,R_m)=[\left(\beta^m_{jk}-\alpha_2R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\right)\cos(b_2\ln R_m)-$$
$$-\alpha^m_{jk}b_2R_m^{-1}\sin(b_2\ln R_m)]R_m^{-\alpha_2},$$
$$Y^{m2}_{\alpha_2;jk}(b_2,R_m)=[\left(\beta^m_{jk}-\alpha_2R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\right)\sin(b_2\ln R_m)+$$
$$+\alpha^m_{jk}b_2R_m^{-1}\cos(b_2\ln R_m)]R_m^{-\alpha_2},$$
$$v^{21}_{j2}(b_3R_2)=-b_3\alpha^2_{j2}\sin b_3R_2+\beta^2_{j2}\cos b_3R_2;$$
$$v^{22}_{j2}=\alpha^2_{j2}b_3\cos b_3R_2+\beta^2_{j2}\sin b_3R_2.$$

Покладемо $A_1=-A_0u^{02}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)$, $B_1=A_0u^{01}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)$, де A_0 підлягає визначенню. Перше рівняння системи стає тотожністю. Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_0,b_1R_1)=$$
$$=u^{01}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)u^{12}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1)-u^{02}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)u^{11}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1),\ j=1,2,$$
$$\delta_{\alpha_2;jk}(\beta)=$$
$$=Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha_2;k1}(b_2,R_2)-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha_2;k1}(b_2,R_2);\ j,k=1,2,$$
$$a_{\upsilon,(\alpha);j}(\beta)=\delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{\alpha_2;2j}(\beta)-$$
$$-\delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{\alpha_2;1j}(\beta),\ j=1,2,$$

$$\psi^1_{\alpha_2;j2}(b_2,r)=Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)-$$
$$-Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r).$$

Розглянемо стосовно A_2, B_2 алгебраїчну систему:

$$Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)A_2+Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)B_2=A_0\delta_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_0,b_1R_1),\ j=1,2. \quad (11)$$

Визначник алгебраїчної системи (11)

$$q_{\alpha_2}(\beta)\equiv Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)=\frac{c_{21}b_2}{R_1^{2\alpha_2+1}}\neq 0.$$

Отже, алгебраїчна система (11) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_2=\frac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta)}[\delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0,b_1R_1)Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-$$
$$-\delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_1R_0,b_1R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)],$$
$$B_2=-\frac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta)}[\delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0,b_1R_1)Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-$$
$$-\delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_1R_0,b_1R_1)Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)]. \quad (12)$$

При вже відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$v^{21}_{j2}(b_3R_2)A_3+v^{22}_{j2}(b_3R_2)B_3=-A_0[q_{\alpha_2}(\beta)]^{-1}a_{\upsilon,(\alpha);j}(\beta),\quad j=1,2. \quad (13)$$

Визначник системи (13)

$$v^{21}_{12}(b_3R_2)v^{22}_{22}(b_3R_2)-v^{21}_{22}(b_3R_2)v^{22}_{12}(b_3R_2)=c_{22}b_3\neq 0.$$

Отже, алгебраїчна система (13) при $A_0=c_{22}b_3q_{\alpha_2}(\beta)$ має єдиний розв'язок [7]:

$$A_3=\omega_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta),\ B_3=-\omega_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta), \quad (14)$$

$$\omega_{\upsilon,(\alpha);j}(\beta)=a_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta)v^{2j}_{12}(b_3R_2)-a_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta)v^{2j}_{22}(b_3R_2),\ j=1,2\ .$$

Підставивши визначені величини A_2, B_2 згідно рівностей (12) та визначені величини A_3, B_3 згідно рівностей (14) у формули (9) при виборі $A_0=c_{22}b_3q_{\alpha_2}(\beta)$, маємо функції:

$$V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)=c_{22}b_3q_{\alpha_2}(\beta)[u^{01}_{\upsilon,\alpha_{1;11}}(b_1R_0)N_{\upsilon,\alpha_1}(b_1r)-$$
$$-u^{02}_{\upsilon,\alpha_{1;11}}(b_1R_0)J_{\upsilon,\alpha_1}(b_1r)],r\in[R_0,R_1],$$
$$V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)=c_{22}b_3[\delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0,b_1R_1)\psi^1_{\alpha_2;22}(b_2,r)-$$
$$-\delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_1R_0,b_1R_1)\psi^1_{\alpha_2;12}(b_2,r)],$$
$$V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)=\omega_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta)\cos(b_3r)-\omega_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta)\sin(b_3r)\,. \quad (15)$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)=\beta[b_3(\beta)]^{-1}\left([\omega_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta)]^2+[\omega_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta)]^2\right)^{-1}$$

дає можливість визначити пряме $H_{\upsilon,(\alpha)}$ й обернене $H^{-1}_{\upsilon,(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$ [2]:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}[g(r)]=\int\limits_{R_0}^{\infty} g(r)V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta),\quad g(r)\in G, \tag{16}$$

$$H^{-1}_{\upsilon,(\alpha)}[\tilde{g}(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\tilde{g}(\beta)V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r). \tag{17}$$

Математичним обґрунтуванням формул (16), (17) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція

$$f(r)=\left[\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1+1/2}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)r^{\alpha_2-1/2}+\theta(r-R_2)\cdot 1\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $[R_0,\infty)$, то для будь-якого $r\in I_2^+$ справджується інтегральне зображення

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)\int\limits_{R_0}^{\infty}g(\rho)V_{\upsilon,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta. \tag{18}$$

Доведення. В основі доведення теореми знаходиться подвійний невласний інтеграл

$$I\equiv\frac{2}{\pi}\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\lambda)V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\psi(\beta), \tag{19}$$

якщо $\lambda=\beta\in(0,\infty)$. Якщо $\lambda=\beta\,\overline{\in}\,(0,\infty)$, то $I=0$.

Рівність (19) одержується методом дельта-подібної послідовності — ядро Діріхле [9]. При цьому функція $\psi(\lambda)$ є неперервною, абсолютно сумовною з обмеженою варіацією, забезпечуючи абсолютну й рівномірну збіжність інтегралу за змінною λ.

Припустимо, що функція

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{R_0}^{\infty}\psi(\beta)V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta. \tag{20}$$

Помножимо рівність (20) на вираз $V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$, де λ — довільне додатне число, й проінтегруємо за змінною r від $r=R_0$ до $r=\infty$. В силу рівності (19) одержуємо функцію

$$\psi(\lambda) = \int_{R_0}^{\infty} g(r) V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr.$$

Підставивши в рівність (20) функцію

$$\psi(\beta) = \int_{R_0}^{\infty} g(\rho) V_{\upsilon,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho ,$$

приходимо до інтегрального зображення (18). Теорему доведено.

Зауваження. Якщо вектор-функція $g(r)$ кусково-неперервна, то в рівності (18) зліва функцію $g(r)$ треба замінити на

$$\frac{1}{2}[g(r-0)+g(r+0)] .$$

Застосування запровадженого гібридного інтегрального перетворення базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$, визначеного рівністю (1).

Введемо до розгляду величини та функції:

$$h_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} \times c_{11}^{-1}, h_2 =$$

$$= a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1} \times c_{12}^{-1}, \left[\left(\alpha_{i2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{i2}^k\right) V_{\upsilon,(\alpha);k+1}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k} =$$

$$= Z_{\upsilon,(\alpha);i2}^k(\beta), \quad \tilde{g}_1(\beta) = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr, \quad i,k = 1,2;$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr, \quad \tilde{g}_3(\beta) =$$

$$= \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 dr.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \left\{B_{\upsilon,\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\alpha_2}^*[g_2(r)]; g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, \; j,k = 1,2 \quad (21)$$

та крайові умови

$$[(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0) g_1(r)]\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad (22)$$

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{dg_3(r)}{dr}V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)\frac{dV_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)}{dr}\right]=0\,, \tag{23}$$

то справджується основна тотожність гібридного інтегрального перетворення ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}[M_{\upsilon,(\alpha)}[g(r)]]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde{g}_j(\beta)+a_1^2\sigma_1(-\alpha_{11}^0)^{-1}\times$$

$$\times R_0^{2\alpha_1+1}V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta)g_0+\sum_{k=1}^{2}h_k\left[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}\right]. \tag{24}$$

Доведення. Згідно правила (16) маємо:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}[M_{\upsilon,(\alpha)}[g(r)]]\equiv\Re=\int_0^{R_1}\left(a_1^2B_{\upsilon,\alpha_1}[g_1(r)]\right)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha_1+1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(a_2^2B_{\alpha_2}^*[g_2(r)]\right)V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2r^{2\alpha_2-1}dr+\int_{R_2}^{\infty}\left(a_3^2\frac{d^2g_3}{dr^2}\right)V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3dr. \tag{25}$$

Проінтегруємо в рівності (25) два рази частинами під знаком інтегралів:

$$\Re=a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr}V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)\frac{dV_{\upsilon,(\alpha);1}}{dr}\right)\right]_{r=R_0}^{r=R_1}+$$

$$+a_1^2\sigma_2\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_2}{dr}V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)-g_2(r)\frac{dV_{\upsilon,(\alpha);2}}{dr}\right)\right]_{r=R_1}^{r=R_2}+$$

$$+a_3^2\sigma_3\left[\frac{dg_3}{dr}V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)\frac{dV_{\upsilon,(\alpha);3}}{dr}\right]_{r=R_2}^{r=\infty}+$$

$$+\int_0^{R_1}g_1(r)\left(a_1^2B_{\upsilon,\alpha_1}[V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)]\right)\sigma_1r^{2\alpha_1+1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)\left(a_2^2B_{\alpha_2}^*[V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)]\right)\sigma_2r^{2\alpha_2-1}dr+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}g_3(r)\left(a_3^2\frac{d^2}{dr^2}V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\right)\sigma_3dr. \tag{26}$$

В силу умови обмеження (23) позаінтегральний член в точці $r=\infty$ обертається в нуль. В силу крайової умови (22) у точці $r=R_0$ при $\alpha_{11}^0 \neq 0$ отримуємо:

$$-a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\left[\frac{dg_1}{dr}V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)\frac{dV_{\upsilon,(\alpha);1}}{dr}\right]\Bigg|_{r=R_0} = -a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\alpha_{11}^0}(\alpha_{11}^0\frac{dg_1}{dr}+\beta_{11}^0 g_1)\Big|_{r=R_0} V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta)-\frac{\beta_{11}^0}{\alpha_{11}^0}g_1(R_0)V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta)-\right.$$

$$\left.-g_1(R_0)\frac{dV_{\upsilon,(\alpha);1}}{dr}\Big|_{r=R_0}\right]=a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}[(\alpha_{11}^0)^{-1}g_0 V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta)-$$

$$-(\alpha_{11}^0)^{-1}g_1(R_0)\times(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}]=$$

$$=a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta)g_0 \equiv R_1. \qquad (27)$$

Скористаємося тим, що базова тотожність (5) (для випадку неоднорідності умов спряження) має вигляд [9]:

$$\left[g_k'(r)V_{\upsilon,(\alpha);k}(r,\beta)-g_k(r)V_{\upsilon,(\alpha);k}'(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[g_{k+1}'(r)V_{\upsilon,(\alpha);k+1}(r,\beta)-\right.$$

$$\left.-g_{k+1}(r)V_{\upsilon,(\alpha);k+1}'(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k}+\frac{1}{c_{1k}}\left[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}\right] \qquad (28)$$

У точці $r=R_1$ маємо:

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\left(g_1'(R_1)V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_1,\beta)-g_1(R_1)V_{\upsilon,(\alpha);1}'(R_1,\beta)\right)-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\times$$

$$\times\left(g_2'(R_1)V_{\upsilon,(\alpha);2}(R_1,\beta)-g_2(R_1)V_{\upsilon,(\alpha);2}'(R_1,\beta)\right)=$$

$$=\left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\right)\times\left(g_2'(R_1)V_{\upsilon,(\alpha);2}(R_1,\beta)-\right.$$

$$\left.-g_2(R_1)V_{\upsilon,(\alpha);2}'(R_1,\beta)\right)+a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\times c_{11}^{-1}[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^1(\beta)\omega_{21}-$$

$$-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^1(\beta)\omega_{11}]=h_1[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^1(\beta)\omega_{21}-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^1(\beta)\omega_{11}] \qquad (29)$$

тому, що в силу структури σ_1, σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}-\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\equiv 0.$$

У точці $r=R_2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\left(g_2'(R_2)V_{\upsilon,(\alpha);2}(R_2,\beta)-g_2(R_2)V_{\upsilon,(\alpha);2}'(R_2,\beta)\right)-$$

$$-\left(g_3'(R_2)V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_2,\beta)-g_3(R_2)V_{\upsilon,(\alpha);3}'(R_2,\beta)\right)a_3^2\sigma_3=$$

$$=\left(a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3\right)\left(g_3'(R_2)V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_2,\beta)-\right.$$

$$\left.-g_3(R_2)V_{\upsilon,(\alpha);3}'(R_2,\beta)\right)+a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\cdot c_{12}^{-1}\left(Z_{\upsilon,(\alpha);12}^2(\beta)\omega_{22}-\right.$$

$$\left.-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^2(\beta)\omega_{12}\right)=\frac{1}{c_{22}}\left(Z_{\upsilon,(\alpha);12}^2(\beta)\omega_{22}-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^2(\beta)\omega_{12}\right) \qquad (30)$$

тому, що в силу структури σ_2, σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3=\frac{c_{12}}{c_{22}}\cdot\frac{c_{22}}{c_{12}}-1=1-1\equiv 0.$$

В силу диференціальних тотожностей

$$[a_1^2B_{\upsilon,\alpha_1}+(k_1^2+\beta^2)]V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)=0,\ [a_2^2B_{\alpha_2}^*+(k_2^2+\beta^2)]V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)=0$$

$$,\left[a_3^2\frac{d^2}{dr^2}+(k_3^2+\beta^2)\right]V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)=0$$

маємо рівності:

$$\begin{aligned}
&a_1^2B_{\upsilon,\alpha_1}[V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)]=-(k_1^2+\beta^2)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta),\\
&a_2^2B_{\alpha_2}^*[V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)]=-(k_2^2+\beta^2)V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta),\\
&a_3^2\frac{d^2}{dr^2}V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)=-(k_3^2+\beta^2)V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta).
\end{aligned} \qquad (31)$$

Підставимо в (26) рівності (27), (29)—(31). Маємо:

$$\Re=\sum_{k=1}^{2}h_k[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}]-(\beta^2+k_1^2)\times$$

$$\times\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha_2+1}dr-(\beta^2+k_2^2)\times$$

$$\times\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2r^{2\alpha_2-1}dr-(\beta^2+k_3^2)\times$$

$$\times\int_{R_2}^{\infty}g_3(r)V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3dr+R_1=\sum_{k=1}^{2}h_k[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}-$$

$$-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}]-(\beta^2+k_1^2)\tilde{g}_1(\beta)-(\beta^2+k_2^2)\tilde{g}_2(\beta)-$$

$$-(\beta^2+k_3^2)\tilde{g}_3(\beta)+R_1=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-$$

$$-\sum_{m=1}^{3} k_m^2 \tilde{g}_m(\beta) + \sum_{k=1}^{2} h_k [Z_{\upsilon,(\alpha);12}^{k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{\upsilon,(\alpha);22}^{k}(\beta)\omega_{1k}] + R_1.$$

Ми одержали праву частину формули (24). Теорему доведено.

Логічну схему застосування запровадженого формулами (16), (17) гібридного інтегрального перетворення покажемо на одній із типових задач математичної фізики неоднорідних середовищ.

Задача квазістатики. Побудувати обмежений на множині

$$D = \left\{(t, r): \ t \in (0, \infty); \ r \in I_2^+\right\}$$

розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [8]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \chi_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\upsilon,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), r \in (R_0, R_1),\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + \chi_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\alpha_2}^{*}[u_2] = f_2(t,r), r \in (R_1, R_2),\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + \chi_3^2 u_3 - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = f_3(t,r), r \in (R_2, \infty)
\end{aligned} \tag{32}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = \overline{1,3}, R_0 > 0, R_3 = \infty, \tag{33}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^{k}\right)u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), j,k = 1,2 \tag{34}$$

та крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^{0}\right)u_1(t,r)\Big|_{r=R_0} =$$

$$= g_0(t), \lim_{r\to\infty}\left[\frac{\partial u_3}{\partial r}V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta) - u_3\frac{\partial}{\partial r}V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\right] = 0. \tag{35}$$

Розв'язання. Запишемо систему (32) й початкові умови (33) в матричній формі

$$\begin{bmatrix}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_1^2 - a_1^2 B_{\upsilon,\alpha_1}\right)u_1(t,r)\\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_2^2 - a_2^2 B_{\alpha_2}^{*}\right)u_2(t,r)\\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_3^2 - a_3^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_3(t,r)
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\end{bmatrix}. \tag{36}$$

Інтегральний оператор $H_{\upsilon,(\alpha)}$ згідно правила (16) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}[\cdots] = \Bigg[\int_0^{R_1} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr \int_{R_2}^{\infty} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 dr \Bigg]. \quad (37)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (37) до задачі (36) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{d}{dt} + \chi_j^2 + k_j^2 + \beta^2\right)\tilde{u}_j(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) + + \sum_{k=1}^{2} h_k [Z^k_{\upsilon,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}(t) -$$

$$-Z^k_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}(t)] + \Re_1(t,\beta), \quad \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta). \quad (38)$$

Припустимо, що $\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\} = \chi_1^2 > 0$. Покладемо всюди $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \chi_1^2 - \chi_2^2$, $k_3^2 = \chi_1^2 - \chi_3^2 \geq 0$. Одержуємо задачу Коші [5]:

$$\left(\frac{d}{dt} + \chi_1^2 + \beta^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) + \sum_{k=1}^{2} h_k [Z^k_{\upsilon,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}(t) -$$

$$-Z^k_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}(t)] + \Re_1(t,\beta), \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta), \quad (39)$$

де

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{3} \tilde{u}_j, \quad \tilde{g}(\beta) = \sum_{j=1}^{3} \tilde{g}_j(\beta), \quad \sum_{j=1}^{3} \tilde{f}_j(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta)$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (39) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)} [\tilde{f}(\tau,\beta) + \tilde{g}(\beta)\delta_+(\tau)] d\tau + \sum_{k=1}^{2} h_k \Bigg[\int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)} \times$$

$$\times \omega_{2k}(\tau) d\tau Z^k_{\upsilon,(\alpha);12}(\beta) - \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)} \omega_{1k}(\tau) d\tau Z^k_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta) \Bigg] +$$

$$+ \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)} g_0(\tau) d\tau a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} (-\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta). \quad (40)$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{\upsilon,(\alpha)}$ згідно правила (17) як обернений до (37) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} {}^{2}\!/\!{}_{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ {}^{2}\!/\!{}_{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ {}^{2}\!/\!{}_{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (41) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (40). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного розв'язку параболічної крайової задачі (32)—(35):

$$u_j(t,r) = \sum_{k=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} H_{\upsilon,(\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)[f_k(\tau,\rho)+$$

$$+\delta_+(\tau)g_k(\rho)]\sigma_k\phi_k(\rho)d\rho d\tau + \sum_{k=1}^{2}h_k\int\limits_0^t\Big[R_{\upsilon,(\alpha);12}^{k,j}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-$$

$$-R_{\upsilon,(\alpha);22}^{k,j}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)\Big]d\tau + \int\limits_0^t W_{\upsilon,(\alpha);3j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau,\ j=\overline{1,3}, \tag{42}$$

де $\varphi_1(r)=r^{2\alpha_1+1}, \varphi_2(r)=r^{2\alpha_2-1}, \varphi_3(r)=1, R_0>0, R_3=\infty,$ $\delta_+(\tau)$ — дельта-функція, зосереджена в точці $\tau=0+$ [3].

У формулі (42) беруть участь головні розв'язки розглянутої параболічної задачі:

1) функції впливу

$$H_{\upsilon,(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\upsilon,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta;$$

$$j,k=\overline{1,3}, \tag{43}$$

породжені неоднорідністю системи;

2) функції Гріна

$$R_{\upsilon,(\alpha);i2}^{k,j}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)Z_{\upsilon,(\alpha);i2}^{k}(\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta;$$

$$i,k=1,2,\ j=\overline{1,3}, \tag{44}$$

породжені неоднорідністю умов спряження, та функції Гріна

$$W_{\upsilon,(\alpha);3j}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta\times$$

$$\times a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1},\ j=\overline{1,3}, \qquad (45)$$

породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$.

Неважко зробити відповідні зміни, якщо $\max\left\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\right\} = $ $= \chi_2^2 > 0$ або $\max\left\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\right\} = \chi_3^2 > 0$.

Зауваження 1. Інтегральне зображення (42) розв’язку параболічної задачі (32)—(35) носить алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

Зауваження 2. За наведеною логічною схемою одержується також інтегральне зображення розв’язку відповідних задач статики та динаміки [9].

Список використаних джерел:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93—106.
2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур’є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К. 1983. — 62 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
5. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Физматгиз, 1963. — 432 с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский — М. : Наука, 1972. — 735 с.
9. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера-(Фур’є, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Львів, 2009. — 76 с. — (Препр. / НАН України. Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 02.09).

The hybrid integral transformation Bessel-Euler-Fourier was introduced on the polar axis with two points of touching by method of delta-shaped sequence (kernel of Dirichlet).

Keywords: *hybrid differential operator, hybrid integral transformation, kernel of Dirichlet, spectral function, spectral closeness, integral image, basic identity.*

Отримано: 12.08.2009