УДК 517.9

М. І. Гром'як, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Доведено теореми існування неперервно-диференційованих та обмежених на R^2 розв'язків систем диференціальних рівнянь з частинними похідними і лінійно перетвореними аргументами.

Ключові слова: *система диференціальних рівнянь, частинні похідні, лінійно перетворені аргументи, періодичні розв'язки.*

У роботі досліджуються питання, пов'язані з існуванням неперервно-диференційованого і обмеженого на R^2 розв'язку системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і лінійно перетвореними аргументами. Для деяких аналогічних рівнянь ці проблеми розглядались раніше у роботах [1—5].

Розглянемо систему диференціально-функціональних рівнянь виду

$$u_t(t,x) = Au(t,x) + Bu_x(t,x) + Cu(\lambda t + a, \mu x + b) +$$
$$+Fu_x(\lambda t + a, \mu x + b) + f(t,x), \qquad (1)$$

де λ, a, μ, b — деякі дійсні сталі, *A*, *B*, *C*, *F* — постійні ($n \times n$) — матриці, вектор-функція $f(t,x): R \times R \to R^n$ є неперервною і обмеженою на R^2 (періодичною за t, x). Основною метою є встановлення умов існування неперервно-диференційованого за t, x розв'язку $\gamma(t,x)$, що належить класу C^∞ за x і є обмеженим на R^2 (періодичним за t, x).

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) власні значення λ_i, $i = 1,...,n$, матриці *A* такі, що мають місце співвідношення $\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda_1) > 0$, $j = 1,..., p$; $\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda_2) < 0$, $j = p+1,...,n$, де Λ_1, Λ_2 — сталі $(p \times p)$ і $(n-p \times n-p)$ — матриці;

2) λ — довільне дійсне число $(\lambda \neq 0)$, $0 < |\mu| < 1$;

3) $\dfrac{2L}{a}(|B| + |C| + |F|) < 1$, де *L*, *a* — додатні сталі;

4) вектор-функція $f\left(t,x\right)$ неперервна за t, належить класу C^{∞} за x і $\sup\limits_{(t,x)\in R^2}\left|\dfrac{\partial^i f(t,x)}{\partial x^i}\right| \le K$, $i=0,1,...,$ де K — деяка додатна стала.

Тоді система рівнянь (1) має обмежений на R^2 розв'язок, що є неперервно-диференційованим за t і належить класу C^{∞} за x.

Доведення. Оскільки всякий обмежений на R^2 розв'язок системи рівнянь

$$u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)Bu_x(\tau,x)d\tau+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)Cu(\lambda\tau+a,\mu x+b)d\tau+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)Fu_x(\lambda\tau+a,\mu x+b)d\tau+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)f(\tau,x)d\tau, \qquad (2)$$

де G(t) визначається співвідношенням

$$G(t)=\begin{cases}-S^{-1}diag(e^{\Lambda_1 t},0)S, \text{ при t<0},\\ S^{-1}diag(0,e^{\Lambda_2 t})S, \text{ при t>0},\end{cases}$$

є розв'язком системи (1), то для доведення теореми достатньо показати, що система рівнянь (2) має неперервний обмежений на R^2 розв'язок, що належить класу C^{∞} за x.

Для побудови розв'язку системи рівнянь (2) скористаємось методом послідовних наближень. При цьому послідовні наближення визначимо наступними співвідношеннями:

$$u^0(t,x)=0,$$

$$u^m(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)Bu_x^{m-1}(\tau,x)d\tau+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)Cu^{m-1}(\lambda\tau+a,\mu x+b)d\tau+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)Fu_x^{m-1}(\lambda\tau+a,\mu x+b)d\tau+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)f(\tau,x)d\tau,\ \ m=1,2,..., \quad (3)$$

Покажемо, що при всіх $m\ge 1$ і $(t,x)\in R^2$ виконуються оцінки

$$\sup_{(t,x)\in R^2}\left|u^m(t,x)-u^{m-1}(t,x)\right|\le\frac{2L}{a}K\beta^{m-1},$$

$$\sup_{(t,x)\in R^2}\left|\frac{\partial^i u^m(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i u^{m-1}(t,x)}{\partial x^i}\right|\le\frac{2L}{a}K\beta^{m-1},\ \ i=1,2,..., \qquad (4)$$

де $\beta=\dfrac{2L}{a}\left(\left|B\right|+\left|C\right|+\left|D\right|\right)<1$.

Дійсно, оскільки в силу (3) при $m=1$ маємо

$$u^1(t,x)-u^0(t,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)f(\tau,x)d\tau,$$

$$\frac{\partial^i u^1(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i u^0(t,x)}{\partial x^i}=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)\frac{\partial^i f(\tau,x)}{\partial x^i}d\tau,\ \ i=1,2,\ldots,$$

то, приймаючи до уваги умову 4), одержуємо

$$\left|u^1(t,x)-u^0(t,x)\right|\le K\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t-\tau)\right|d\tau\le\frac{2L}{a}K,$$

$$\left|\frac{\partial^i u^1(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i u^0(t,x)}{\partial x^i}\right|\le K\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t-\tau)\right|d\tau\le\frac{2L}{a}K,\ \ i=1,2,\ldots$$

Звідси випливає:

$$\sup_{(t,x)\in R^2}\left|u^1(t,x)-u^0(t,x)\right|\le\frac{2L}{a}K,$$

$$\sup_{(t,x)\in R^2}\left|\frac{\partial^i u^1(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i u^0(t,x)}{\partial x^i}\right|\le\frac{2L}{a}K,\ \ i=1,2,\ldots,$$

і, отже, оцінки (4) справедливі при $m=1$.

Міркуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (4) мають місце для деякого $m\ \ge 1$ і покажемо, що вони не зміняться при переході від m до $m+1$. Справді, враховуючи (3), (4), одержимо

$$\left|u^{m+1}(t,x)-u^m(t,x)\right|\le\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t-\tau)\right|\left|B\right|\left|\frac{\partial u^m(\tau,x)}{\partial x}-\frac{\partial u^{m-1}(\tau,x)}{\partial x}\right|d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t-\tau)\right|\left|C\right|\left|u^m(\lambda\tau+a,\mu x+b)-u^{m-1}(\lambda\tau+a,\mu x+b)\right|d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t-\tau)\right|\left|F\right|\left|\frac{\partial u^m(\lambda\tau+a,\mu x+b)}{\partial x}-\frac{\partial u^{m-1}(\lambda\tau+a,\mu x+b)}{\partial x}\right|d\tau\le$$

$$\le\left|B\right|\frac{2L}{a}K\beta^{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t-\tau)\right|d\tau+\left|C\right|\frac{2L}{a}K\beta^{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t-\tau)\right|d\tau+$$

$$+\left|F\right|\frac{2L}{a}K\beta^{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(t-\tau)\right|d\tau\le$$

$$\le\frac{2L}{a}K\beta^{m-1}\left(\frac{2L}{a}\left|B\right|+\frac{2L}{a}\left|C\right|+\frac{2L}{a}\left|F\right|\right)=\frac{2L}{a}K\beta^m,$$

$$\left|\frac{\partial^i u^{m+1}(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i u^m(t,x)}{\partial x^i}\right|\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)||B|\times$$

$$\times\left|\frac{\partial^{i+1}u^m(\tau,x)}{\partial x^{i+1}}-\frac{\partial^{i+1}u^{m-1}(\tau,x)}{\partial x^{i+1}}\right|d\tau+$$

$$+\left|\mu^i\right|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)||C|\left|\frac{\partial^i u^m(\lambda\tau+a,\mu x+b)}{\partial x^i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^i u^{m-1}(\lambda\tau+a,\mu x+b)}{\partial x^i}\right|d\tau+$$

$$+\left|\mu^i\right|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)||F|\left|\frac{\partial^{i+1}u^m(\lambda\tau+a,\mu x+b)}{\partial x^{i+1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^{i+1}u^{m-1}(\lambda\tau+a,\mu x+b)}{\partial x^{i+1}}\right|d\tau\le$$

$$\le|B|\frac{2L}{a}K\beta^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)|d\tau+|C|\frac{2L}{a}K\beta^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)|d\tau+$$

$$+|F|\frac{2L}{a}K\beta^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)|d\tau\le$$

$$\le\frac{2L}{a}K\beta^{m-1}\left(\frac{2L}{a}|B|+\frac{2L}{a}|C|+\frac{2L}{a}|F|\right)=\frac{2L}{a}K\beta^m,\quad i=1,2,...$$

Таким чином,

$$\sup_{(t,x)\in R^2}\left|u^{m+1}(t,x)-u^m(t,x)\right|\le\frac{2L}{a}K\beta^m,$$

$$\sup_{(t,x)\in R}\left|\frac{\partial^i u^{m+1}(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i u^m(t,x)}{\partial x^i}\right|\le\frac{2L}{a}K\beta^m,\ \ i=1,2,...$$

Цим самим доведено, що оцінки (4) мають місце при всіх $m\ge1$.

Отже, всі наближення $u^m(t,x),\ \ m=0,1,...,$ мають зміст, є неперервними за $t,x,$ нескінченно диференційованими за x і для них виконуються оцінки (4). Тому ряди

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[u^m(t,x)-u^{m-1}(t,x)\right],$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\partial^i u^m(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i u^{m-1}(t,x)}{\partial x^i}\right],$$

і, таким чином, послідовності $u^m(t,x), \dfrac{\partial^i u^m(t,x)}{\partial x^i}$, $m = 0,1,...,$ $i = 1,2,...$, рівномірно збігаються до деякої неперервної за t, x і нескінченно диференційованої вектор-функції $\gamma(t,x)$.

Оскільки $\gamma(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[u^m(t,x) - u^{m-1}(t,x)\right]$, то в силу (3.4) одержуємо

$$\sup_{(t,x)\in R^2} |\gamma(t,x)| \le \frac{2L}{a} K \frac{1}{1-\beta},$$

тобто вектор-функція $\gamma(t,x)$ є обмеженою при всіх $(t,x)\in R^2$. Теорема доведена.

Наслідок. Якщо виконуються умови теореми 1, λ-довільне ціле число і вектор-функція $f(t,x)$ є T-періодичною за t, то розв'язок $\gamma(t,x)$ системи рівнянь (1) є також T-періодичним за t.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1), 3), 4) теореми 1, λ-довільне ціле число (λ ≠ 0), $|\mu| = 1$ і вектор-функція $f(t,x)$ є T-періодичною за t і є X-періодичною за x. Тоді система рівнянь (1) має T-періодичний за t і є X-періодичний за x розв'язок, який є неперервно-диференційованим за t і належить класу C^∞ за x.

Доведення. Існування неперервно-диференційованого обмеженого на R^2 розв'язку $\gamma(t,x)$, що належить класу C^∞ за x випливає з теореми 1. При цьому $\gamma(t,x) = \lim_{m\to\infty} u^m(t,x)$, де вектор-функція $u^m(t,x)$ визначена співвідношенням (3). Оскільки при виконанні умов теореми вектор-функція $u^m(t,x)$ є T-періодичною за t і є X-періодичною за x при всіх $m \ge 0$ (безпосередньо випливає із (3)), то вектор-функція $\gamma(t,x)$ є T-періодичною за t і є X-періодичною за x. Теорема доведена.

Список використаних джерел:

1. Азбелев Н. В. "Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений" / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина — М. : Наука, 1991. — 280 с.
2. Блащак Н. І. "Про періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку з лінійними відхиленнями аргументів / Н. І. Блащак // Тези доп. Всеукраїнської конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 15—18 травня 1996 р.). — Київ, 1996. — С. 20.

3. Блащак Н. І. "Про періодичні розв'язки диференціальних рівнянь гіперболічного типу" / Н. І. Блащак. — Київ : Інститут математики НАН України, — 1996.
4. Митропольский Ю. А. "Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа" / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. — Киев, 1991. — 232 с.
5. Пелюх Г. П. "Введение в теорию функциональных уравнений" / Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковский. — Киев, 1974. — 120 с.

The theorems of existence of continuously differentiated are well-proven and limited on R^2 of decisions of the systems of differential equalizations with the derivates of part and arcwise regenerate arguments.

Key words: *system of differential equalizations, derivates of part, arguments, periodic upshots, are arcwise regenerate.*

Отримано: 12.10.2009