УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ РЕМЕЗА ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ЧЕБИШОВСЬКИМ ПІДПРОСТОРОМ З ОБМЕЖЕННЯМ, ЩО ЗАДАЄТЬСЯ СИСТЕМОЮ ЗАМКНУТИХ КУЛЬ

У статті узагальнено метод Ремеза поліноміальної апроксимації неперервних функцій на випадок задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням, що задається системою замкнутих куль з центрами та радіусами, які змінюються неперервно.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща рівномірна апроксимація, метод Ремеза, додаткові обмеження.*

Вступ. У роботі для розв'язування задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компакнозначного відображення елементами скінченновимірного чебишовського підпростору однозначних неперервних відображень, які задовольняють додатковому обмеженню, що задаєсья системою замкнутих куль з центрами та радіусами, які змінюються неперервно, модифіковано метод Ремеза розв'язування задачі рівномірного наближення неперервних функцій чебишовським підпростором з обмеженням типу нерівності (див., наприклад, [1, с. 39]) та встановлено його збіжність.

Постановка задачі. Нехай S — метричний компакт, X — лінійний над полем комплексних чисел нормований сепарабельний простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність компактів простору X, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного s $a(s)\in K(X)$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа H на $K(X)$, V — лінійний підпростір простору $C(S,X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S,X)$, $i=\overline{1,n}$, $u\in C(S,X)$, $r\in C(S,R)$, $r(s)>0$, $b(s)=\{x : x\in X, \|x-u(s)\|\le r(s)\}$, $s\in S$, $D=\{g : g\in C(S,X),$ $g(s)\in b(s),\ s\in S\}$.

Через $\operatorname{int} M$ будемо позначати внутрішність, а через ∂M — межу множини M топологічного простору.

Зрозуміло, що для $s \in S$

$$\operatorname{int} b(s) = \{x:\ x \in X,\ \|x - u(s)\| < r(s)\},$$

$$\partial b(s) = \{x:\ x \in X,\ \|x - u(s)\| = r(s)\}.$$

Будемо припускати, що існує елемент $g_0 \in V$, для якого $g_0(s) \in \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s \in S$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ скінченновимірним підпростором V однозначних неперервних відображень g компакту S в X, які задовольняють додатковому обмеженню $g \in D$, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \inf_{g \in D \cap V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|. \tag{1}$$

Згідно з теоремою 2.1 [2, с.1605] існує елемент $g^* \in V \cap D$ такий, що

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^*(s) - y\|.$$

Цей елемент будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Позначимо через X^* простір, спряжений з X, через B^* — замкнуту одиничну кулю простору X^*: $B^* = \{f : f \in X^*,\ \|f\| \le 1\}$, а через $E(B^*)$ — множину крайніх точок B^*.

Для $s \in S$, $f \in X^*$ будемо позначати через $\Psi_{(s,f)}$ лінійний неперервний на $C(S, X)$ функціонал, значення якого в точках $g \in C(S, X)$ обчислюється таким чином: $\Psi_{(s,f)}(g) = \operatorname{Re} f(g(s))$.

Надалі будемо припускати, що обмеження $g \in V \cap D$ в задачі відшукання величини (1) є суттєвим у тому розумінні, що

$$\alpha_a^*(D) < \alpha_a^*(V \cap D) \tag{2}$$

де $\alpha_a^*(D) = \inf_{g \in D} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|$, та виконується умова (H): для будь-яких $s_j \in S$, $f_j \in \overline{E(B^*)}$, де

$$\overline{E\left(B^*\right)}=\left\{f\in X^*: \,існує\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}, f^k\in E\left(B^*\right), k=\overline{1,\infty}, f^k \xrightarrow{сл.} f\right\},$$

таких, що лінійні неперервні на $C(S,X)$ функціонали $\Psi_{(s_j,f_j)}(g)=$ $=\operatorname{Re} f_j\left(g\left(s_j\right)\right)$, $j=\overline{1,n}$, $g\in C(S,X)$, є лінійно незалежними, визначник $\det\left[\Psi_{(s_j,f_j)}(g_i)\right]\neq 0$. Припускається, що хоча б n зазначених функціоналів існують. Умову (H) будемо називати узагальненою умовою Хаара. При виконані умови (H) простір V будемо називати чебишовським підпростором простору $C(S,X)$.

Актуальність теми. Практичне використання величини (1) та її екстремального елемента вимагає наявності чисельних методів їх відшукання.

Мета роботи. Узагальнити метод Ремеза на випадок відшукання величини (1) та її екстремального елемента.

Допоміжні твердження.

Лема 1. Якщо виконується умова (H), $s_j\in S$, $f_j\in\overline{E\left(B^*\right)}$, $1\le j\le r\le n+1$, то ненульовий функціонал $\Psi=\sum\limits_{j=1}^{r}\rho_j\Psi_{(s_j,f_j)}$ простору $C^*(S,X)$ належить $V^{\perp}$ лише тоді, коли $r=n+1$ та функціонали $\Psi_{(s_j,f_j)}$, $j=\overline{1,n+1}$, утворюють лінійно незалежну систему у просторі $C^*(S,X)$, а числа ρ_j, $j=\overline{1,n+1}$, відмінні від нуля.

Лема 2. Якщо виконується умова (H), то екстремальний елемент для величини (1) єдиний.

Лема 3. Якщо виконується умова (H), точки $s_j\in S$, функціонали $f_j\in\overline{E\left(B^*\right)}$, $j=\overline{1,k_1}$, $k_1\ge 1$, точки $t_j\in S$, функціонали $\varphi_j\in\overline{E\left(B^*\right)}$, $j=\overline{1,k_2}$, $k_2\ge 0$, $k_1+k_2=n+1$, такі, що функціонали $\Psi_{(s_j,f_j)}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\Psi_{(t_j,\varphi_j)}$, $j=\overline{1,k_2}$, утворюють лінійно незалежну систему, додатні числа ρ_j, $j=\overline{1,k_1}$, β_j, $j=\overline{1,k_2}$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re}\Big(-f_j\big(g_i(s_j)\big)\Big)+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j \operatorname{Re}\Big(-\varphi_j\big(g_i(t_j)\big)\Big)=0 \quad i=\overline{1,n}\,,\ \sum_{j=1}^{k_1}\rho_j=1\,,$$

то система векторів

$$\Big(\operatorname{Re}\Big(-f_j\big(g_1(s_j)\big)\Big),...,\operatorname{Re}\Big(-f_j\big(g_n(s_j)\big)\Big),1\Big),\ j=\overline{1,k_1}\,,$$

$$\Big(\operatorname{Re}\Big(-\varphi_j\big(g_1(t_j)\big)\Big),...,\operatorname{Re}\Big(-\varphi_j\big(g_n(t_j)\big)\Big),0\Big),\ j=\overline{1,k_2}\,,$$

є лінійно незалежною.

Лема 4. Якщо виконується умова (H) та умова (2), то існують точки $s_j\in S$, $y_j\in a(s_j)$, функціонали $f_j\in\overline{E(B^*)}$, $j=\overline{1,k_1}$, $k_1\ge 1$, точки $t_j\in S$, функціонали $\varphi_j\in\overline{E(B^*)}$, $j=\overline{1,k_2}$, $k_2\ge 0$, $k_1+k_2=n+1$, числа ρ_j, $j=\overline{1,k_1}$, β_j, $j=\overline{1,k_2}$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re}\Big(-f_j\big(y_j\big)\Big)+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\Big(\operatorname{Re}\Big(-\varphi_j\big(u(t_j)\big)\Big)-r(t_j)\Big)>\alpha_a^*(D)\,, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j \operatorname{Re} f_j\big(g_i(s_j)\big)+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j \operatorname{Re}\varphi_j\big(g_i(t_j)\big)=0\,,\ i=\overline{1,n}\,, \quad (4)$$

$$\rho_j\ge 0\,,\ j=\overline{1,k_1}\,,\ \sum_{j=1}^{k_1}\rho_j=1\,,\ \beta_j\ge 0\,,\ j=\overline{1,k_2}\,. \quad (5)$$

Для всеможливих точок $s_j\in S$, $y_j\in a(s_j)$, функціоналів $f_j\in\overline{E(B^*)}$, $j=\overline{1,k_1}$, $k_1\ge 1$, точок $t_j\in S$, функціоналів $\varphi_j\in\overline{E(B^*)}$, $j=\overline{1,k_2}$, $k_2\ge 0$, $k_1+k_2=n+1$, які задовольняють співвідношення (3)—(5), лінійний неперервний на $C(S,X)$ функціонал $\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j\Psi_{(s_j,f_j)}+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\Psi_{(t_j,\varphi_j)}$ відмінний від нуля.

Справедливість леми випливає з теореми 3 [3, с.93].

Лема 5. Якщо $\{s_q\}_{q=1}^{\infty}$ — збіжна до $s^*\in S$ послідовність компакта S, а $y_q\in a(s_q)$, $q=\overline{1,\infty}$, то з послідовності $\{y_q\}_{q=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну до деякого $y^*\in a(s^*)$ підпослідовність.

Основні результати. Перейдемо до описання методу. Нехай при $q \ge 1$ знайдено точки $s_j^q \in S$, $y_j^q \in a\left(s_j^q\right)$, функціонали $f_j^q \in E\left(B^*\right)$, $j = \overline{1, k_1^q}$, $k_1^q \ge 1$, точки $t_j^q \in S$, функціонали $\varphi_j^q \in E\left(B^*\right)$, $j = \overline{1, k_2^q}$, $k_2^q \ge 0$, $k_1^q + k_2^q = n + 1$, числа ρ_j^q, $j = \overline{1, k_1^q}$, β_j^q, $j = \overline{1, k_2^q}$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k_1^q} \rho_j^q \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(y_j^q\right)\right) + \sum_{j=1}^{k_2^q} \beta_j^q \left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right)\right) - r\left(t_j^q\right)\right) > \alpha_a^*(D), \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{k_1^q} \rho_j^q \operatorname{Re} f_j^q\left(g_i\left(s_j^q\right)\right) + \sum_{j=1}^{k_2^q} \beta_j^q \operatorname{Re}\varphi_j^q\left(g_i\left(t_j^q\right)\right) = 0, \ i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$\rho_j^q > 0, \ j = \overline{1, k_1^q}, \ \sum_{j=1}^{k_1^q} \rho_j^q = 1, \ \beta_j^q > 0, \ j = \overline{1, k_2^q}. \quad (8)$$

Згідно з лемами 1, 4 зазначені точки, функціонали та числа існують.

Для $q = 1$ їх можна знайти з допомогою, наприклад, модифікованого методу січних площин розв'язування задачі відшукання величини (1) (див., наприклад, [4]) або іншим способом.

На q -му кроці алгоритму знаходимо розв'язок $\left(\alpha_1^q, ..., \alpha_n^q; \theta^q\right) = \left(\alpha^q; \theta^q\right)$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(g_i\left(s_j^q\right)\right)\right) + \theta = \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(y_j^q\right)\right), \ j = \overline{1, k_1^q}, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(g_i\left(t_j^q\right)\right)\right) = \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right)\right) - r\left(t_j^q\right), \ j = \overline{1, k_2^q}. \quad (10)$$

З умов (6)—(8) та лем 1, 3, 4 випливає, що вектори

$$a_j^q = \left(\operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(g_1\left(s_j^q\right)\right)\right), ..., \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(g_n\left(s_j^q\right)\right)\right), 1\right), \ j = \overline{1, k_1^q},$$

$$b_j^q = \left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(g_1\left(t_j^q\right)\right)\right), ..., \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(g_n\left(t_j^q\right)\right)\right), 0\right), \ j = \overline{1, k_2^q},$$

утворюють лінійно незалежну систему. Тому вищезгаданий розв'язок існує і єдиний. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^q \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(g_i\left(s_j^q\right)\right)\right) + \theta^q = \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(y_j^q\right)\right), \ j = \overline{1, k_1^q}, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^q \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(g_i\left(t_j^q\right)\right)\right)=\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right)\right)-r\left(t_j^q\right),\ j=\overline{1,k_2^q}\ . \quad (14)$$

З рівності (7) маємо, крім того, що

$$\sum_{j=1}^{k_1^q}\rho_j^q \operatorname{Re} f_j^q\left(g\left(s_j^q\right)\right)+\sum_{j=1}^{k_2^q}\beta_j^q \operatorname{Re}\varphi_j^q\left(g\left(t_j^q\right)\right)=0,\ g\in V. \quad (15)$$

З (6), (8), (13)—(15) отримаємо, що

$$\theta^q=\sum_{j=1}^{k_1^q}\rho_j^q \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(y_j^q\right)\right)+\sum_{j=1}^{k_2^q}\beta_j^q\left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right)\right)-r\left(t_j^q\right)\right)>\alpha_a^*\left(D\right). \quad (16)$$

З урахуванням (15), (16) для всіх $g\in V\bigcap D$ матимемо, що

$$\theta^q=\sum_{j=1}^{k_1^q}\rho_j^q \operatorname{Re}\left(f_j^q\left(g\left(s_j^q\right)-y_j^q\right)\right)+\sum_{j=1}^{k_2^q}\beta_j^q\left(\operatorname{Re}\varphi_j^q\left(g\left(t_j^q\right)-u\left(t_j^q\right)\right)-r\left(t_j^q\right)\right)\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{k_1^q}\rho_j^q \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|.$$

Тому

$$\theta^q\le\inf_{g\in V\bigcap D}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g\left(s\right)-y\right\|=\alpha_a^*\left(V\bigcap D\right). \quad (17)$$

Опишемо далі перехід до $q+1$-го кроку методу.

Для вектора $g^q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^q g_i$ знаходимо

$$\varepsilon^q=\max\left\{\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^q\left(s\right)-y\right\|-\theta^q,\max_{t\in S}\left(\left\|g^q\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|-r\left(t\right)\right)\right\}.$$

З нерівності (17) випливає, що $\varepsilon^q\ge 0$. Переконаємось, що коли $\varepsilon^q=0$, то елемент g^q є екстремальним для величини (1) та $\alpha_a^*\left(V\bigcap D\right)=\theta^q$. Дійсно в цьому випадку $\left\|g^q\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|\le r\left(t\right)$, $t\in S$, і $\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^q\left(s\right)-y\right\|\le\theta^q$. Тому $g\in V\bigcap D$ і внаслідок нерівності (17) $\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^q\left(s\right)-y\right\|=\theta^q=\alpha_a^*\left(V\bigcap D\right)$.

В цьому випадку задача відшукання величини (1) та її екстремального елемента є розв’язаною: $\alpha_a^*\left(V\bigcap D\right)=\theta^q$, а екстремальним елементом для величини (1) є g^q.

Розглянемо випадок, коли $\varepsilon^q > 0$. Якщо

$$\varepsilon^q = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^q(s)-y\right\|-\theta^q, \tag{18}$$

то для вектора g^q знаходимо $s^q_{n+2}\in S$, $y^q_{n+2}\in a\left(s^q_{n+2}\right)$, $f^q_{n+2}\in E\left(B^*\right)$ такі, що

$$f^q_{n+2}\left(g^q\left(s^q_{n+2}\right)-y^q_{n+2}\right)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^q(s)-y\right\|, \tag{19}$$

і розкладаємо вектор

$$a^q_{n+2}=\left(\mathrm{Re}\left(-f^q_{n+2}\left(g_1\left(s^q_{n+2}\right)\right)\right),...,\mathrm{Re}\left(-f^q_{n+2}\left(g_n\left(s^q_{n+2}\right)\right)\right),1\right)$$

за базисом a^q_j, $j=\overline{1,k_1}$, b^q_j, $j=\overline{1,k_2}$. Нехай

$$a^q_{n+2}=\sum_{j=1}^{k_1^q}\gamma^q_j a^q_j+\sum_{j=1}^{k_2^q}\lambda^q_j b^q_j. \tag{20}$$

З (7), (8) випливає, що

$$c=(0,...,0,1)=\sum_{j=1}^{k_1^q}\rho^q_j a^q_j+\sum_{j=1}^{k_2^q}\beta^q_j b^q_j. \tag{21}$$

Для будь-якого $\rho\in R$ з (20), (21) одержимо, що

$$c=\sum_{j=1}^{k_1^q}\left(\rho^q_j-\rho\gamma^q_j\right)a^q_j+\sum_{j=1}^{k_2^q}\left(\beta^q_j-\rho\lambda^q_j\right)b^q_j+\rho a^q_{n+2}.$$

З рівності (20) випливає, що

$$\sum_{j=1}^{k_1^q}\gamma^q_j=1. \tag{22}$$

Тому серед чисел γ^q_j, $j=\overline{1,k_1^q}$, є додатні.

Знайдемо

$$\rho^q=\min\left\{\min\left\{\rho^q_j\left(\gamma^q_j\right)^{-1}:1\le j\le k_1^q,\ \gamma^q_j>0\right\},\right.$$

$$\left.\min\left\{\beta^q_j\left(\lambda^q_j\right)^{-1}:1\le j\le k_2^q,\ \lambda^q_j>0\right\}\right\}. \tag{23}$$

Оскільки числа $\rho^q_j, j=\overline{1,k_1^q}$, $\beta^q_j, j=\overline{1,k_2^q}$, додані, то $\rho^q>0$.

Розглянемо два принципові випадки, які можуть трапитись при відшуканні величини ρ^q за формулою (23), коли, наприклад,

$$\rho^q = \rho_{k_1^q}^q \left(\gamma_{k_1^q}^q \right)^{-1}, \tag{24}$$

або ж, наприклад,

$$\rho^q = \beta_{k_1^q}^q \left(\lambda_{k_1^q}^q \right)^{-1}. \tag{25}$$

У випадку (24) покладаємо

$$k_1^{q+1} = k_1^q,\ k_2^{q+1} = k_2^q, \tag{26}$$

а у випадку (25) покладаємо

$$k_1^{q+1} = k_1^q + 1,\ k_2^{q+1} = k_2^q - 1, \tag{27}$$

В обох випадках покладаємо

$$s_j^{q+1} = s_j^q,\ y_j^{q+1} = y_j^q,\ f_j^{q+1} = f_j^q,\ j = \overline{1, k_1^{q+1} - 1}; \tag{28}$$

$$s_{k_1^{q+1}}^{q+1} = s_{n+2}^q,\ y_{k_1^{q+1}}^{q+1} = y_{n+2}^q,\ f_{k_1^{q+1}}^{q+1} = f_{n+2}^q; \tag{29}$$

$$\rho_j^{q+1} = \rho_j^q - \rho^q \gamma_j^q,\quad j = \overline{1, k_1^{q+1} - 1};\quad \rho_{k_1^{q+1}}^{q+1} = \rho^q; \tag{30}$$

$$t_j^{q+1} = t_j^q,\ \varphi_j^{q+1} = \varphi_j^q,\quad j = \overline{1, k_2^{q+1}}; \tag{31}$$

$$\beta_j^{q+1} = \beta_j^q - \rho^q \lambda_j^q,\quad j = \overline{1, k_2^{q+1}}. \tag{32}$$

Якщо ж

$$\varepsilon^q = \max_{t \in S} \left(\left\| g^q(t) - u(t) \right\| - r(t) \right), \tag{33}$$

то для вектора g^q знаходимо $t_{n+2}^q \in S$, $\varphi_{n+2}^q \in E\left(B^*\right)$ такі, що

$$\varphi_{n+2}^q \left(g^q \left(t_{n+2}^q \right) - u\left(t_{n+2}^q \right) \right) - r\left(t_{n+2}^q \right) = \max_{t \in S} \left(\left\| g^q(t) - u(t) \right\| - r(t) \right),$$

і розкладаємо вектор

$$b_{n+2}^q = \left(\mathrm{Re}\left(-\varphi_{n+2}^q \left(g_1 \left(t_{n+2}^q \right) \right) \right), \ldots, \mathrm{Re}\left(-\varphi_{n+2}^q \left(g_n \left(t_{n+2}^q \right) \right) \right), 0 \right)$$

за базисом a_j^q, $j = \overline{1, k_1^q}$, b_j^q, $j = \overline{1, k_2^q}$.

Нехай

$$b_{n+2}^q = \sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q a_j^q + \sum_{j=1}^{k_2^q} \lambda_j^q b_j^q. \tag{34}$$

Для будь-якого $\rho \in R$ з (21), (34) випливає, що

$$c = \sum_{j=1}^{k_1^q} \left(\rho_j^q - \rho \gamma_j^q \right) a_j^q + \sum_{j=1}^{k_2^q} \left(\beta_j^q - \rho \lambda_j^q \right) b_j^q + \rho b_{n+2}^q.$$

З (34) отримаємо також, що

$$\sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q = 0 . \qquad (35)$$

З урахуванням (35) легко переконатись, що серед чисел γ_j^q, $j = \overline{1, k_1^q}$, λ_j^q, $j = \overline{1, k_2^q}$, є додатні.

І у випадку (33) знаходимо далі ρ^q за формулою (23). Якщо, наприклад, має місце рівність (24), то покладаємо

$$k_1^{q+1} = k_1^q - 1,\ k_2^{q+1} = k_2^q + 1 .$$

Якщо ж, наприклад, має місце рівність (25), то покладаємо

$$k_1^{q+1} = k_1^q,\ k_2^{q+1} = k_2^q.$$

В обох випадках покладаємо далі

$$s_j^{q+1} = s_j^q,\ y_j^{q+1} = y_j^q,\ f_j^{q+1} = f_j^q,\ j = \overline{1, k_1^{q+1}};\ \rho_j^{q+1} = \rho_j^q - \rho^q \gamma_j^q,$$

$$j = \overline{1, k_1^{q+1}};\quad t_j^{q+1} = t_j^q,\ \varphi_j^{q+1} = \varphi_j^q,\quad j = \overline{1, k_2^{q+1} - 1};$$

$$t_{k_2^{q+1}}^{q+1} = t_{n+2}^q,\ \varphi_{k_2^{q+1}}^{q+1} = \varphi_{n+2}^q;\ \beta_j^{q+1} = \beta_j^q - \rho^q \lambda_j^q,\quad j = \overline{1, k_2^{q+1} - 1},\ \beta_{k_2^{q+1}}^{q+1} = \rho^q$$

.

Теорема 1. Має місце рівність

$$\sum_{j=1}^{k_1^{q+1}} \rho_j^{q+1} \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(y_j^{q+1}\right)\right) + \sum_{j=1}^{k_2^{q+1}} \beta_j^{q+1} \left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(u\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right) - r\left(t_j^{q+1}\right)\right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \varepsilon^q. \qquad (36)$$

Доведення. Розглянемо випадки (18), (24). Враховуючи рівності (13), (14), (16), (18)—(20), (22), (24), (26), (28)—(32) для цих випадків одержимо, що

$$\sum_{j=1}^{k_1^{q+1}} \rho_j^{q+1} \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(y_j^{q+1}\right)\right) + \sum_{j=1}^{k_2^{q+1}} \beta_j^{q+1} \left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(u\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right) - r\left(t_j^{q+1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_1^q} \left(\rho_j^q - \rho^q \gamma_j^q\right) \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(y_j^q\right)\right) + \rho^q \operatorname{Re}\left(-f_{n+2}^q\left(y_{n+2}^q\right)\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k_2^q} \left(\beta_j^q - \rho^q \lambda_j^q\right) \left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right)\right) - r\left(t_j^q\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_1^q} \rho_j^q \operatorname{Re}\left(-f_j^q\left(y_j^q\right)\right) + \sum_{j=1}^{k_2^q} \beta_j^q \left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right)\right) - r\left(t_j^q\right)\right) +$$

$$+\rho^q \left(\sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q \operatorname{Re} f_j^q\left(y_j^q\right) + \sum_{j=1}^{k_2^q} \lambda_j^q \left(\operatorname{Re} \varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right) + r\left(t_j^q\right)\right) - \operatorname{Re} f_{n+2}^q\left(y_{n+2}^q\right) \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \left(\sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q \operatorname{Re} f_j^q\left(y_j^q\right) + \sum_{j=1}^{k_2^q} \lambda_j^q \left(\operatorname{Re}\left(\varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right) + r\left(t_j^q\right)\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \operatorname{Re} f_{n+2}^q\left(g^q\left(s_{n+2}^q\right)\right) \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \left(\sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q \operatorname{Re} f_j^q\left(y_j^q\right) + \sum_{j=1}^{k_2^q} \lambda_j^q \left(\operatorname{Re} \varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right) + r\left(t_j^q\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^q \operatorname{Re} f_{n+2}^q\left(g_i\left(s_{n+2}^q\right)\right) \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \left(\sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q \operatorname{Re} f_j^q\left(y_j^q\right) + \sum_{j=1}^{k_2^q} \lambda_j^q \left(\operatorname{Re} \varphi_j^q\left(u\left(t_j^q\right)\right) + r\left(t_j^q\right)\right) + \right.$$

$$+ \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^q \sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q \operatorname{Re} f_j^q\left(g_i\left(s_j^q\right)\right) -$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^q \sum_{j=1}^{k_2^q} \lambda_j^q \operatorname{Re} \varphi_j\left(g_i\left(t_j^q\right)\right) \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \left(\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^q \operatorname{Re} f_j^q\left(g_i\left(s_j^q\right)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{Re} f_j^q\left(y_j^q\right) \right) - \sum_{j=1}^{k_2^q} \lambda_j^q \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^q \operatorname{Re} \varphi_j\left(g_i\left(t_j^q\right)\right) - \operatorname{Re} \varphi_i^q\left(u\left(t_j^q\right)\right) - r\left(t_j^q\right) \right) \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \left(\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \sum_{j=1}^{k_1^q} \gamma_j^q \theta^q \right) =$$

$$= \theta^q + \rho^q \left(\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \theta^q \right) = \theta^q + \rho^q \varepsilon^q .$$

Для випадків (18), (24) теорему доведено.

Аналогічно доводиться справедливість теореми і в інших випадках.

З теореми 1, лем 1, 3, 4, отриманих вище співвідношень випливає, що для точок $s_j^{q+1} \in S$, $y_j^{q+1} \in a\left(s_j^{q+1}\right)$, функціоналів $f_j^{q+1} \in E\left(B^*\right)$, $j = \overline{1, k_1^{q+1}}$, точок $t_j^{q+1} \in S$, функціоналів $\varphi_j^{q+1} \in E\left(B^*\right)$, $j = \overline{1, k_2^{q+1}}$, де $k_1^{q+1} \ge 1$, $k_2^{q+1} \ge 0$, $k_1^{q+1} + k_2^{q+1} = n+1$, чисел ρ_j^{q+1}, $j = \overline{1, k_1^{q+1}}$, β_j^{q+1}, $j = \overline{1, k_2^{q+1}}$, мають місце співвідношення

$$\sum_{j=1}^{k_1^{q+1}} \rho_j^{q+1} \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(y_j^{q+1}\right)\right) + \sum_{j=1}^{k_2^{q+1}} \beta_j^{q+1} \left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(u\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right) - r\left(t_j^{q+1}\right)\right) =$$
$$= \theta^q + \rho^q \varepsilon^q > \theta^q > \alpha_a^*(D), \tag{37}$$

$$\sum_{j=1}^{k_1^{q+1}} \rho_j^{q+1} \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(g_i\left(s_j^{q+1}\right)\right)\right) + \sum_{j=1}^{k_2^{q+1}} \beta_j^{q+1} \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(g_i\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right) = 0 ,$$
$$i = \overline{1, n} , \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^{k_1^{q+1}} \rho_j^{q+1} = 1,\ \rho_j^{q+1} > 0,\ j = \overline{1, k_1^{q+1}},\ \beta_j^{q+1} > 0,\ j = \overline{1, k_2^{q+1}} . \tag{39}$$

З умов (37)—(39) та лем 1, 3, 4 випливає, що вектори

$$a_j^{q+1} = \left(\operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(g_1\left(s_j^{q+1}\right)\right)\right), \ldots, \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(g_n\left(s_j^{q+1}\right)\right)\right), 1 \right), \quad j = \overline{1, k_1^{q+1}} ,$$

$$b_j^{q+1} = \left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(g_1\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right), \ldots, \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(g_n\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right), 0 \right), \quad j = \overline{1, k_2^{q+1}} ,$$

утворюють лінійно незалежну систему. Тоді існує єдиний розв'язок $\left(\alpha_1^{q+1}, \ldots, \alpha_n^{q+1}; \theta^{q+1}\right) = \left(\alpha^{q+1}; \theta^{q+1}\right)$ наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(g_i\left(s_j^{q+1}\right)\right)\right) + \theta = \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(y_j^{q+1}\right)\right), \ j = \overline{1, k_1^{q+1}} ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(g_i\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right) = \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(u\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right) - r\left(t_j^{q+1}\right), \ j = \overline{1, k_2^{q+1}} ,$$

який знаходимо на $q+1$-му кроці. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{q+1} \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(g_i\left(s_j^{q+1}\right)\right)\right)+\theta^{q+1} = \operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(y_j^{q+1}\right)\right),$$

$$j=\overline{1,k_1^{q+1}}, \tag{40}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{q+1} \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(g_i\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right) = \operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(u\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right)-r\left(t_j^{q+1}\right),$$

$$j=\overline{1,k_2^{q+1}}, \tag{41}$$

і т.д.

Теорема 2. Існує число $\beta>0$ таке, що $\rho_j^q \ge \beta$ для всіх $j=\overline{1,k_1^q}$, $\beta_j^q \ge \beta$ для всіх $j=\overline{1,k_2^q}$, $q=1,2,\ldots$.

Доведення. Нехай $\beta^q = \min\left\{\rho_1^q,\ldots,\rho_{k_1^q}^q,\beta_1^q,\ldots,\beta_{k_2^q}^q\right\}$, $q=1,2,\ldots$. Потрібно довести, що існує число $\beta>0$, для якого $\beta^q \ge \beta$ для всіх $q=1,2,\ldots$. Припустимо супротивне. Тоді існує підпослідовність $\left\{\beta^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\beta^q\right\}_{q=1}^{\infty}$ така, що $\lim\limits_{l\to\infty}\beta^{q_l}=0$. Оскільки k_1^q+ $+k_2^q=n+1$, $k_1^q\ge 1$, то існує підпослідовність $\left\{q_{l_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{q_l\right\}_{l=1}^{\infty}$ така, що $k_1^{q_{l_m}}=k_1$, $k_2^{q_{l_m}}=k_2$ для всіх $m=1,2,\ldots,$ де $k_1\ge 1$, $k_1+k_2=n+1$. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що уже $k_1^{q_l}=k_1$, $k_2^{q_l}=k_2$ для всіх $l=1,2,\ldots$. Тоді $\lim\limits_{l\to\infty}\beta^{q_l}=0$ і $k_1^{q_l}+k_2^{q_l}=$ $=k_1+k_2=n+1$, $k_1^{q_l}=k_1\ge 1$, $l=1,2,\ldots$.

З рівності $\lim\limits_{l\to\infty}\beta^{q_l}=0$ випливає, що хоча б одна з послідовностей $\left\{\rho_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\left\{\beta^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_2}$, містить нескінченно малу підпослідовність.

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що

$$\lim_{l\to\infty}\beta_1^{q_l}=0. \tag{42}$$

Переконаємося, що послідовність $\left\{\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою. Припустимо супротивне. Розглянемо тоді послідовність

$\left\{\overline{\rho}_1^{q_l},...,\overline{\rho}_{k_1}^{q_l},\overline{\beta}_1^{q_l},...,\overline{\beta}_{k_2}^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, де $\overline{\rho}_j^{q_l}=\dfrac{\rho_j^{q_l}}{\delta_{q_l}}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\overline{\beta}_j^{q_l}=\dfrac{\beta_j^{q_l}}{\delta_{q_l}}$, $j=\overline{1,k_2}$, а $\delta_{q_l}=\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j^{q_l}$. Оскільки послідовності $\left\{\overline{\rho}_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $\left\{f_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\left\{\overline{\beta}_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $\left\{\varphi_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_2}$, обмежені, S – метричний компакт, а X — сепарабельний нормований простір, то з послідовностей $\left\{\overline{\rho}_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $\left\{s_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\left\{\overline{\beta}_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $\left\{t_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_2}$, можна вибрати збіжні, а з послідовностей $\left\{f_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\left\{\varphi_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_2}$, — слабко збіжні підпослідовності з однаковими номерами.

Не обмежуючи загальності будемо припускати, що уже

$$\lim_{l\to\infty}\overline{\rho}_j^{q_l}=\overline{\rho}_j,\ \lim_{l\to\infty}s_j^{q_l}=\overline{s}_j,\ f_j^{q_l}\xrightarrow{сл.}\overline{f}_j,\quad j=\overline{1,k_1},$$

$$\lim_{l\to\infty}\overline{\beta}_j^{q_l}=\overline{\beta}_j,\ \lim_{l\to\infty}t_j^{q_l}=\overline{t}_j,\ \varphi_j^{q_l}\xrightarrow{сл.}\overline{\varphi}_j,\quad j=\overline{1,k_2}.$$

Згідно з лемою 5 з послідовностей $\left\{y_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, можна вибрати збіжні до $y_j^*\in a\left(\overline{s}_j\right)$, $j=\overline{1,k_1}$, підпослідовності з однаковими номерами.

Не обмежуючи загальності будемо припускати, що уже $\lim_{l\to\infty}y_j^{q_l}=\overline{y}_j$, $j=\overline{1,k_1}$. Оскільки послідовності $\left\{\rho_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, є обмеженими, $\lim_{l\to\infty}\delta_{q_l}=+\infty$, то $\overline{\rho}_j=0$, $j=\overline{1,k_1}$. Зрозуміло також, що $\overline{\beta}_j\ge 0$, $j=\overline{1,k_2}$, $\sum_{j=1}^{k_2}\overline{\beta}_j=1$. З урахуванням зазначеного із співвідношень (6)—(8) випливає, що

$$\sum_{j=1}^{k_2}\overline{\beta}_j\left(\mathrm{Re}\left(-\overline{\varphi}_j\left(u\left(\overline{t}_j\right)\right)\right)-r\left(\overline{t}_j\right)\right)\ge 0,\ \sum_{j=1}^{k_2}\overline{\beta}_j\,\mathrm{Re}\,\overline{\varphi}_j\left(g_0\left(\overline{t}_j\right)\right)=0.$$

Звідки

$$\sum_{j=1}^{k_2}\overline{\beta}_j\left(\mathrm{Re}\,\overline{\varphi}_j\left(g_0\left(\overline{t}_j\right)-u\left(\overline{t}_j\right)\right)-r\left(\overline{t}_j\right)\right)\ge 0. \qquad (43)$$

З іншого боку

$$\sum_{j=1}^{k_2}\overline{\beta}_j\left(\mathrm{Re}\,\overline{\varphi}_j\left(g_0\left(\bar{t}_j\right)-u\left(\bar{t}_j\right)\right)-r\left(\bar{t}_j\right)\right)\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{k_2}\overline{\beta}_j\left(\left\|g_0\left(\bar{t}_j\right)-u\left(\bar{t}_j\right)\right\|-r\left(\bar{t}_j\right)\right)<0,$$

оскільки $\left\|g_0(t)-u(t)\right\|<r(t), t\in S$, що суперечить (43). Одержана суперечність доводить, що послідовність $\left\{\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою. Звідси випливає, що обмеженими є послідовності $\left\{\beta_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_2}$.

Оскільки послідовності $\left\{\rho_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $\left\{f_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\left\{\beta_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $\left\{\varphi_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_2}$, обмежені, S — метричний компакт, а X — сепарабельний нормований простір, то з послідовностей $\left\{\rho_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\left\{\beta_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_2}$, можна вибрати збіжні, а з послідовностей $\left\{f_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, $\left\{\varphi_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_2}$ — слабко збіжні підпослідовності з однаковими номерами.

Не обмежуючи загальності будемо припускати, що уже

$$\lim_{l\to\infty}\rho_j^{q_l}=\rho_j^*,\ \lim_{l\to\infty}s_j^{q_l}=s_j^*,\ f_j^{q_l}\xrightarrow{сл.}f_j^*,\quad j=\overline{1,k_1},$$

$$\lim_{l\to\infty}\beta_j^{q_l}=\beta_j^*,\ \lim_{l\to\infty}t_j^{q_l}=t_j^*,\ \varphi_j^{q_l}\xrightarrow{сл.}\varphi_j^*,\quad j=\overline{1,k_2}.$$

Згідно з лемою 5 з послідовностей $\left\{y_j^{q_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,k_1}$, можна вибрати збіжні до $y_j^*\in a\left(s_j^*\right)$, $j=\overline{1,k_1}$, послідовності з однаковими номерами. З урахуванням зазначеного, співвідношень (6)—(8), (36), (42) отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j^*\,\mathrm{Re}\left(-f_j^*\left(y_j^*\right)\right)+\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j^*\left(\mathrm{Re}\left(-\varphi_j^*\left(u\left(t_j^*\right)\right)\right)-r\left(t_j^*\right)\right)>\alpha_a^*(D),$$

$$\sum_{j=1}^{k_1}\rho_j^*\,\mathrm{Re}\,f_j^*\left(g_i\left(s_j^*\right)\right)+\sum_{j=2}^{k_2}\beta_j^*\,\mathrm{Re}\,\varphi_j^*\left(g_i\left(t_j^*\right)\right)=0,\ i=\overline{1,n},$$

$$\rho_j^* \ge 0\,,\ j=\overline{1,k_1}\,,\ \sum_{j=1}^{k_1}\rho_j^* = 1\,,\ \beta_j^* \ge 0\,,\ j=\overline{1,k_2}\ ,$$

що суперечить лемі 1.

Одержана суперечність доводить, що існує число $\beta > 0$ таке, що $\rho_j^q \ge \beta$ для всіх $j=\overline{1,k_1^q}$, $\beta_j^q \ge \beta$ для всіх $j=\overline{1,k_2^q}$, $q=1,2,\dots$.

Теорему доведено.

Теорема 3. Послідовність $\left\{\theta^q\right\}_{q=1}^{\infty}$ є неспадною. Послідовність $\left\{g^q\right\}_{q=1}^{\infty}$ збігається до екстремального елемента g^* для величини (1).

Мають місце рівності $\lim\limits_{q\to\infty}\varepsilon^q = 0$,

$$\lim_{q\to\infty}\theta^q = \alpha_a^*\left(V\bigcap D\right) = \lim_{q\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^q\left(s\right)-y\right\| = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^*\left(s\right)-y\right\|,$$

$$\lim_{q\to\infty}\max_{t\in S}\left(\left\|g^q\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|-r\left(t\right)\right)\le 0\,.$$

Доведення. Згідно з (37)—(39), (40), (41) маємо, що

$$\theta^{q+1} = \sum_{j=1}^{k_1^{q+1}}\rho_j^{q+1}\operatorname{Re}\left(-f_j^{q+1}\left(y_j^{q+1}\right)\right)+\sum_{j=1}^{k_2^{q+1}}\beta_j^{q+1}\left(\operatorname{Re}\left(-\varphi_j^{q+1}\left(u\left(t_j^{q+1}\right)\right)\right)-r\left(t_j^{q+1}\right)\right)=$$

$$=\theta^q+\rho^q\varepsilon^q\,,\ q=1,2,\dots, \tag{44}$$

а відповідно до (17)

$$\theta^q \le \alpha_a^*\left(V\bigcap D\right). \tag{45}$$

З (44) випливає, що послідовність $\left\{\theta^q\right\}_{q=1}^{\infty}$ є неспадною, а з (45) випливає, що вона обмежена зверху. Тому існує $\lim\limits_{q\to\infty}\theta^q$. Відповідно до (45) має місце нерівність $\lim\limits_{q\to\infty}\theta^q \le \alpha_a^*\left(V\bigcap D\right)$.

З урахуванням теореми 2 звідси будемо мати, що для деякого $\beta > 0$

$$\theta^{q+1}-\theta^q \ge \beta\varepsilon^q\,. \tag{46}$$

Відповідно до (46) $0\le\varepsilon^q\le\dfrac{\theta^{q+1}-\theta^q}{\beta}$. Звідси та з існування $\lim\limits_{q\to\infty}\theta^q$ випливає, що

$$\lim_{q\to\infty} \varepsilon^q = 0 . \tag{47}$$

Маємо, що

$$0 < \varepsilon^q = \max\left\{ \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \theta^q , \max_{t\in S} \left(\left\| g^q(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) \right\} . \tag{48}$$

Тому для всіх $t \in S$

$$\left\| g^q(t) \right\| - \left\| u(t) \right\| \le \left\| g^q(t) - u(t) \right\| \le r(t) + \varepsilon^q .$$

Звідси випливає, що

$$\left\| g^q \right\| = \max_{t\in S} \left\| g^q(t) \right\| \le \max_{t\in S} r(t) + \varepsilon^q , \ q = 1, 2, \dots .$$

З урахуванням того, що $\lim_{q\to\infty} \varepsilon^q = 0$, можна тоді зробити висновок, що послідовність $\left\{ g^q \right\}_{q=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору V. Оскільки V є скінченновимірним простором, то з неї можна вибрати збіжну підпослідовність $\left\{ g^{q_\mu} \right\}_{\mu=1}^{\infty}$. Нехай $\lim_{\mu\to\infty} g^{q_\mu} = g^*$. Зрозуміло, що $g^* \in V$. З нерівності (4) випливає, що

$$\left\| g^{q_\mu}(t) - u(t) \right\| \le r(t) + \varepsilon^q , \ t \in S .$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $\mu \to \infty$, одержимо, що $\left\| g^*(t) - u(t) \right\| \le r(t),\ t \in S$.

Це означає, що $g^* \in D$. Вище було зазначено, що $g^* \in V$. Тому $g^* \in V \cap D$. Оскільки $\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^{q_\mu}(s) - y \right\| - \theta^{q_\mu} \le \varepsilon^{q_\mu}$, $\mu = 1, 2, \dots$, то, перейшовши в цій нерівності до границі при $\mu \to \infty$ та врахувавши неперервність по g функції $\Psi(g) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g(s) - y \right\|$, нерівність (45) та рівність (47), одержимо, що

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| \le \lim_{q\to\infty} \theta^q \le \alpha_a^*(V \cap D) \le \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| .$$

Звідси випливає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1) і $\lim_{q\to\infty} \theta^q = \alpha_a^*(V \cap D)$.

Оскільки екстремальний елемент для величини (1) єдиний (див. лему 2), то з проведених вище міркувань випливає, що $\lim_{q\to\infty} g^q = g^*$ і

$$\lim_{q\to\infty}\theta^q = \alpha_a^*\left(V\bigcap D\right) = \lim_{q\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^q(s)-y\right\| = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|.$$

Крім того, із співвідношень (47), (48) маємо, що

$$\lim_{q\to\infty}\max_{t\in S}\left(\left\|g^q(t)-u(t)\right\|-r(t)\right) = \max_{t\in S}\left\|g^*(t)-u(t)\right\|-r(t)\le 0.$$

Теорему доведено.

Висновок. У даній роботі для задачі відшукання величини (1) модифіковано метод Ремеза. Встановлено збіжність побудованого методу.

Список використаних джерел:

1. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
2. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, № 12. — С.1601-1619.
3. Гудима У. В. Апроксимація неперервного компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням / У. В. Гудима // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України ; [редкол.: В. В. Скопецький (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. — Вип. 1. — С. 88—96.
4. Гнатюк В. О. Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням / В. О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України ; [редкол.: В. В. Скопецький (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. — Вип. 1. — С. 51—60.

In the article the Remez's algorithm is generalized on the case of problem of the best uniform approximation continuous compact-valued maps by finite dimensional Chebyshev space of continuous single-valued maps with additional restriction.

Key words: *the compact-valued maps, best uniform approximation, Remez's algorithm, additional restriction.*

Отримано: 06.10.2009