УДК 517.954:532.546

В. М. Булавацкий, д-р техн. наук,

В. В. Скопецкий, д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. НАН Украины

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

АСИМТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ СОЛЕВЫХ РАСТВОРОВ С УЧЕТОМ ОСМОТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

В работе построена математическая модель процесса фильтрационно-конвективной диффузии солевого раствора в пористой среде с учетом осмотических явлений. Найдено асимптотическое приближение решения соответствующей этой модели сингулярно возмущенной краевой задачи в случае преобладания конвективных составляющих над диффузионными в условиях слабого осмоса.

Ключевые слова: *математическое моделирование, диффузия, конвекция, фильтрация, осмос, сингулярно возмущенные краевые задачи, асимптотические приближения.*

Ведение. В связи с возрастающим влиянием антропогенных нагрузок на окружающую среду особенную актуальность приобретают задачи теоретического изучения техногенного влияния различных негативных факторов человеческой деятельности. Одним из результатов такого влияния является загрязнение грунтов и грунтовых вод вредными химическими веществами и отходами промышленного производства. Данное обстоятельство способствует интенсификации исследований в области математического моделирования динамических процессов массопереноса загрязняющих веществ в подземных фильтрационных потоках [1—4]. При этом методы математического моделирования в рамках данной проблематики хотя и достигли в настоящее время существенного развития, однако еще далеки от совершенства. Например, во многих известных в настоящее время математических моделях динамических процессов в экоэнергосистемах типа „конвекция-диффузия-фильтрация”, не учитывается ряд факторов, которые могут существенным образом влиять на динамику процесса массопереноса, в частности, в неравномерно засоленных глинистых грунтах. К таким факторам, в первую очередь, следует отнести явления наличия осмотических свойств у связных грунтов и вообще дисперсных систем [5, 6], которые в математической записи могут быть выражены следующей зависимостью [5, 6]:

$$\upsilon_C = \nu \frac{\partial C}{\partial x},$$

где υ_C — скорость осмотической фильтрации, C — концентрация солевого раствора, ν — коэффициент осмоса. С учетом указанной зависимости в работах [5, 7] предложено обобщение закона фильтрации Дарси-Герсеванова на случай движения солевых растворов, которое дало возможность учета влияния осмотических явлений при неравномерной концентрации порового солевого раствора на процессы фильтрационного уплотнения (консолидации) глинистых грунтов.

В настоящей работе построена математическая модель и найдено асимптотическое приближение решения соответствующей этой модели сингулярно возмущенной краевой задачи конвективной диффузии солевого раствора при плоской установившейся фильтрации в криволинейной пористой области в условиях влияния на процесс явления осмотической фильтрации.

Построение математической модели процесса массопереноса с учетом осмотических явлений. Постановка краевой задачи фильтрационно-конвективной диффузии. В настоящей работе используется следующее обобщение фильтрационного закона Дарси [3] на случай фильтрации солевого раствора в условиях существенного влияния явления осмотической фильтрации [5, 7]:

$$\vec{u} = \vec{\upsilon} + \nu \nabla C \,, \tag{1}$$

где $\vec{u}$ — вектор скорости фильтрации солевого раствора, $\vec{\upsilon} = \left(\upsilon_x, \upsilon_y\right)$ — вектор скорости фильтрации чистой воды, ∇ — оператор Гамильтона.

Тогда, с учетом соотношения (1) уравнение конвективной диффузии [3, 8]

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta C - \left(\vec{u} \cdot \nabla C\right),$$

(здесь σ — пористость, $D = const$ — коэффициент конвективной диффузии, Δ — оператор Лапласа по переменным x, y) перепишется в виде

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta C - \left(\vec{\upsilon} \cdot \nabla C\right) - \nu \left(\nabla C\right)^2 . \tag{2}$$

Предположим, в первом приближении, что поле скоростей фильтрационного потока определяется главным образом градиентом пьезометрического напора и мало зависит (например, в случае слабо концентрированных растворов) от величины градиента концентрации солевого раствора. Тогда, в случае установившихся потенциальных течений, уравнение фильтрации, как известно [8], принимает вид

$$div\, \vec{\upsilon} = 0, \qquad \vec{\upsilon} = \nabla \varphi, \tag{3}$$

где $\varphi = -\kappa h$ — потенциал скорости, h — пьезометрический напор, κ — коэффициент фильтрации. Нелинейная система дифференциальных уравнений (2), (3) образует (в указанном выше приближении) искомую математическую модель процесса типа „фильтрация — конвекция — диффузия” с учетом осмотических явлений. В рамках этой модели рассмотрим задачу моделирования процесса конвективной диффузии при плоской установившейся фильтрации в криволинейной области G_z в физической плоскости $z = x + iy$, ограниченной двумя эквипотенциальными линиями L_* и L^* [4]. Тогда определение соответствующего поля концентраций сводится к решению в области $G = G_z \times (0, +\infty)$ следующей краевой задачей:

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta C - \upsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} - \upsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} - \nu \left[\left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)^2 \right], \qquad (4)$$

$$C\big|_{L_*} = \tilde{C}_1(M, t), \; C\big|_{L^*} = \widetilde{C_2}(M, t), \; C(M, 0) = \widetilde{C_0}(M), \qquad (5)$$

$$\Delta\varphi = 0, \; \varphi\big|_{L_*} = \varphi_*(M), \; \varphi\big|_{L^*} = \varphi^*(M). \qquad (6)$$

Здесь: M — бегущая точка соответствующей кривой, φ_*, φ^* — заданные значения потенциала скорости на границе G_z, $\widetilde{C_0}$, $\widetilde{C_*}$, $\widetilde{C_1}$, $\widetilde{C_2}$ — заданные достаточно гладкие функции согласованные между собой на ребрах области G.

Следует отметить, что в случае отсутствия учета осмотических явлений ($\nu = 0$) соответствующая (4)—(6) краевая задача фильтрационно-конвективной диффузии исследовалась в [4]. Аналогично [4] предположим, что фильтрационная задача (6) путем конформного отображения $G_z \Rightarrow G_\omega$ (G_ω — соответствующая [4] область комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$ $(\varphi_* \le \varphi \le \varphi^*)$, ψ — функция тока) решена — перейдем в (4)—(6) к переменным (φ, ψ) — точкам области комплексного потенциала G_ω. В новых переменных рассматриваемая периодическая по ψ краевая задача для области $G_\omega \times (0, \infty)$ принимает вид

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \upsilon^2(\varphi, \psi) \left[D\Delta C(\varphi, \psi, t) - \frac{\partial C}{\partial \varphi} - \nu \left[\left(\frac{\partial C}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial \psi} \right)^2 \right] \right], \qquad (7)$$

$$C(\varphi_*, \psi, t) = \widetilde{C_1}(\psi, t), \; C(\varphi^*, \psi, t) = \widetilde{C_2}(\psi, t), \; C(\varphi, \psi, 0) = \widetilde{C_0}(\varphi, \psi), \qquad (8)$$

где $\upsilon^2(\varphi, \psi) = \vec{\upsilon} \cdot \vec{\bar{\upsilon}} = \upsilon_x^2(\varphi, \psi) + \upsilon_y^2(\varphi, \psi)$ — известная функция.

Ниже рассматривается случай преобладания конвективных составляющих над диффузионными в условиях слабого осмоса, то есть предполагается выполнение соотношений $D = \varepsilon a,\ \nu = \varepsilon\mu$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $a = const > 0,\ \mu = const > 0$. В этом случае уравнение (7) принимает вид

$$\sigma\frac{\partial C}{\partial t} = \upsilon^2(\varphi,\psi)\left[\varepsilon a\Delta C(\varphi,\psi,t) - \frac{\partial C}{\partial\varphi} - \varepsilon\mu\left[\left(\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial\psi}\right)^2\right]\right]. \quad (9)$$

Асимптотическое приближение решения краевой задачи.

В предположениях достаточной гладкости и так называемых сильных [4] условий согласованности начальных и граничных условий, решение задачи (9), (8) будем искать в соответствии с асимптотическим методом Вишика-Люстерника [8, 9] в виде следующего асимптотического ряда:

$$C(\varphi,\psi,t,\varepsilon) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(C_i(\varphi,\psi,t) + L_i(\xi,\psi,t) + S_i(\xi,\psi,\tau)\right) + R_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \quad (10)$$

где $C_i(\varphi,\psi,t)\ \ (i=\overline{0,n})$ — члены регулярной части асимптотики, $L_i(\xi,\psi,t)\ \ (i=\overline{0,n})$ — функции типа погранслоя в окрестности $\varphi=\varphi^*$, $S_i(\xi,\psi,\tau)\ \ (i=\overline{0,n})$ — угловые погранфункции в окрестности $(\varphi^*,\psi,0)$, $\xi = \frac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ — погранслойные переменные, R_n — остаточный член.

Уравнения для определения регулярной части асимптотики получаются применением стандартной процедуры метода возмущений и имеют вид:

$$\sigma\frac{\partial C_i}{\partial t} + \upsilon^2(\varphi,\psi)\frac{\partial C_i}{\partial\varphi} = g_i(\varphi,\psi,t) \quad (i=\overline{0,n}),$$

где функции $g_i(\varphi,\psi,t)$ рекуррентно выражаются через $C_{i-1}(\varphi,\psi,t)$:

$$g_0(\varphi,\psi,t) \equiv 0,$$

$$g_1(\varphi,\psi,t) = \upsilon^2(\varphi,\psi)\left[a\Delta C_0(\varphi,\psi,t) - \mu\left[\left(\frac{\partial C_0}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial C_0}{\partial\psi}\right)^2\right]\right],$$

$$g_2(\varphi,\psi,t) = \upsilon^2(\varphi,\psi)\left[a\Delta C_1(\varphi,\psi,t) - 2\mu\left(\frac{\partial C_0}{\partial\varphi}\frac{\partial C_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_0}{\partial\psi}\frac{\partial C_1}{\partial\psi}\right)\right],$$

$$g_3(\varphi,\psi,t) = \upsilon^2(\varphi,\psi)\Big[a\Delta C_2(\varphi,\psi,t) -$$

$$-\mu\left(\left(\frac{\partial C_1}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial C_1}{\partial\psi}\right)^2+2\left(\frac{\partial C_0}{\partial\varphi}\frac{\partial C_2}{\partial\varphi}+\frac{\partial C_0}{\partial\psi}\frac{\partial C_2}{\partial\psi}\right)\right)\Bigg].$$

Аналогично получаем уравнения для определения погранслойных функций L_i $(i=\overline{0,\ n})$. Указанные уравнения для $i=\overline{0,2}$ имеют вид:

$$a\frac{\partial^2 L_0}{\partial\xi^2}+\frac{\partial L_0}{\partial\xi}-\mu\left(\frac{\partial L_0}{\partial\xi}\right)^2=0, \qquad (11)$$

$$a\frac{\partial^2 L_i}{\partial\xi^2}+f_*(\xi,\psi,t)\frac{\partial L_i}{\partial\xi}=d_i(\xi,\psi,t) \quad (i=1,2), \qquad (12)$$

где

$$d_1(\xi,\psi,t)=\upsilon^{-2}(\varphi^*,\psi)\sigma\frac{\partial L_0(\xi,\psi,t)}{\partial t},$$

$$d_2(\xi,\psi,t)=$$

$$=\upsilon^{-2}(\varphi^*,\psi)\left[\sigma\frac{\partial L_1(\xi,\psi,t)}{\partial t}-A_1(\xi,\psi)\sigma\upsilon^{-2}(\varphi^*,\psi)\frac{\partial L_0(\xi,\psi,t)}{\partial t}\right]-$$

$$-\left[a\frac{\partial^2 L_0(\xi,\psi,t)}{\partial\psi^2}+\mu\left(\left(\frac{\partial L_1(\xi,\psi,t)}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial L_0(\xi,\psi,t)}{\partial\psi}\right)^2\right)\right],$$

$f_*(\xi,\psi,t)=1-2\mu\dfrac{\partial L_0(\xi,\psi,t)}{\partial\xi}$, $A_i(\xi,\psi)$ $(i=\overline{0,n})$ — коэффициенты при ε^i разложения функции $\upsilon^2(\varphi^*-\varepsilon\xi,\psi)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\varphi=\varphi^*$.

Функции C_i $(i=\overline{0,n})$ отыскиваются с учетом условий

$$C_0(\varphi_*,\psi,t)=\widetilde{C}_1(\psi,t),\ \ C_0(\varphi,\psi,0)=\widetilde{C}_0(\varphi,\psi),$$

$$C_i(\varphi_*,\psi,t)=0,\ \ C_i(\varphi,\psi,0)=0 \qquad (i=\overline{1,n})$$

и имеют вид [4]

$$C_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\widetilde{C}_1(\psi,t-f(\varphi,\psi)), & t\ge f(\varphi,\psi),\\ \widetilde{C}_0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t,\psi),\psi), & t<f(\varphi,\psi)\end{cases}$$

$$C_i(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_i(\tilde\varphi,\psi,f(\tilde\varphi,\psi)+t-f(\varphi,\psi))}{\upsilon^2(\tilde\varphi,\psi)}d\tilde\varphi, t\ge f(\varphi,\psi),\\ \displaystyle\sigma^{-1}\int_0^t g_i(f^{-1}(\tilde t+f(\varphi,\psi)-t),\psi,\tilde t)d\tilde t, t\le f(\varphi,\psi),\end{cases} \qquad (i=\overline{1,n})$$

где $f(\varphi,\psi)=\sigma\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{ds}{\upsilon^2(s,\psi)}$, f^{-1} — функция обратная функции f по переменной φ (такая функция существует, поскольку $\upsilon^{-2}(s,\psi)$ является непрерывно дифференцируемой, ограниченной и положительно определенной [4]).

Функции погранслойного типа $L_i(\xi,\psi,t)$ $(i=\overline{0,\ n})$ отыскиваются из нелинейных уравнений вида (11) с учетом условий

$$L_0(0,\psi,t)=\tilde{C}_2(\psi,t)-C_0(\varphi^*,\psi,t)\equiv\alpha_0(\psi,t),\ L_0\to 0\ \ (\xi\to\infty), \tag{13}$$

$$L_i(0,\psi,t)=-C_i(\varphi^*,\psi,t),\quad L_i\to 0\quad(\xi\to\infty)\quad(i=\overline{1,n}). \tag{14}$$

Из (11), (12), (13), (14), после простых, но громоздких преобразований получаем

$$L_0(\xi,\psi,t)=-\frac{a}{\mu}\ln\left[1+e^{-\frac{\xi}{a}}\left(e^{-\frac{\mu\alpha_0(\psi,t)}{a}}-1\right)\right], \tag{15}$$

$$L_i(\xi,\psi,t)=$$

$$=-\left[C_i(\varphi^*,\psi,t)-a^{-1}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{s}d_i(\varsigma,\psi,t)\exp\left(a^{-1}\int\limits_{\varsigma}^{s}f_*(\eta,\psi,t)d\eta\right)d\varsigma ds\right]\times$$

$$\times\frac{\int\limits_{\xi}^{+\infty}\exp\left(-a^{-1}\int\limits_0^{s}f_*(\eta,\psi,t)d\eta\right)ds}{\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-a^{-1}\int\limits_0^{s}f_*(\eta,\psi,t)d\eta\right)ds}-$$

$$-\frac{1}{a}\int\limits_{\xi}^{+\infty}\int\limits_0^{s}d_i(\varsigma,\psi,t)\exp\left(a^{-1}\int\limits_{\varsigma}^{s}f_*(\eta,\psi,t)d\eta\right)d\varsigma ds,\ (i=1,2). \tag{16}$$

Из явного представления (15), (16) функций L_i следует, что они являются функциями типа погранслоя в окрестности точки $\varphi=\varphi^*$. Отметим, что из условий согласованности и соотношения (15) следует, что $L_0\left(\xi,\psi,0\right)\equiv 0$.

Угловые погранфункции $S_i(\xi,\psi,\tau)$ определяются из уравнений вида

$$\sigma \frac{\partial S_0}{\partial \tau} = \upsilon^2(\varphi^*, \psi) \left[a \frac{\partial^2 S_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial S_0}{\partial \xi} - \mu \left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi} \right)^2 \right],$$

$$\sigma \frac{\partial S_1}{\partial \tau} = \upsilon^2(\varphi^*, \psi) \left[a \frac{\partial^2 S_1}{\partial \xi^2} + (1 - 2\mu) \frac{\partial S_1}{\partial \xi} \right] + \sigma A_1(\xi, \psi) \frac{\partial S_0}{\partial \tau},$$

с учетом краевых условий

$$S_i(0, \psi, \tau) = 0, \quad S_i(\xi, \psi, 0) = -L_i(\xi, \psi, 0),$$

$$S_i(\xi, \psi, \tau) \to 0, \quad (\xi, \tau \to +\infty) \quad (i = \overline{0, n}).$$

Отсюда, принимая во внимание выше отмеченное относительно функции $L_0(\xi, \psi, \tau)$, получаем

$$S_0(\xi, \psi, \tau) \equiv 0,$$

$$S_1(\xi, \psi, \tau) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} L_1(\eta, \psi, 0) \exp\left\{ -\left[\frac{\upsilon^2(\varphi^*, \psi)}{\sigma} \left(\nu^2 + \frac{1}{4a} \right) \tau + \frac{\xi - \eta}{2a} \right] \right\} \times$$

$$\times \sin(\nu\xi) \sin(\nu\eta) d\nu d\eta .$$

Основной вклад в решение вносят: $C_0(\varphi, \psi, t)$ (решение соответствующей вырожденной задачи конвекции), функция $L_0(\xi, \psi, t)$ и

$$L_1(\xi, \psi, t)$$

(поправка на выходе фильтрационного потока, учитывающая наличие осмотических явлений), а также функция $S_1(\xi, \psi, \tau)$. В расчетной практике, как правило, достаточно найти несколько первых членов рассмотренного асимптотического разложения (10).

Выводы. Учет влияния на динамику процессов типа „фильтрация — конвекция — диффузия" явления осмотической фильтрации позволяет в ряде случаев (например, в случае фильтрации в неравномерно засоленных глинистых грунтах) более адекватно моделировать конвективно-диффузионный массоперенос загрязняющих веществ, описываемый сингулярно возмущенными краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Программная реализация изложенного решения открывает возможность учета важного дополнительного фактора (осмоса) при разработке конструктивных решений с целью определения оптимальных характеристик массообмена в условиях эксплуатации экологически потенциально опасных инженерных объектов.

Список использованной литературы:

1. Гладкий А. В. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем / А. В. Гладкий, И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий. — Киев : Вища школа, 1981. — 287 с.

2. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. — Киев : Наук. Думка, 1991. — 264 с.
3. Лаврик В. И. Математическое моделирование в гидроэкологических исследованиях / В. И. Лаврик, Н. А. Никифорович. — Киев : Фитосоциоцентр, 1998. — 288 с.
4. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу „конвекція-дифузія" / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. — Рівне : НУВГП, 2008. — 252 с.
5. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
6. Рельтов Б. Ф. Осмотические явления в связных грунтах при неравномерном их засолении / Б. Ф. Рельтов, Н. А. Новицкая // Изв. ВНИИГ. — 1954. — Т. 51. — С. 94—122.
7. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих грунтів при наявності масопереносу солей / А. П. Власюк, О. В. Жеребятьєв // Вісн. Укр. держ. акад. водн. госп-ва. — Рівне. — 1998. — Вип. 1. Ч.1. — С. 40—43.
8. Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький. — Київ : Наукова думка, 2005. — 283 с.
9. Вишик М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. Я. Люстерник // Успехи математических наук. — 1957. — 12, Вып. 5. — С. 3—122.
10. Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. — М. : Высшая школа, 1990. — 208 с.

In this work the mathematical model of process of a filtratione-convective diffusion of a saline solution in a porous medium with allowance for of osmotic phenomena is constructed. The asymptotic approximation of the solution of conforming this model of singular a perturbed boundary value problem in case of predominance of convective components above diffusive in conditions of a gentle osmosis was found.

Keywords: *the mathematical modelling, diffusion, convection, filtration, osmosis, singular perturbed boundary value problems, asymptotic approximations.*

Отримано: 16.06.2009