3. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений / Пер. с нем. – М.: Мир, 1990. – 206 с.
4. Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решений / Пер. с англ. – М.: ЮНИТИ, Аудит, 1997. – 510 с.
5. Сявавко М. С., Рибицька О. М. Математичне моделювання за умов невизначеності. – Львів: "Українські технології", 2000. – 319 с.

A method of comparison of decision variants in natural resources use based on matching total risks of alternatives has been proposed. Total risks have been estimated as sums of components: risks of losses, which aggravate concrete variant in economic, ecological and social sphere, and risks of lost opportunities, defined by potential incomes, benefits and advantages which related to alternatives.

Key words: *alternative, comparison of decision variants, uncertainty, decision maker, natural resources use, risk of lost opportunities, susceptibility to risk, decision table.*

Отримано: 23.05.2008

УДК 517.443

О. Ю. Тарновецька

Харківський національний технічний університет "ХПІ"

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з однією точкою спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Лежандра та Ейлера методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, умова однозначної розв'язності, логічна схема.*

Постановка проблеми. Тонкостінні елементи композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростіших випадках величини, які характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді поліпараметричного невласного інтегралу, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена дана робота, яка є продовженням досліджень, виконаних в монографіях [1-5].

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_1^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, \infty); 0 < R_0 < R_1 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Лежандра та Ейлера

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r), r \in (R_0, R_1),$$
$$\left(B_\alpha^* - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r), r \in (R_1, \infty). \quad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)u_1(r)\right|_{r=R_0} = g_0, \ \lim_{r\to\infty}\left[r^\gamma u_2(r)\right] = 0 \quad (2)$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right)u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right)u_2(r)\right]\right|_{r=R_1} = \omega_{j1}, j = 1, 2. \quad (3)$$

У рівностях (1)-(3) беруть участь величини $q_j > 0$, $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $\left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \ne 0$, $\alpha_{jk}^1 \ge 0$, $\beta_{jk}^1 \ge 0$, $c_{11}c_{21} > 0$, $c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$ та диференціальні оператори

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\right),$$

$$B_\alpha^* = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2, \quad (\mu) = (\mu_1, \mu_2), \ \mu_1 \ge \mu_2 \ge 0, \ 2\alpha + 1 > 0;$$

$\Lambda_{(\mu)}$ – узагальнений диференціальний оператор Лежандра [6], B_α^* – диференціальний оператор Ейлера [7].

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} - q_1^2\right)v = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)$ та другого роду $L_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_\alpha^* - q_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha-q_2}$ та $v_2 = r^{-\alpha+q_2}$ [7].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати загальний розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [7, 8]:

$$u_1(r) = A_1 P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r) + B_1 L_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r) + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) \operatorname{sh} \rho d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 r^{-\alpha - q_2} + \int_{R_1}^{\infty} E_2(r,\rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho. \tag{4}$$

У рівностях (4) $E_j(r, \rho)$ – функції Коші [7, 8]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0,$$

$$\left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0} - \left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \tag{5}$$

$$\varphi_1(r) = \operatorname{sh} r, \quad \varphi_2(r) = r^{2\alpha - 1}.$$

Введемо до розгляду функції:

$$Z_{\nu_1, j1}^{(\mu);m1}(\operatorname{ch} R_m) = \left(\alpha_{j1}^m \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^m\right) P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)\Big|_{r=R_m},$$

$$Z_{\nu_1, j1}^{(\mu);m2}(\operatorname{ch} R_m) = \left(\alpha_{j1}^m \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^m\right) L_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)\Big|_{r=R_m}, \quad m = 0,\ 1;$$

$$F_{\nu_1, j1}^{(\mu);m}(\operatorname{ch} R_m, \operatorname{ch} r) = Z_{\nu_1; j1}^{(\mu);m1}(\operatorname{ch} R_m) L_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r) - Z_{\nu_1; j1}^{(\mu);m2}(\operatorname{ch} R_m) P_{\nu_1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r),$$

$$\Delta_{\nu_1; j1}^{(\mu)}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} R_1) = Z_{\nu_1;11}^{(\mu);01}(\operatorname{ch} R_0) Z_{\nu_1;11}^{(\mu);12}(\operatorname{ch} R_1) -$$

$$- Z_{\nu_1;11}^{(\mu);02}(\operatorname{ch} R_0) Z_{\nu_1;11}^{(\mu);11}(\operatorname{ch} R_1),$$

$$B_{(\mu)}(q_1) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{\mu_1}}{2^{\mu_2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_1 - \nu_{12}^{+}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_1 - \nu_{12}^{-}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_1 + \nu_{12}^{+}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_1 + \nu_{12}^{-}\right)}, \quad \nu_{12}^{\pm} = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2).$$

Безпосередньо перевіряється, що за функцію Коші $E_1(r, \rho)$ можна взяти функцію

$$E_1(r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_1)}{\Delta_{\nu_1;11}^{(\mu)}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} R_1)} \begin{cases} F_{\nu_1;11}^{(\mu);0}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} r) F_{\nu_1;11}^{(\mu);1}(\operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} \rho), \\ \qquad R_0 < r < \rho < R_1, \\ F_{\nu_1;11}^{(\mu);0}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} \rho) F_{\nu_1;11}^{(\mu);1}(\operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} r), \\ \qquad R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{6}$$

Визначимо функції:

$$Z^{11}_{\nu_1,j2}(q_2,R_1)=\left[\beta^1_{j2}-(\alpha+q_2)\alpha^1_{j2}R_1^{-1}\right]\,R_1^{-\alpha-q_2}\;,$$

$$Z^{12}_{\nu_1,j2}(q_2,R_1)=\left[\beta^1_{j2}-(\alpha-q_2)\alpha^1_{j2}R_1^{-1}\right]\,R_1^{-\alpha+q_2}\;,$$

$$\Psi^{1*}_{\alpha;j2}(q_2,r)=Z^{12}_{\alpha;j2}(q_2,R_1)r^{-(\alpha+q_2)}-Z^{11}_{\alpha;j2}(q_2,R_1)r^{-\alpha+q_2}\;.$$

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{2q_2Z^{11}_{\alpha;12}}\begin{cases}\rho^{-(\alpha+q_2)}\Psi^{1*}_{\alpha;12}(q_2,r), & R_1<r<\rho<\infty,\\ r^{-(\alpha+q_2)}\Psi^{1*}_{\alpha;12}(q_2,\rho), & R_1<\rho<r<\infty.\end{cases}\tag{7}$$

Повернемось до формул (4). Крайова умова в точці $r=R_0$ та умови спряження (3) для визначення величин A_1, A_2, B_1 дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}&Z^{(\mu);01}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_0)A_1+Z^{(\mu);02}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_0)B_1=g_0\,,\\ &Z^{(\mu);11}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_1)A_1+Z^{(\mu);12}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_1)B_1-Z^{11}_{\alpha,12}(q_2,R_1)A_2=\omega_{11}\,,\\ &Z^{(\mu);12}_{\nu_1;21}(\operatorname{ch}R_1)A_1+Z^{(\mu);12}_{\nu_1;21}(\operatorname{ch}R_1)B_1-Z^{11}_{\alpha;22}(q_2,R_1)A_2=\omega_{21}+G_{12}\,.\end{aligned}\tag{8}$$

В алгебраїчній системі (8) бере участь функція

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{\operatorname{sh}R_1}\int_{R_0}^{R_1}\frac{F^{(\mu);0}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}\rho)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)}g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho d\rho+$$

$$+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{\infty}\frac{\rho^{-\alpha-q_2}}{Z^{11}_{\alpha;12}(q_2,R_1)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho\;.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2\}$ визначник алгебраїчної системи (8)

$$\begin{aligned}\Delta_{(\mu),(\alpha)}(q)\equiv{}&Z^{11}_{\alpha;12}(q_2,R_1)\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)-\\ &-Z^{11}_{\alpha;22}(q_2,R_1)\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)\neq 0\,.\end{aligned}\tag{9}$$

Тут $q=(q_1,q_2)$.

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{(\mu),\alpha;11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}\Big[Z^{11}_{\alpha;22}(q_2,R_1)F^{(\mu);1}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)-$$

$$-Z^{11}_{\alpha;12}(q_2,R_1)F^{(\mu);1}_{\nu_1;21}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)\Big],$$

$$W_{(\mu),\alpha;12}(r,q) = -\frac{c_{11}}{B_{(\mu)}(q_1)\operatorname{sh} R_1}\frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} r^{-\alpha-q_2}\,; \tag{10}$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{(\mu),\alpha;11}(r,q) = -\frac{Z^{11}_{\alpha;22}}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} F^{(\mu);0}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} r),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\mu),\alpha;21}(r,q) = \frac{Z^{11}_{\alpha;12}}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} F^{(\mu);0}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} r),$$

$$\mathcal{R}^2_{(\mu),\alpha;11}(r,q) = -\frac{\Delta_{\nu_1;21}}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} r^{-\alpha-q_2},$$

$$\mathcal{R}^2_{(\mu),\alpha;21}(r,q) = \frac{\Delta^{\mu}_{\nu_1;11}}{\Delta_{\mu,(\alpha)}(q)} r^{-\alpha-q_2}\,; \tag{11}$$

3) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;11}(r,\rho,q) = -B_{(\mu)}(q_1)\begin{cases} F^{(\mu);0}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} r) W_{(\mu),\alpha;11}(\rho,q), \\ \qquad R_0 < r < \rho < R_1, \\ F^{(\mu);0}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} \rho) W_{(\mu),\alpha;11}(r,q), \\ \qquad R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} F^{(\mu);0}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} r)\rho^{-\alpha-q_2},$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{\operatorname{sh} R_1}\frac{1}{\Delta_{(\mu),\alpha}(q)} F^{(\mu);0}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} \rho) r^{-\alpha-q_2}, \tag{12}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;22}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_1\Delta_{(\mu),\alpha}(q)}\begin{cases} \rho^{-\alpha-q_2}\Big[\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} R_1)\Psi^{1*}_{\alpha;22}(q_2,r) - \\ \quad -\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} R_1)\Psi^{1*}_{\alpha;12}(q_2,r)\Big], \quad R_1 < r < \rho < \infty, \\ r^{-\alpha-q_2}\Big[\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} R_1)\Psi^{1*}_{\alpha;22}(q_2,\rho) - \\ \quad -\Delta^{(\mu)}_{\nu_1;21}(\operatorname{ch} R_0, \operatorname{ch} R_1)\Psi^{1*}_{\alpha;12}(q_2,\rho)\Big], \quad R_1 < \rho < r < \infty. \end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (8), підстановки одержаних значень величин A_1, A_2, B_1 у формули (4) та низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W_{(\mu),\alpha;1j}(r,q)g_0 + \mathcal{R}^j_{(\mu),\alpha;11}(r,q)\omega_{11} +$$

$$+\mathcal{R}^{j}_{(\mu),\alpha;21}(r,q)\omega_{21} + \int\limits_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{(\mu),\alpha;j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho d\rho +$$

$$+\int\limits_{R_1}^{\infty} \mathcal{H}_{(\mu),\alpha;j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho \;, j=1,2. \qquad (13)$$

Побудуємо тепер розв’язок крайової задачі (1)-(3) методом гібридного інтегрального перетворення (ГІП), породженого на множині I_1^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{(\mu),\alpha} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_1)B_\alpha^* \,, \qquad (14)$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [8].

ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\,\alpha}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r=\infty$. Тому його спектр дійсний та неперервний [9]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$. Компоненти $V_{(\mu),\,\alpha;\,j}(r,\beta)$ спектральної функції

$$V_{(\mu),\alpha}(r,\beta) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta) + \theta(r-R_1)V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)$$

повинні задовольняти диференціальні рівняння

$$\left(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2\right)V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta) = 0 \,,\; r\in(R_0,R_1)\,,$$
$$\left(B_\alpha^* + b_2^2\right)V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta) = 0 \,,\; r\in(R_1,\infty)\,, \qquad (15)$$

однорідні крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)\Big|_{r=R_0} = 0\,,\; \lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma}V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)\right] = 0 \qquad (16)$$

та однорідні умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right)V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta) - \left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right)V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_1} = 0\,. \quad (17)$$

$$b_j = \left(\beta^2 + k_j^2\right)^{1/2},\; k_j^2 \ge 0\,, j=1,2.$$

Фундаментальну систему розв’язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = A^{(\mu)}_{\nu_1^*}(\operatorname{ch} r)$ та $v_2 = B^{(\mu)}_{\nu_1^*}(\operatorname{ch} r)$, $\nu_1^* = -1/2 + ib_1(\beta)$ [6]; фундаментальну систему розв’язків для звичайного диференціального рівняння Ейлера 2-го порядку $\left(B_\alpha^* + b_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha}\cos(b_2 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r)$ [7].

Якщо покласти

$$V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)=A_1 A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)+B_1 B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r),$$

$$V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)=A_2 r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r)+B_2 r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r), \qquad (18)$$

то крайова умова в точці $r = R_0$ й умови спряження (17) для визначення чотирьох невідомих A_j, B_j $(j = 1, 2)$ дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);01}(\operatorname{ch} R_0)A_1+Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);02}(\operatorname{ch} R_0)B_1=0\,,\ j=1,\,2, \qquad (19)$$

$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}(\operatorname{ch} R_1)A_1+Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);12}(\operatorname{ch} R_1)B_1-Y_{\alpha;j2}^{11}(b_2,\ln R_1)A_2-Y_{\alpha;j2}^{12}(b_2,\ln R_1)B_2=0.$$

У рівностях (19) беруть участь функції:

$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);m1}(\operatorname{ch} R_m)=\left(\alpha_{j1}^m\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^m\right)A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)\Big|_{r=R_m},$$

$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);m2}(\operatorname{ch} R_m)=\left(\alpha_{j1}^m\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^m\right)B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)\Big|_{r=R_m},$$

$$Y_{\alpha;j2}^{11}(b_2,\ln R_1)=\left[\left(\beta_{j2}^1-\alpha R_1^{-1}\alpha_{j2}^1\right)\cos(b_2\ln R_1)-\alpha_{j2}^1 R_1^{-1} b_2\sin(b_2\ln R_1)\right]R_1^{-\alpha},$$

$$Y_{\alpha;j2}^{12}(b_2,\ln R_1)=\left[\left(\beta_{j2}^1-\alpha R_1^{-1}\alpha_{j2}^1\right)\sin(b_2\ln R_1)+\alpha_{j2}^1 R_1^{-1} b_2\cos(b_2\ln R_1)\right]R_1^{-\alpha}.$$

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (19) стандартним способом [10] й підстановки отриманих значень A_j та B_j $(j = 1, 2)$ в рівності (18) маємо функції:

$$V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)=q_\alpha(\beta)\left[Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);01}(\operatorname{ch}R_0)B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)-Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);02}(\operatorname{ch}R_0)A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)\right],$$

$$V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)=\omega_{(\mu),\alpha;2}(\beta)r^{-\alpha}\cos(b_2\ln r)-\omega_{(\mu),\alpha;1}(\beta)r^{-\alpha}\sin(b_2\ln r). \qquad (20)$$

Тут прийняті позначення:

$$q_{(\alpha)}(\beta)=\frac{c_{21}b_2}{R_1^{2\alpha+1}},\ \omega_{(\mu),\alpha;j}(\beta)=\delta_{(\mu);11}(\beta)Y_{\alpha;22}^{1j}(b_2,\ln R_1)-\delta_{(\mu);21}(\beta)Y_{\alpha;12}^{1j},$$

$$\delta_{(\mu);j1}(\beta)=Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);01}(\operatorname{ch} R_0)Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);12}(\operatorname{ch} R_1)-Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);02}(\operatorname{ch} R_0)Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}(\operatorname{ch} R_1);\ j=1,2.$$

Введемо до розгляду вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1\operatorname{sh} r+\theta(r-R_1)\sigma_2 r^{2\alpha-1},\ \sigma_1=\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{R_1^{2\alpha+1}}{\operatorname{sh}R_1},$$

$\sigma_2 = 1$, та спектральну щільність

$$\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)=\beta[b_2(\beta)]^{-1}\left([\omega_{(\mu),\alpha;1}(\beta)]^2+[\omega_{(\mu),\alpha;2}(\beta)]^2\right)^{-1}.$$

Наявність спектральної функції $V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)$ дає можливість запровадити пряме $H_{(\mu),\alpha}$ й обернене $H^{-1}_{(\mu),\alpha}$ ГІП, породжене на множині I_1^+ ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}$ [9]:

$$H_{(\mu),\alpha}[g(r)] = \int\limits_{R_0}^{\infty} g(r) V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{21}$$

$$H^{-1}_{(\mu),\alpha}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \tilde{g}(\beta) V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} H_{(\mu),\alpha}\left[\mathcal{M}_{(\mu),\alpha}[g(r)]\right] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \left[k_1^2\tilde{g}_1(\beta) + k_2^2\tilde{g}_2(\beta)\right] + \\ + \left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1}\sigma_1 \operatorname{sh} R_0 V_{(\mu),\alpha;1}(R_0,\beta) g_0 + \\ + \frac{R_1^{2\alpha+1}}{c_{21}}\left[Z^1_{(\mu),\alpha;12}(\beta)\omega_{21} - Z^1_{(\mu),\alpha;22}(\beta)\omega_{11}\right], \end{aligned} \tag{23}$$

У рівності (23) беруть участь функції:

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{(\mu),\alpha;1}(r,\beta)\sigma_1 \operatorname{sh} r dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int\limits_{R_1}^{\infty} g_2(r) V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha-1} dr,$$

$$Z^1_{(\mu),\alpha;k2}(\beta) = \left(\alpha^1_{k2}\frac{d}{dr} + \beta^1_{k2}\right) V_{(\mu),\alpha;2}(r,\beta)\bigg|_{r=R_1}, \quad k = 1, 2.$$

Побудований за відомою логічною схемою [9] методом ГІП, запровадженого формулами (21)-(23), єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3) визначають функції:

$$\begin{aligned} u_j(r) = \int\limits_{R_0}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)V_{(\mu),\alpha;1}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\right) g_1(\rho)\sigma_1 \operatorname{sh}\rho d\rho + \\ + \int\limits_{R_1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)V_{(\mu),\alpha;2}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\right) g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha-1}d\rho + \quad (24) \\ + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)V_{(\mu),\alpha;1}(R_0,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta^2+q^2\right)}d\beta\right)\sigma_1 \operatorname{sh} R_0 g_0 + \\ + \frac{R_1^{2\alpha+1}}{c_{21}}\left[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)Z^1_{(\mu),\alpha;12}(\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\omega_{21} - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\mu),\alpha;j(r\beta)} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times Z^{1}_{(\mu),\alpha;22}(\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta\omega_{11}\Bigg],\ q^2=\max\{q_1^2;q_2^2\},j=1,2.$$

Порівнюючи розв'язки (12) та (24) в силу єдиності, маємо формули обчислення station поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\mu),\,\alpha}$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)V_{(\mu),\alpha;k}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)d\beta}{\beta^2+q^2}=\frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}_{(\mu),\alpha;jk}(r,\rho,q),\ (25)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu),\alpha;1}(R_0,\beta)V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)d\beta}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta^2+q^2\right)}=\frac{1}{\sigma_1\mathrm{sh}R_0}W_{(\mu),\alpha;1j}(r,q),(26)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)Z^{1}_{(\mu),\alpha;12}(\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\mathcal{R}^{j}_{(\mu),\alpha;21}(r,q),\ (27)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)Z^{1}_{(\mu),\alpha;22}(\beta)\frac{\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)}{\beta^2+q^2}d\beta=-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\mathcal{R}^{j}_{(\mu),\alpha;11}(r,q).\ (28)$$

У рівностях (25)-(28) функції впливу $\mathcal{H}_{(\mu),\,\alpha;\,jk}(r,\rho,q)$ визначені формулами (12), функції Гріна умов спряження $\mathcal{R}^{j}_{(\mu),\alpha;k1}(r,q)$ визначені формулами (11), а функції Гріна $W_{(\mu),\,\alpha;\,1j}(r,q)$ – формулами (10).

Зауваження 1. Якщо $\max\{q_1^2;\ q_2^2\}\equiv q^2=q_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\geq 0$ ($b_1=\beta$, $b_2=\sqrt{\beta^2+q_1^2-q_2^2}$). В цьому випадку β^2+ $+q^2=\beta^2+q_1^2$.

Зауваження 2. Якщо $q^2=q_2^2$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2$, $k_2^2=0$. В цьому випадку $b_1=\left(\beta^2+q_2^2-q_1^2\right)^{1/2}$, $b_2=\beta$, $\beta^2+q^2=\beta^2+q_2^2$.

Зауваження 3. Оскільки праві частини в рівностях (25)-(28) не залежать від нерівності $\left(q_2^2-q_1^2\right)\geq 0$ або нерівності $\left(q_1^2-q_2^2\right)\geq 0$, то можна покласти $q_1^2=q_2^2\equiv q^2>0$, звужуючи при цьому сім'ю невласних інтегралів.

Основна теорема. Якщо вектор-функція $f(r)=\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)];$ $B^*_\alpha[g_2(r)]\}$ неперервна на множині I_1^+, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови та умови спряження й виконується умова (9) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули

(25)-(28) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами $\mathcal{M}_{(\mu),\,\alpha}$, визначеного рівністю (14).

Висновок. Результати даної роботи поповнюють довідкову математичну літературу й можуть бути використані при обчисленні невласних інтегралів за власними елементами ГДО, які з'являються при моделюванні фізико-технічних процесів у відповідних неоднорідних середовищах.

Список використаних джерел:

1. Ленюк М. П., Літовченко В. А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень. Том I. – Київ: Інститут математики НАН України, 1994. – 244 с.
2. Ленюк М. П., Літовченко В. А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень. Том II. – Київ: Інститут математики НАН України, 1996. – 283 с.
3. Ленюк М. П., Літовченко В. А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень. Том III. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 239 с.
4. Ленюк М. П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра, Конторовича-Лєбєдєва). Том IV. – Чернівці: Прут, 2003. – 318 с.
5. Ленюк М. П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том V. – Чернівці: Прут, 2005. – 368 с.
6. Конет І. М., Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
8. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
9. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368 с.
10. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

By the method of comparison of decisions, built on the arctic landmark *of* $r \geq$ *of* $R_0 > 0$ with the one point of interface for the separate system of differential equalizations of Legendre and Euler by the method of functions Cauchy and by the method of the proper hybrid integral transformation, polyparameter family of known integrals is calculated.

Key words: *not own integrals, functions Cauchy, the main decisions, hybrid integrated transformation, the basic identity, condition of unequivocal resolvability, the logic scheme.*

Отримано: 05.06.2008