The hybrid integrated Euler-Fourier type transformation on a polar axis with one junction point is realized by means of the delta-like sequence method (Cauchy kernel).

Key words: *the hybrid differential operator, hybrid integrated transformation, Cauchy kernel, influence functions, spectral function, the integrated image, the basic identity.*

Отримано: 03.06.2008

УДК 519.217

К. К. Омарова

Институт кибернетики Национальной академии наук Азербайджана, г. Баку

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ЭРГОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТУПЕНЧАТОГО ПРОЦЕССА ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ С ЗАДЕРЖИВАЮЩИМ ЭКРАНОМ В НУЛЕ

По заданной последовательности независимых одинаково распределенных пар случайных величин строится ступенчатый процесс полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле.

Ключевые слова: *случайная величина, ступенчатый процесс, блуждание, задерживающий экран, распределение.*

Введение. Нахождению эргодического распределения ступенчатых процессов полумарковского блуждания с экраном или с экранами посвящены немало работ. Основную эргодическую теорему для полумарковских процессов доказал В. А. Смит. Общая эргодическая теорема доказана И. И. Гихманом и А. В. Скороходом [2, с.427-429]. В работе И. И. Ежова и В. М. Шуренкова [3, с.640-642] дано упрощенное доказательство этой теоремы. В работах А. А. Боровкова [1, с.652-653; 4, с.141-147] и других авторов изучены эргодические теоремы для процессов полумарковских блужданий с задерживающими экранами. В работе А. В. Скорохода и Т. И. Насировой [5, с.134-136] доказаны эргодические теоремы для сложного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле. Некоторые дальнейшие развитие указанной работы опубликовано в [6].

В данной работе находятся явные виды преобразований Лапласа по времени, преобразований Лапласа-Стилтьеса по фазе условного распределения, безусловного распределения и явный вид преобразования Лапласа эргодического распределения ступенчатого процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле, когда блуждание происходит в классе сложных лапласовых распределений.

Постановка задачи. Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин $\{\xi_k(\omega),\ \eta_k(\omega)\}_{k\ge 0}$, где случайные величины $\xi_k(\omega)$, $k\ge 0$, независимы между собою, $\eta_k(\omega)$, $k\ge 0$, тоже независимы между собою и $\xi_k(\omega)>0$, $k\ge 1$. Кроме того, случайные величины $\xi_k(\omega)>0$, $k\ge 1$ и $\eta_k(\omega)>0$, $k\ge 1$ независимы между собою. Далее, предполагаем, что $E\xi_1(\omega)<\infty$, $E\eta_1(\omega)<\infty$ и $E\eta_1(\omega)<0$. Построим ступенчатый процесс полумарковского блуждания [6, с.11]

$$X_1(t,\omega)\ =\sum_{i=0}^{k}\eta_i(\omega),\ \text{ если } \sum_{i=0}^{k}\xi_i(\omega)\le t<\sum_{i=1}^{k+1}\xi_i(\omega),\ \ k=0,1,2,\dots,$$

где
$$\xi_0(\omega)=\eta_0(\omega)=0\ .$$

Задержим этот процесс с экраном в нуле по Боровкову [4, с.41]

$$X(t,\omega)=X_1(t,\omega)-\inf_{0\le s\le t}\left(0,X_1(s,\omega)\right).$$

Обозначим

$$R(t,x/z)=P\{X(t,\omega)<x/X(0,\omega)=z\},$$

$$\widetilde{R}(s,x/z)=\int_{t=0}^{\infty}e^{-st}R(t,x/z)dt,\ s>0,$$

$$\varphi(s)=Ee^{-s\xi_1(\omega)},\ \widetilde{R}(s,\alpha/z)=\int_{x=0}^{\infty}e^{-\alpha x}d_x\widetilde{R}(s,x/z),\ \alpha>0\ ,$$

$$\widetilde{R}(s,\alpha)=\int_{z=0}^{\infty}\widetilde{R}(s,\alpha/z)\,dP\{X(0,\omega)<z\},\quad \widetilde{R}(\alpha)=\lim_{s\to 0}s\,\widetilde{R}(s,\alpha)\ .$$

Процесс $X(t,\omega)$ будем называть ступенчатым процессом полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле (или же с задерживающим экраном “0”).

Цель найти явные виды преобразований Лапласа по времени, преобразований Лапласа-Стилтьеса по фазе условного распределения, безусловного распределения и преобразования Лапласа эргодического распределения $X(t,\omega)$.

Отметим, что А. А. Боровковым [4, с.141-147] найден явный вид самого эргодического распределения случайного блуждания с задерживающим экраном в нуле, когда оно происходит по любому распределению.

Но в данной работе иным методом для процесса $X(t,\omega)$ находятся $\widetilde{R}(s,\alpha/z)$, $\widetilde{R}(s,\alpha)$ и $\widetilde{R}(\alpha)$, когда случайное блуждание происходит по сложному лапласовому распределению порядка (n, 1), хотя предложенный метод применим и в случае сложного лапласового распределения порядка (n, m) (в последнем случае имеются технические трудности).

Очевидно, что

$$\tilde{\tilde{R}}'_{\alpha}(s,0/z) = -\int_{t=0}^{\infty} e^{-st} E(X(t,\omega)/X(0,\omega) = z)dt,$$

$$\tilde{\tilde{R}}'_{\alpha}(s,0) = -\int_{t=0}^{\infty} e^{-st} EX(t,\omega)dt$$

и преобразования Лапласа высших моментов процесса очень важны для нахождения математического ожидания, дисперсии и высших моментов процесса в любой момент времени.

И поэтому сперва составим интегральное уравнение для $\tilde{R}(s,\alpha/z)$, когда случайное блуждание происходит по любому распределению.

Составление интегрального уравнения для $\tilde{R}(s,\alpha/z)$. Составим интегральное уравнение для $\tilde{R}(s,\alpha/z)$, когда случайное блуждание происходит по любому распределению.

Теорема 1. Функция $\tilde{R}(s,\alpha/z)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\tilde{R}(s,\alpha/z) = e^{-\alpha z}\frac{1-\varphi(s)}{s} + \varphi(s)P\{\eta_1 < -z\}\tilde{R}s,x/0) + \\ +\varphi(s)\int_{y=0}^{\infty}\tilde{R}(s,x/y)\,d_y P\{\eta_1 < y-z\}.\end{aligned} \qquad (1)$$

Доказательство теоремы 1. По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned}P\{X(t,\omega) < x\ /\ X(0,\omega) = z\} = P\{X(t,\omega) < x;\ \xi_1 > t\ /\ X(0,\omega) = z\} + \\ + P\{X(t,\omega) < x;\ \xi_1 < t\ /\ X(0,\omega) = z\} = P\{z < x\}\,P\{\xi_1 > t\} + \qquad (2)\\ + \int_{s=0}^{t}\int_{y=0}^{\infty} P\{\xi_1 \in du;\ \max(0, z+\eta_1) \in dy\}P\{X(t-u,\omega) < x\ /\ X(0,\omega) = y\}.\end{aligned}$$

Умножив обе части равенства (2) на e^{-st}, проинтегрировав по t от 0 до ∞ и учитывая обозначение для $\tilde{R}(s,x/z)$ получим

$$\tilde{R}(s,x/z) = \varepsilon(x-z)\frac{1-\varphi(s)}{s} + \varphi(s)\int_{y=0}^{\infty}\tilde{R}(s,x/y)\,d_y\varepsilon(y)P\{\eta_1 + z < y\},$$

где $$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(s, x/z) &= \varepsilon(x-z)\frac{1-\varphi(s)}{s} + \varphi(s)P\{\eta_1 < -z\}\widetilde{R}(s, x/0) + \\ &+ \varphi(s)\int_{y=0}^{\infty}\widetilde{R}(s, x/y)\,d_y P\{\eta_1 < y-z\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (3) на $e^{-\alpha x}$, проинтегрировав по x от 0 до ∞ и учитывая обозначение для $\widetilde{R}(s, \alpha/z)$ получим доказательство теоремы.

Теорема 1 доказана.

Уравнение (1) для произвольно распределенных случайных величин $\xi_k(\omega), \eta_k(\omega)$, $k \geq 0$, можно решить методом последовательных приближений. Но такое решение не пригодится для приложений. Это уравнение имеет решение в явном виде в классе сложных лапласовых распределений. Определение сложного лапласового распределения порядка (n, 1) дано в доказательстве теоремы 2.

Теорема 2. Пусть $\eta_k(\omega) = \eta_{k1}^{+}(\omega) + \eta_{k2}^{+}(\omega) + \ldots + \eta_{kn}^{+}(\omega) - \eta_k^{-}(\omega)$, $k = \overline{1, \infty}$, где $\eta_{ki}^{+}(\omega)$, $i = \overline{1, n}$, и $\eta_k^{-}(\omega)$ имеют эрланговское распределение первого порядка с параметрами λ и μ соответственно.

Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(s, \alpha/z) &= -\frac{\alpha(\alpha+\lambda)^n \lambda^n \varphi(s)(1-\varphi(s))}{s[[\lambda - k_1(s)]^n - \lambda^n \varphi(s)][(\mu-\alpha)(\alpha+\lambda)^n - \lambda^n \mu\varphi(s)]} e^{k_1(s)z} + \\ &+ \frac{(\mu-\alpha)(\lambda+\alpha)^n[1-\varphi(s)]}{s[(\mu-\alpha)(\lambda+\alpha)^n - \lambda^n \mu\varphi(s)]} e^{-\alpha z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(s, \alpha) &= -\frac{\alpha(\alpha+\lambda)^n (k_1(s)+\mu)^2 (1-\varphi(s))}{\mu s k_1(s)\varphi(s)[(\mu-\alpha)(\alpha+\lambda)^n - \lambda^n \mu\varphi(s)]} + \\ &+ \frac{(\mu-\alpha)[(1-\varphi(s)]}{s[(\mu-\alpha)(\lambda+\alpha)^n - \lambda^n \mu\varphi(s)]}. \end{aligned}$$

Если $E\eta_k(\omega) < 0$, то

$$\widetilde{R}(\alpha) = \frac{(n\mu - \lambda)(\alpha+\lambda)^n}{\lambda\left[\mu\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha+\lambda)^{n-i}\lambda^{i-1} - (\alpha+\lambda)^n\right]},$$

$$EX(\omega) = -\frac{n(n+1)\mu}{2\lambda(\lambda - n\mu)} E\xi_1(\omega),$$

$$DX(\omega) = \frac{n(n+1)\mu\left[4(n+2)\lambda - n(n+5)\mu\right]}{12\lambda^2(\lambda - n\mu)^2} E\xi_1^2(\omega),$$

где $X(\omega)$ удовлетворяет следующему равенству

$$\lim_{t\to\infty} P\{X(t,\omega) < x\} = P\{X(\omega) < x\},\ \forall x \in R\ .$$

Вывод. По заданной последовательности независимых одинаково распределенных пар случайных величин строится ступенчатый процесс полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле.

Список использованной литературы:

1. Боровков А. А. О блуждании в полосе с задерживающими границами // Матем. заметки. – 1975. – Т.17. – Вып.4. – С.649-657.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. – М.: Наука, 1973. – Т.2. – 639 с.
3. Ежов И. И., Шуренков В. М. Эргодические теоремы, связанные с марковским свойством случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т.21. – № 3. – С.635-648.
4. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 367 с.
5. Скороход А. В., Насирова Т. И. Об эргодической теореме для одного класса процессов, построенных по суммам независимых случайных величин // Теория вер. и мат. статистика. – 1980. – № 22. – С.127-137.
6. Насирова Т. И., Омарова К. К. Распределение нижнего граничного функционала ступенчатого процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле // Украинский математический журнал. – 2007. – Т.59. – № 7. – С.912-919.

By the given sequence of the independent identically distributed pairs random variables the step processes of semi-markov random walk with screen in zero is constructed.

Key words: *random variables, step process, reaching, delaying screen, distribution.*

Отримано: 12.05.2008