УДК 517.5

В. О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима

Кам'янець-Подільський національний університет

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ СІЧНИХ ПЛОЩИН НА ВИПАДОК АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ЧЕБИШОВСЬКИМ ПІДПРОСТОРОМ З ДОДАТКОВИМ ОБМЕЖЕННЯМ

В статті узагальнено метод січних площин на випадок задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням.

Ключові слова: *метод січних площин, рівномірна апроксимація, компактнозначне відображення.*

Вступ. У даній роботі для розв'язування задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення елементами скінченновимірного чебишовського підпростору однозначних неперервних відображень, які задовольняють додатковому обмеженню, що задається системою замкнених куль з центрами та радіусами, які змінюються неперервно, модифіковано метод січної площини розв'язування задачі опуклого програмування, запропонований у праці [1], а також доведено його збіжність.

Постановка задачі. Нехай S – метричний компакт, X – лінійний над полем комплексних чисел нормований сепарабельний простір, $C(S,X)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ – сукупність непорожніх компактів простору X, $C(S,K(X))$ – множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a(s)=K_s\in K(X)$, V – лінійний підпростір простору $C(S,X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i\in C(S,X)$, $i=\overline{1,n}$, $u\in C(S,X)$, $r\in C(S,R)$, $r(s)>0$, $b(s)=\{x : x\in X, \|x-u(s)\|\le r(s)\}$, $s\in S$, $D=\{g : g\in C(S,X)$, $g(s)\in b(s)$, $s\in S$.

Через $\operatorname{int} M$ будемо позначати внутрішність, а через ∂M – межу множини M топологічного простору. Зрозуміло, що для $s\in S$

$$\operatorname{int} b(s)=\{x : x\in X, \|x-u(s)\|<r(s)\},\ \partial b(s)=\{x : x\in X, \|x-u(s)\|=r(s)\}.$$

Будемо припускати, що існує елемент $g_0\in V$, для якого $g_0(s)\in\operatorname{int} b(s)$ для всіх $s\in S$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ скінченновимірним підпростором V однозначних неперервних відображень g компакту S в X, які задовольняють додатковому обмеженню $g \in D$, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \inf_{g \in V \cap D} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|. \qquad (1)$$

Згідно з теоремою 2.1 [2, с.1605] існує елемент $g^* \in V \cap D$ такий, що

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^*(s) - y\|.$$

Цей елемент будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Позначимо через X^* простір, спряжений з X, через B^* – замкнену одиничну кулю простору X^*: $B^* = \{f : f \in X^*, \|f\| \le 1\}$, а через $E(B^*)$ – множину крайніх точок B^*.

У подальшому будемо припускати, що обмеження $g \in V \cap D$ в задачі відшукання величини (1) є суттєвим у тому розумінні, що

$$\alpha_a^*(D) < \alpha_a^*(V \cap D),$$

де $\alpha_a^*(D) = \inf_{g \in D} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|$, та виконується умова (Н): для будь-яких $s_j \in S$, $f_j \in E(B^*)$ таких, що лінійні неперервні на $C(S, X)$ функціонали $\varphi_{(s_j, f_j)}(g) = \operatorname{Re} f_j(g(s_j))$, $j = \overline{1,n}$, $g \in C(S, X)$, є лінійно незалежними, визначник $\det[\varphi_{(s_j, f_j)}(g_i)] \ne 0$.

Припускається, що хоча б n зазначених функціоналів існують.

Умову (Н) будемо називати узагальненою умовою Хаара.

При виконанні умови (Н) підпростір V називатимемо чебишовським підпростором простору $C(S, X)$.

Легко переконатися, що в цьому випадку екстремальний елемент для величини (1) єдиний.

Актуальність теми. Практичне використання величини (1) та її екстремального елемента вимагає наявності чисельних методів їх відшукання.

Мета роботи. Узагальнити метод січних площин на випадок задачі відшукання величини (1) та її екстремального елемента.

Основні результати.

Теорема 1. Якщо $s_j \in S$, $f_j \in E(B^*)$, $j = \overline{1, n+1}$, такі, що лінійні неперервні на $C(S, X)$ функціонали $\varphi_{(s_j, f_j)}(g) = \operatorname{Re} f_j(g(s_j))$,

$j=\overline{1,n+1}$, утворюють лінійно незалежну систему, додатні числа ρ_j, $j=\overline{1,n+1}$, задовольняють умови

$$\sum_{j=1}^{n+1}\rho_j \operatorname{Re}\left(-f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)\right)=0,\ i=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n+1}\rho_j=1,$$

то система векторів $\left(\operatorname{Re}\left(-f_j\left(g_1\left(s_j\right)\right)\right),\ldots,\operatorname{Re}\left(-f_j\left(g_n\left(s_j\right)\right)\right),1\right)$, $j=\overline{1,n+1}$, лінійно незалежна.

Перейдемо до **описання методу**.

На попередньому його кроці вибираємо будь-які $s_j\in S$, $\bar f_j\in E\left(B^*\right)$, $y_j\in a\left(s_j\right)$, $j=\overline{1,n+1}$, такі, що лінійні неперервні на $C(S,X)$ функціонали $\varphi_{\left(s_j,\bar f_j\right)}(g)=\operatorname{Re}\bar f_j\left(g\left(s_j\right)\right)$, $j=\overline{1,n+1}$, утворюють лінійно незалежну систему, та при фіксованому $\lambda_{n+1}\neq 0$ розв'язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \operatorname{Re}\bar f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)=-\lambda_{n+1}\operatorname{Re}\bar f_{n+1}\left(g_i\left(s_{n+1}\right)\right),\ i=\overline{1,n}.$$

Нехай $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1})$ – розв'язок цієї системи. Оскільки $\lambda_{n+1}\neq 0$ і виконується умова (Н), то $\lambda_j\neq 0$, $j=\overline{1,n+1}$. Позначимо через $\left(\beta_1,\ldots,\beta_n,\beta_{n+1}\right)$ той з векторів $\left(\sum_{j=1}^{n+1}\left|\lambda_j\right|\right)^{-1}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}\right)$, $\left(\sum_{j=1}^{n+1}\left|\lambda_j\right|\right)^{-1}\left(-\lambda_1,\ldots,-\lambda_n,-\lambda_{n+1}\right)$, для якого $\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j\operatorname{Re}\left(-\bar f_j\left(y_j\right)\right)\geq 0$. Нехай $\rho_j^1=\left|\beta_j\right|$, $\varepsilon_j=sign\,\beta_j$, $j=\overline{1,n+1}$, $f_j=\varepsilon_j\bar f_j$, $j=\overline{1,n+1}$. Зрозуміло, що числа ρ_j^1 та функціонали f_j, $j=\overline{1,n+1}$, задовольняють умови

$$\sum_{j=1}^{n+1}\rho_j^1\operatorname{Re}\left(-f_j\left(y_j\right)\right)\geq 0, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\rho_j^1\operatorname{Re}\left(-f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)\right)=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\rho_j^1>0,\ j=\overline{1,n+1},\ \sum_{j=1}^{n+1}\rho_j^1=1. \tag{5}$$

На першому кроці методу розв'язуємо таку задачу лінійного програмування:

$$\min \theta \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \mathrm{Re}\big(-f_j\big(g_i\big(s_j\big)\big)\big) + \theta \ge \mathrm{Re}\big(-f_j\big(y_j\big)\big), \ j = \overline{1, 2n+2}\,, \tag{7}$$

де $s_{n+1+j} = s_j$, $f_{n+1+j} = -f_j$, $y_{n+1+j} = y_j$, $j = \overline{1, n+1}$.

Нехай на q-му кроці ($q \ge 1$) методу знайдено оптимальний розв'язок $\left(\alpha^q ; \theta^q\right) = \left(\alpha_1^q, \dots, \alpha_n^q, \theta^q\right)$ такої задачі лінійного програмування

$$\min \theta \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \mathrm{Re}\big(-f_j\big(g_i\big(s_j\big)\big)\big) + \theta \ge \mathrm{Re}\big(-f_j\big(y_j\big)\big), \ j = \overline{1, 2n + m_q + 1}, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \mathrm{Re}\big(-\varphi_j\big(g_i\big(t_j\big)\big)\big) \ge \mathrm{Re}\big(-\varphi_j\big(u\big(t_j\big)\big)\big) - r\big(t_j\big), \ j = \overline{1, p_q}, \tag{10}$$

де $s_j \in S$, $y_j \in a\big(s_j\big)$, $f_j \in E\big(B^*\big)$, $j = \overline{1, 2n + m_q + 1}$; $t_j \in S$, $\varphi_j \in E\big(B^*\big)$, $j = \overline{1, p_q}$; $m_q \ge 1$, $m_q + p_q = q$.

Теорема 2. Задача лінійного програмування (8)-(10) має оптимальний опорний розв'язок. Справедливе співвідношення

$$\theta^q \le \alpha_a^*\big(V \cap D\big), \ q = 1, 2, \dots . \tag{11}$$

Доведення. Нехай $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Легко переконатися, що вектор $\big(\alpha^* ; \alpha_a^*\big(V \cap D\big)\big) = \big(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*, \alpha_a^*\big(V \cap D\big)\big)$ є допустимим розв'язком задачі (8)-(10).

Задачею лінійного програмування, двоїстою до задачі (8)-(10), є задача відшукання

$$\max\left(\sum_{j=1}^{2n+m_q+1} \rho_j \ \mathrm{Re}\big(-f_j\big(y_j\big)\big) + \sum_{j=1}^{p_q} \beta_j \left(\mathrm{Re}\big(-\varphi_j\big(u\big(t_j\big)\big)\big) - r\big(t_j\big)\right)\right) \tag{12}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{2n+m_q+1} \rho_j \ \mathrm{Re}\big(-f_j\big(g_i\big(s_j\big)\big)\big) + \sum_{j=1}^{p_q} \beta_j \ \mathrm{Re}\big(-\varphi_j\big(g_i\big(t_j\big)\big)\big) = 0 \ , i = \overline{1, n}\,, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{2n+m_q+1} \rho_j = 1\,, \tag{14}$$

$$\rho_j \ge 0\,,\; j=\overline{1,2n+m_q+1}\,,\; \beta_j \ge 0\,,\; j=\overline{1,p_q}\,. \tag{15}$$

Внаслідок (4), (5) допустимим розв'язком цієї задачі є вектор $\left(\rho_1^1,....,\rho_{n+1}^1,0,...,0\right)$. Оскільки задачі (8)-(10) та (12)-(15) мають допустимі розв'язки, то, як відомо (див., наприклад, [3, с.176]), вони мають і оптимальні розв'язки.

Оскільки згідно з теоремою 1 система векторів $\left(\mathrm{Re}\left(-f_j\left(g_1\left(s_j\right)\right)\right),\right.$ $\left.\ldots,\mathrm{Re}\left(-f_j\left(g_n\left(s_j\right)\right)\right),1\right)$, $j=\overline{1,n+1}$, є лінійно незалежною, ці задачі мають також опорні оптимальні розв'язки.

Нехай $\left(\rho_1^q,....,\rho_{2n+m_q+1}^q,\beta_1^q,...,\beta_{p_q}^q\right)$ – оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування (12)-(15). Тоді

$$\sum_{j=1}^{2n+m_q+1} \rho_j^q\,\mathrm{Re}\left(-f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)\right)+\sum_{j=1}^{p_q}\beta_j^q\,\mathrm{Re}\left(-\varphi_j\left(g_i\left(t_j\right)\right)\right)=0\,,\; i=\overline{1,n}\,, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{2n+m_q+1}\rho_j^q=1\,, \tag{17}$$

$$\rho_j^q \ge 0\,,\; j=\overline{1,2n+m_q+1}\,,\; \beta_j^q \ge 0\,,\; j=\overline{1,p_q}\,. \tag{18}$$

Крім того, внаслідок першої теореми двоїстості в лінійному програмуванні (див., наприклад, [3, с.173])

$$\theta^q = \sum_{j=1}^{2n+m_q+1}\rho_j^q\,\mathrm{Re}\left(-f_j\left(y_j\right)\right)+\sum_{j=1}^{p_q}\beta_j^q\left(\mathrm{Re}\left(-\varphi_j\left(u\left(t_j\right)\right)\right)-r\left(t_j\right)\right). \tag{19}$$

З рівності (16) випливає, що для будь-якого $g\in V$

$$\sum_{j=1}^{2n+m_q+1}\rho_j^q\,\mathrm{Re}\left(-f_j\left(g\left(s_j\right)\right)\right)+\sum_{j=1}^{p_q}\beta_j^q\left(-\varphi_j\left(g\left(t_j\right)\right)\right)=0\,.$$

З урахуванням (17)-(19) для будь-якого вектора $g\in V\bigcap D$ звідси одержимо, що

$$\theta^q = \sum_{j=1}^{2n+m_q+1}\rho_j^q\,\mathrm{Re}\left(f_j\left(g\left(s_j\right)-y_j\right)\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p_q}\beta_j^q\left(\mathrm{Re}\,\varphi_j\left(g\left(t_j\right)-u\left(t_j\right)\right)-r\left(t_j\right)\right)\le \max_{1\le j\le 2n+m_q+1}\left\|g\left(s_j\right)-y_j\right\|+$$

$$+\sum_{j=1}^{p_q}\beta_j^q\left(\left\|g\left(t_j\right)-u\left(t_j\right)\right\|-r\left(t_j\right)\right)\le \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g(s)-y\right\|.$$

Тому $\theta^q \le \alpha_a^*(V \cap D)$.

Теорему доведено.

Нехай, як і вище, $(\alpha^q;\theta^q) = (\alpha_1^q,...,\alpha_n^q,\theta^q)$ – оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування (8)-(10), знайдений на q -му кроці $(q \ge 1)$. Для вектора $g^q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^q g_i$ знаходимо

$$\varepsilon^q = \max\left\{ \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \theta^q, \max_{t\in S}\left(\left\| g^q(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) \right\}.$$

Легко переконатися, що у випадку, коли $\varepsilon^q \le 0$, елемент g^q є екстремальним для задачі відшукання величини (1).

Якщо ж $\varepsilon^q > 0$, то у випадку, коли $\varepsilon^q = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \theta^q$, для вектора g^q знаходимо $s_{2n+m_q+2} \in S$, $y_{2n+m_q+2} \in a(s_{2n+m_q+2})$, $f_{2n+m_q+2} \in E(B^*)$ такі, що

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| = f_{2n+m_q+2}\left(g^q(s_{2n+m_q+2}) - y_{2n+m_q+2} \right),$$

та приєднуємо до обмежень (9) задачі (8)-(10) обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \mathrm{Re}\left(-f_{2n+m_q+2}\left(g_i\left(s_{2n+m_q+2} \right) \right) \right) + \theta \ge \mathrm{Re}\left(-f_{2n+m_q+2}\left(y_{2n+m_q+2} \right) \right),$$

знаходимо оптимальний розв’язок $(\alpha^{q+1};\theta^{q+1}) = (\alpha_1^{q+1},...,\alpha_n^{q+1},\theta^{q+1})$ одержаної в результаті цього нової задачі лінійного програмування і т.д.

Якщо ж $\varepsilon^q = \max_{t\in S}\left(\left\| g^q(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) > 0$, то для вектора g^q знаходимо $t_{p_q+1} \in S$, $\varphi_{p_q+1} \in E(B^*)$ такі, що

$$\max_{t\in S}\left(\left\| g^q(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) = \left\| g^q\left(t_{p_q+1} \right) - u\left(t_{p_q+1} \right) \right\| - r\left(t_{p_q+1} \right) =$$
$$= \varphi_{p_q+1}\left(g^q\left(t_{p_q+1} \right) - u\left(t_{p_q+1} \right) \right) - r\left(t_{p_q+1} \right),$$

та приєднуємо до обмежень (10) задачі (8)-(10) обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \mathrm{Re}\left(-\varphi_{p_q+1}\left(g_i\left(t_{p_q+1} \right) \right) \right) \ge \mathrm{Re}\left(-\varphi_{p_q+1}\left(u\left(t_{p_q+1} \right) \right) \right) - r\left(t_{p_q+1} \right),$$

знаходимо оптимальний розв’язок $(\alpha^{q+1};\theta^{q+1}) = (\alpha_1^{q+1},...,\alpha_n^{q+1},\theta^{q+1})$ одержаної в результаті цього нової задачі лінійного програмування і т.д.

Теорема 3. Послідовність $\{\theta^q\}_{q=1}^{\infty}$ є неспадною. Послідовність $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$ збігається до екстремального елемента g^* для величини (1). Мають місце рівності

$$\lim_{q\to\infty}\theta^q = \alpha_a^*(V\cap D) = \lim_{q\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^q(s)-y\right\| = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|,$$

$$\lim_{q\to\infty}\varepsilon^q = 0\,.$$

Доведення. Оскільки множина обмежень задачі лінійного програмування, яка розв'язується на $q+1$-му кроці включає обмеження (9), (10), то $\theta^q \le \theta^{q+1}$. Отже, послідовність $\{\theta^q\}_{q=1}^{\infty}$ є неспадною. Згідно з теоремою 2 $\theta^q \le \alpha_a^*(V\cap D)$, $q=1,2,...$. Тому існує $\lim\limits_{q\to\infty}\theta^q$ і $\lim\limits_{q\to\infty}\theta^q \le \alpha_a^*(V\cap D)$.

Легко переконатися, що послідовність $\{\alpha^q\}_{q=1}^{\infty} = \{(\alpha_1^q,...,\alpha_n^q)\}_{q=1}^{\infty}$ є обмеженою. Супротивне суперечить умові (Н).

Маємо, що

$$\left\|g^q\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^q g_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^q\right|\left\|g_i\right\| \le C\sum_{i=1}^{n}\left\|g_i\right\|,$$

де $\left|\alpha_i^q\right| \le C$, $q=1,2,...$, $i=\overline{1,n}$, тому обмеженою буде також послідовність $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$. З урахуванням скінченновимірності простору V з послідовності $\{g^q\}_{q=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\{g^{q_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$.

Нехай $\lim\limits_{\mu\to\infty} g^{q_\mu} = g^*$. Зрозуміло, що $g^* \in V$. Припустимо, що існує підпослідовність $\{q_{\mu_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що

$$\varepsilon^{q_{\mu_\nu}} = \max_{t\in S}\left(\left\|g^{q_{\mu_\nu}}(t)-u(t)\right\|-r(t)\right) =$$

$$= \varphi_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\left(g^{q_{\mu_\nu}}\left(t_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\right)-u\left(t_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\right)\right)-r\left(t_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\right). \qquad (20)$$

Оскільки $\left(\alpha^{q_{\mu_{\nu+1}}};\theta^{q_{\mu_{\nu+1}}}\right) = \left(\alpha_1^{q_{\mu_{\nu+1}}},...,\alpha_n^{q_{\mu_{\nu+1}}},\theta^{q_{\mu_{\nu+1}}}\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (8)-(10) при $q = q_{\mu_{\nu+1}} > q_{\mu_\nu}$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{q_{\mu_{\nu+1}}}\operatorname{Re}\left(-\varphi_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\left(g_i\left(t_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\right)\right)\right)=\operatorname{Re}\left(-\varphi_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\left(g^{q_{\mu_{\nu+1}}}\left(t_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\right)\right)\right)\geq$$

$$\geq\operatorname{Re}\left(-\varphi_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\left(u\left(t_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\right)\right)\right)-r\left(t_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\right).$$

Звідси та з (20) одержимо, що

$$0\leq\varepsilon^{q_{\mu_\nu}}\leq\operatorname{Re}\varphi_{p_{q_{\mu_\nu}}+1}\left(g^{q_{\mu_\nu}}-g^{q_{\mu_{\nu+1}}}\right)\left(t_{p_{\mu_\nu}+1}\right)\leq\left\|g^{q_{\mu_\nu}}-g^{q_{\mu_{\nu+1}}}\right\|.$$

Оскільки $\lim\limits_{\nu\to\infty}g^{q_{\mu_\nu}}=\lim\limits_{\nu\to\infty}g^{q_{\mu_{\nu+1}}}=g^*$, то звідси отримаємо, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon^{q_{\mu_\nu}}=0$.

Згідно з (20) для кожного $t\in S$

$$\left\|g^{q_{\mu_\nu}}(t)-u(t)\right\|-r(t)\leq\varepsilon^{q_{\mu_\nu}},\ \nu=1,2,\ldots.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $\nu\to\infty$, одержимо, що $\left\|g^*(t)-u(t)\right\|\leq r(t)$, $t\in S$. Це означає, що $g^*\in V\cap D$.

Оскільки $\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g^{q_{\mu_\nu}}(s)-y\right\|-\theta^{q_{\mu_\nu}}\leq\varepsilon^{q_{\mu_\nu}}, \nu=1,2,\ldots$, то, перейшовши в цій нерівності до границі при $\nu\to\infty$ та врахувавши неперервність по g функції $\psi(g)=\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g(s)-y\right\|$, одержимо, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|\leq\lim_{q\to\infty}\theta^q\leq\alpha_a^*(V\cap D)\leq\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^*(s)-y\right\|.$$

Звідси одержимо, що g^* є екстремальним елементом для величини (1) і $\lim\limits_{q\to\infty}\theta^q=\alpha_a^*(V\cap D)$.

Припустимо тепер, що для всіх μ, починаючи з деякого номера,

$$\varepsilon^{q_\mu}=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{q_\mu}(s)-y\right\|-\theta^{q_\mu}=$$

$$=f_{2n+m_{q_\mu}+2}\left(g^{q_\mu}\left(s_{2n+m_{q_\mu}+2}\right)-y_{2n+m_{q_\mu}+2}\right)-\theta^{q_\mu}.$$

Оскільки $\left(\alpha^{q_{\mu+1}};\theta^{q_{\mu+1}}\right)=\left(\alpha_1^{q_{\mu+1}},\ldots,\alpha_n^{q_{\mu+1}},\theta^{q_{\mu+1}}\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (8)-(10) при $q=q_{\mu+1}>q_\mu$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{q_{\mu+1}}\operatorname{Re}\left(-f_{2n+m_{q_\mu}+2}\left(g_i\left(s_{2n+m_{q_\mu}+2}\right)\right)\right)+\theta^{q_{\mu+1}}=$$

$$= \operatorname{Re}\left(-f_{2n+m_{q_\mu}+2}\left(g^{q_{\mu+1}}\left(s_{2n+m_{q_\mu}+2}\right)\right)\right)+\theta^{q_{\mu+1}} \geq$$

$$\geq \operatorname{Re}\left(-f_{2n+m_{q_\mu}+2}\left(y_{2n+m_{q_\mu}+2}\right)\right)= \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{q_\mu}(s)-y\right\|-$$

$$-\operatorname{Re} f_{2n+m_{q_\mu}+2}\left(g^{q_\mu}\left(s_{2n+m_{q_\mu}+2}\right)\right).$$

Тому

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{q_\mu}(s)-y\right\|-\theta^{q_{\mu+1}} \leq$$

$$\leq \operatorname{Re} f_{2n+m_{q_\mu}+2}\left(g^{q_\mu}-g^{q_{\mu+1}}\right)\left(s_{2n+m_{q_\mu}+2}\right)\leq \left\|g^{q_\mu}-g^{q_{\mu+1}}\right\|.$$

Перейшовши у цій нерівності до границі при $\mu \to \infty$, одержимо, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\| \leq \lim_{q\to\infty}\theta^{q} \leq \alpha_a^{*}\left(V \cap D\right). \tag{21}$$

Оскільки в розглядуваному випадку

$$0 \leq \varepsilon^{q_\mu} = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{q_\mu}(s)-y\right\|-\theta^{q_\mu},$$

то, перейшовши в цій нерівності до границі при $\mu \to \infty$, згідно (21) одержимо, що

$$0 \leq \lim_{\mu\to\infty}\varepsilon^{q_\mu} = \lim_{\mu\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{q_\mu}(s)-y\right\|-\lim_{\mu\to\infty}\theta^{q_\mu} =$$

$$= \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\|-\lim_{\mu\to\infty}\theta^{q_\mu} \leq 0.$$

Тому $\lim\limits_{\mu\to\infty}\varepsilon^{q_\mu}=0$. Оскільки $\left\|g^{q_\mu}(t)-u(t)\right\|-r(t)\leq \varepsilon^{q_\mu}$ для всіх $t \in S$, $\mu = 1,2,\ldots$, то звідси одержимо, що $\left\|g^{*}(t)-u(t)\right\|\leq r(t)$ для всіх $t \in S$. Це означає, що $g^{*} \in V \cap D$.

З урахуванням цього і співвідношення (21) робимо висновок, що g^{*} є екстремальним елементом для величини (1) та мають місце співвідношення

$$\lim_{\mu\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{q_\mu}(s)-y\right\| = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\| = \lim_{q\to\infty}\theta^{q} = \alpha_a^{*}\left(V \cap D\right).$$

Оскільки екстремальний елемент g^{*} для величини (1) єдиний, то з проведених вище міркувань випливає, що $\lim\limits_{q\to\infty} g^{q} = g^{*}$ і

$$\lim_{q\to\infty}\theta^{q} = \alpha_a^{*}\left(V \cap D\right) = \lim_{q\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{q}(s)-y\right\| = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\|.$$

Крім того, маємо, що

$$0 \le \lim_{q \to \infty} \varepsilon^q =$$

$$= \lim_{q \to \infty} \max\left\{ \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^q(s) - y \right\| - \theta^q, \max_{t \in S} \left(\left\| g^q(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) \right\} =$$

$$= \max\left\{ \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| - \alpha_a^*(V \cap D), \max_{t \in S} \left(\left\| g^*(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) \right\} = 0,$$

оскільки g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Висновок. У даній роботі для задачі відшукання величини (1) модифіковано метод січної площини. Встановлено збіжність побудованого методу.

Список використаних джерел:

1. Kelly J. E. The "Cutting plane" methods for solving convex programs // SIAM J. – 1960. – 8, №4. – P.703-712.
2. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, №12. – С.1601-1619.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория и конечные методы). – М.: Физматгиз, 1963. – 774 с.

In this article the method of cutting planes is generalized on the case of problem of the best uniform approximation continuous compact-valued maps by finite dimensional Chebyshev space of continuous single-valued maps with additional restriction.

Key words: *the method of cutting planes, the uniform approximation, the compact-valued maps.*

Отримано: 05.06.2008