УДК 519.23

А. В. Атаманюк

Хмельницький національний університет

ПРО ЗАДАЧУ ВИВОЗУ І ДОСТАВКИ ВАНТАЖУ З ЧАСОВИМИ ВІКНАМИ

Розглянуто узагальнення задачі маршрутизації з часовими вікнами – задачу вивозу і доставки вантажу з часовими вікнами. Проводиться порівняльний аналіз таких методів розв'язання поставленої задачі як груповий генетичний алгоритм та евристика адаптивного пошуку відкритої області.

Ключові слова: *задача вивозу і доставки вантажу з часовими вікнами, груповий генетичний алгоритм, евристика адаптивного пошуку відкритої області.*

Вступ. Задача вивозу і доставки вантажу з часовими вікнами є узагальненням задачі маршрутизації з часовими вікнами і тому є NP – складною задачею [1], яка розв'язується за допомогою евристичних алгоритмів.

Постановка проблеми. В даній роботі проводиться порівняльний аналіз методів, які можуть бути застосовані для розв'язання задачі вивозу та доставки вантажу з часовими вікнами.

Виклад основного матеріалу. Математична модель, приведена у джерелі [2], має наступний вигляд.

Випадок задачі вивозу і доставки вантажу містить n вимог та m транспортних засобів. Задача визначена на графі, $P = \{1, \ldots, n\}$ – множина вузлів вивозу, $D = \{n + 1, \ldots, 2n\}$ – множина вузлів доставки. Вимога i зображається коло вузлів i та $i + n$. K – множина всіх транспортних засобів, $\left|K\right| = m$. Один транспортний засіб не міг би обслуговувати всі вимоги; оскільки наприклад може бути заявка, щоб транспортний засіб мав морозильне відділення. K_i – множина транспортних засобів, що можуть обслуговувати вимогу i, та $P_k \subseteq P$ і $D_k \subseteq D$ – підмножини вивозів і доставок відповідно, що можуть обслуговуватися за допомогою транспортного засобу k, так для всіх i та k: $k \in K_i \Leftrightarrow i \in P_k \wedge i \in D_k$. Вимоги називаються особливими (спеціальними), якщо $K_i \neq K$. Визначено, що $N = P \bigcup D$ та $N_k = P_k \bigcup D_k$. Нехай $\tau_k = 2n + k$, $k \in K$ і $\tau'_k = 2n + m + k$, $k \in K$ – вузли, які представляють початковий і кінцевий пункт призначення транспортного засобу k, відповідно. Граф $G = (V, A)$ містить вузли $V = N \bigcup \quad \bigcup \{\tau_1, \ldots, \tau_m\} \bigcup \{\tau'_1, \ldots, \tau'_m\}$ і дуги $A = V \times V$. Для кожного

$\bigcup\{\tau_1,...,\tau_m\}\bigcup\{\tau'_1,...,\tau'_m\}$ і дуги $A = V \times V$. Для кожного транспортного засобу ми маємо підграф $G_k = (V_k, A_k)$, де $V_k = N_k \bigcup\{\tau_k\}\bigcup\{\tau'_k\}$ і $A_k = V_k \times V_k$. Для кожного ребра $(i, j) \in A$ ми призначаємо відстань $d_{ij} \geq 0$ і час подорожі $t_{ij} \geq 0$. Припускається, що відстані та час невід'ємні; $d_{ij} \geq 0$, $t_{ij} \geq 0$ і час задовольняє нерівність трикутника; $t_{ij} \leq t_{il} + t_{lj}$ для всіх $i, j, l \in V$. Припускаємо, що $t_{i,n+i} + s_i > 0$ (це припущення створює видалення підшляхів).

Кожен вузол $i \in V$ має час обслуговування s_i та часове вікно $[a_i, b_i]$. Час обслуговування представляє необхідний час для завантаження та розвантаження і часове вікно визначає, коли повинно розпочатися відвідування окремого місця; відвідування вузла i може відбуватися тільки між часом a_i та b_i. Транспортному засобу дозволяється прибуття до місця призначення до початку часового вікна, але він повинен очікувати доки почнеться часове вікно перед здійсненням відвідування. Для кожного вузла $i \in N$, l_i – це кількість товарів, що повинні бути навантаженні на транспортний засіб у особливому вузлі, $l_i \geq 0$ для $i \in P$ і $l_i = -l_{i-n}$ для $i \in D$. Об'єм завантаженості транспортного засобу $k \in K$ позначається C_k.

В математичній моделі використовуються чотири типи змінних рішення:

– x_{ijk}, $i, j \in V$, $k \in K$ – бінарна змінна, рівна одиниці, якщо ребро між вузлом i та вузлом j використовується за допомогою транспортного засобу k, та нулю у іншому випадку;

– S_{ik}, $i \in V$, $k \in K$ – невід'ємне ціле число, що визначає коли транспортний засіб k починає обслуговування у положенні i;

– L_{ik}, $i \in V$, $k \in K$ – невід'ємне ціле число, тобто верхня границя відносно кількості товарів у транспортному засобі k після обслуговування вузла i;

– S_{ik} та L_{ik} добре визначені тільки тоді, коли транспортний засіб k дійсно відвідав вузол i;

– z_i, $i \in P$ – бінарна змінна, що визначає коли вимога i розміщується в місці збереження вимог; z_i приймає значення одиниці, якщо вимога розміщується в місці збереження вимог, та нуля у протилежному випадку.

Математична модель має вигляд (1):

$$\min \alpha \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ijk} + \beta \sum_{k \in K} \left(S_{\tau'_k, k} - \alpha_{\tau_k} \right) + \gamma \sum_{i \in P} z_i \ , \tag{1}$$

і для неї виконуються наступні умови:

$$\sum_{k \in K_i} \sum_{j \in N_k} x_{ijk} + z_i = 1 \, , \ \forall i \in P \tag{2}$$

$$\sum_{j\in V_k} x_{ijk} - \sum_{j\in V_k} x_{j,n+i,k} = 0,\ \forall k\in K,\ \forall i\in P_k \qquad (3)$$

$$\sum_{j\in V_k \cup \{\tau'_k\}} x_{\tau_k,j,k} = 1,\ \forall k\in K \qquad (4)$$

$$\sum_{i\in D_k \cup \{\tau_k\}} x_{i,\tau'_k,k} = 1,\ \forall k\in K \qquad (5)$$

$$\sum_{i\in V_k} x_{ijk} - \sum_{i\in V_k} x_{jik} = 0,\ \forall k\in K,\ \forall j\in N_k \qquad (6)$$

$$x_{ijk} = 1 \Rightarrow S_{ik} + s_i + t_{ij} \le S_{jk},\ \forall k\in K,\ \forall (i,j)\in A_k \qquad (7)$$

$$a_i \le S_{ik} \le b_i,\ \forall k\in K,\ \forall i\in V_k \qquad (8)$$

$$S_{ik} \le S_{n+i,k},\ \forall k\in K,\ \forall i\in P_k \qquad (9)$$

$$x_{ijk} = 1 \Rightarrow L_{ik} + l_j \le L_{jk},\ \forall k\in K,\ \forall (i,j)\in A_k \qquad (10)$$

$$L_{ik} \le C_k,\ \forall k\in K,\ \forall i\in V_k \qquad (11)$$

$$L_{\tau_k k} = L_{\tau'_k k} = 0,\ \forall k\in K \qquad (12)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\},\ \forall k\in K,\ \forall (i,j)\in A_k \qquad (13)$$

$$z_i \in \{0,1\},\ \forall i\in P \qquad (14)$$

$$S_{ik} \ge 0,\ \forall k\in K,\ \forall i\in V_k \qquad (15)$$

$$L_{ik} \ge 0,\ \forall k\in K,\ \forall i\in V_k. \qquad (16)$$

Цільова функція мінімізує зважену суму пройденої відстані, суму використаного часу при кожному транспортному засобі, і кількість незапланованих вимог.

З обмеження (2) випливає, що кожне місце вивозу відвідується або, що відповідна вимога розміщується в місці збереження вимог. З обмеження (3) випливає, що місце доставки відвідується, якщо відвідується місце вивозу, і що відвідування виконується тим же транспортним засобом. З обмежень (4) та (5) випливає, що транспортний засіб залишає будь-який початковий пункт і транспортний засіб входить у будь-який кінцевий пункт. З обмеження (6) випливає, що між τ_k та τ'_k створюється впорядкований шлях для кожного $k \in K$.

З обмежень (7) та (8) випливає, що S_{ik} – множина вірна вздовж шляху, та що часові вікна задовольняються. Ці обмеження також створюють недопустимі підшляхи. З обмеження (9) випливає, що кожен вивіз відбувається до попередньої доставки. З обмежень (10)-(12) випливає, що зважена змінна – це коректно множина вздовж шляху, та що обмеження завантаженості транспортного засобу виконуються [2].

Задача вивозу і доставки вантажу з часовими вікнами може розв'язуватись за допомогою евристики адаптивного пошуку відкритої області та групового генетичного алгоритму.

Поняття генетичних алгоритмів вперше було введено Холландом у 1975 році [3].

Розглянемо загальну схему пошуку для групового генетичного алгоритму [4]:

Ініціалізація популяція P;

Доки не (зустрінеться критерій завершення)

– Вибирається пара окремих представників x, y з P як батьків відносно їхнього відповідної цінності (відповідного значення);

– Народжується дві дитини x', y', використовуючи оператор розподілу до x та y з ймовірністю p^{cross};

– Народжується дві модифіковані дитини x'', y'', використовуючи оператор мутації (зміни) до x' та y' відповідно, з ймовірністю p^{mut};

– Вставка x'' та y'' у P, і по черзі переміщення двох гірших окремих представників з P;

Повертає найкращого окремого представника з P як рішення.

Початкова популяція породжується вводячи евристики вставки [4].

Адаптація описаної схеми генетичного пошуку до задачі містить наступні компоненти алгоритму [4]:

– генетичне кодування, тобто шлях рішень для задачі вивозу і доставки вантажу з часовими вікнами зображається за допомогою хромосомів (ланцюгів);

– генетичні оператори: відбору, розподілу та мутації;

– евристики вставки, тобто залежна евристична процедура, за допомогою якої працює груповий генетичний алгоритм, щоб породити початкову популяцію та щоб виготовити реального нащадка.

У *таблиці 1* [2, 4] наводяться результати для порівняння групового генетичного алгоритму та евристики адаптивного пошуку відкритої області.

Таблиця 1

Порівняння групового генетичного алгоритму та алгоритму евристики адаптивного пошуку відкритої області для 100 споживачів

Приклади	К-сть трансп. засобів	Груповий генетичний алгоритм			Евристики адаптивного пошуку відкритої області		
		Найкр. заг. відстань	Сер. заг. відстань	Сер. час (с.)	Сер. рішення	Найкраще рішення	Сер. час (с.)
1	2	3	4	5	6	7	8
LR101	19	1650.80	1650.80	67.00	1650.80	1650.80	40
LR102	17	1487.57	1488.74	89.53	1487.57	1487.57	47
LR103	13	1292.68	1292.67	82.87	1292.68	1292.68	45
LR104	9	1013.99	1037.16	136.83	1013.39	1013.39	26
LR105	14	1377.11	1377.11	70.97	1377.11	1377.11	40
LR106	12	1252.62	1252.63	81.33	1252.62	1252.62	41
LR107	10	1111.31	1112.26	95.67	1111.31	1111.31	44
LR108	9	968.97	969.02	102.50	968.97	968.97	25

Продовження таблиці 1

1	2	3	4	5	6	7	8
LR109	11	1208.96	1233.99	103.80	1208.96	1208.96	41
LR110	10	1165.83	1176.20	142.13	1159.35	1159.35	35
LR111	10	1109.90	1113.60	105.53	1108.90	1108.90	44
LR112	9	1003.77	1040.34	168.70	1003.77	1003.77	27
LC101	10	828.94	828.94	55.03	828.94	828.94	43
LC102	10	828.94	828.94	68.67	828.94	828.94	44
LC103	9	827.86	827.86	85.33	1037.77	1035.35	49
LC104	9	818.60	818.67	139.90	860.15	860.01	63
LC105	10	828.94	828.94	58.33	828.94	828.94	41
LC106	10	828.94	828.94	63.60	828.94	828.94	42
LC107	10	828.94	828.94	65.97	828.94	828.94	43
LC108	10	826.44	826.44	81.00	826.44	826.44	46
LC109	9	827.82	827.82	118.10	1000.60	1000.60	35
LRC101	14	1703.21	1704.05	76.07	1708.80	1708.80	38
LRC102	12	1558.07	1559.65	95.53	1558.07	1558.07	41
LRC103	11	1258.74	1260.45	92.80	1258.74	1258.74	43
LRC104	10	1128.40	1129.32	108.23	1128.40	1128.40	52
LRC105	13	1637.62	1639.87	88.17	1637.62	1637.62	42
LRC106	11	1424.73	1441.82	95.63	1424.73	1424.73	42
LRC107	11	1230.14	1237.91	97.73	1230.14	1230.14	43
LRC108	10	1147.43	1159.82	111.67	1147.43	1147.43	25
LR201	4	1253.23	1260.41	103.43	1253.23	1253.23	69
LR202	3	1197.67	1255.78	234.50	1197.67	1197.67	60
LR203	3	952.29	962.82	381.50	949.40	949.40	98
LR204	2	849.05	879.01	486.50	849.05	849.05	181
LR205	3	1054.02	1078.84	166.37	1054.02	1054.02	58
LR206	3	931.63	941.67	259.03	931.63	931.63	86
LR207	2	903.60	927.58	418.77	903.06	903.06	187
LR208	2	736.00	760.95	531.07	734.85	734.85	285
LR209	3	932.43	955.96	236.90	930.59	930.59	73
LR210	3	964.22	972.34	268.13	964.22	964.22	77
LR211	2	888.15	897.03	478.53	911.52	911.52	126
LC201	3	591.56	591.56	59.27	591.56	591.56	36
LC202	3	591.56	591.56	115.50	591.56	591.56	59
LC203	3	591.17	519.17	191.67	591.17	591.17	81
LC204	3	590.60	620.38	346.13	590.60	590.60	141
LC205	3	588.88	588.88	94.07	588.88	588.88	48
LC206	3	588.49	588.49	124.20	588.49	588.49	60
LC207	3	588.29	588.35	137.03	588.29	588.29	62
LC208	3	588.32	588.75	141.93	588.32	588.32	69
LRC201	4	1407.21	1438.12	101.47	1406.94	1406.94	38
LRC202	3	1358.25	1400.11	161.70	1387.74	1374.79	82
LRC203	3	1093.89	114.40	268.17	1089.07	1089.07	69
LRC204	3	818.66	838.55	457.30	818.66	818.66	173
LRC205	4	1302.20	1305.37	147.20	1302.20	1302.20	75
LRC206	3	1159.03	1176.90	139.57	1337.75	1159.03	48
LRC207	3	1062.05	1070.56	218.97	1062.05	1062.05	66
LRC208	3	852.76	882.76	322.13	852.76	852.76	88

Висновок. Порівнюючи результати, можна прийти до висновку, що алгоритм евристики адаптивного пошуку відкритої області дає кращий результат за середній час виконання.

Список використаних джерел:

1. Гери М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. Stefan Ropke, David Pisinger. An Adaptive Large Neighborhood Search Heuristic for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows, 2005. – P.1-30.
3. Holland JH. (1975) Adaptation in natural und artificial systems – An introductory analysis with applications to biology, control, und artificial intelligence // The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI.
4. Giselher Pankratz. A Grouping Genetic Algorithm for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows // OR Spectrum (2005) 27. – P.21-41.

The author examined a generalization of the Vehicle Routing Problem with Time Windows – Pickup and Delivery Problem with Time Windows. The comparative analysis of methods to solve the problem is fulfilled.

Key words: *pickup and delivery problem with time windows, grouping genetic algorithm, an adaptive large neighbourhood search heuristic.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 519.6

М. Я. Бартіш, О. В. Ковальчук, Л. В. Николайчук

Львівський національний університет імені Івана Франка

ТРИКРОКОВИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується новий підхід до побудови методів розв’язування нелінійних систем. Даний метод базується на методі спуску та деякій модифікації методу Ньютона. Досліджено швидкість збіжності. Проведено чисельні експерименти на тестових задачах.

Ключові слова: *задача про найменші квадрати, метод Ньютона, градієнтний метод, система нелінійних рівнянь.*

Вступ. Математичне моделювання складних фізичних процесів дуже часто потребує розв’язування систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для успішного розв’язування широкого класу подібних задач нема, тому актуальною є проблема побудови нових ефективних алгоритмів. Пропонується ітераційний метод для розв’язування систем нелінійних рівнянь, який не потребує аналітичного задання матриці Якобі і більш повно на кожному кроці використовується інформація про функцію. Проведено теоретичні та практичні дослідження даного методу.

