

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ФІЗИЧНОГО ПРОСТОРУ В ЗАДАЧАХ ГЕОФІЗИКИ

У статті досліджений первинний математичний об'єкт узагальненої геометрії, названий – рівнянням Гаусової лінії. Рівняння об'єднує первинні об'єкти диференціальної, інтегральної і геометрії Евкліда. Дослідження проводиться методами обчислення скінчено-малих величин-елементів. Установлені властивості цього рівняння свідчать про якісну зміну лінії при розгляді різних початкових умов – кроку дискретизації по часу і по простору. Встановлено, що з врахуванням теорії енергетичного метаморфізму, що об'єднує закони збереження, зміни, перенесення і упакування енергії рівняння лінії моделює стохастичний рух.

Ключові слова: рівняння узагальненої геометрії; закони збереження енергії; закони переносу енергії.

Вступ

Аналіз існуючих методологічних підходів до розв'язування задач геофізики при побудові математичних моделей приводить до побудови узагальненої геометрії фізичного простору. Зокрема, вирішення аналітичних завдань у сейсморозвідці ґрунтується на використанні диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, що моделюють поступальні, еліптичні, параболічні, гіперболічні і стохастичні види переміщень елементів геологічного середовища під час дії на нього одиничного імпульсу. Фізичні параметри елементів геологічного середовища (ГС) визначають геометричні параметри пружної хвилі і променя (напрямку) її поширення. Хвиля і промінь є геометричним напрямом у півпросторі неоднорідного суцільного середовища з геостатичною (енергетичною) анізотропією. При цьому справедливе наступне:

- по-перше, метрична геометрія вказаного середовища приймається Евклідовою;
- по-друге, лінія променя вглиб середовища представляється кінематичною параболою без врахування впливу фізичних параметрів ГС;
- по-третє, хвиля є плоскою, зі загасаючою амплітудою і не зв'язаною з нею фазою (просторово-часова характеристика);
- по-четверте, рух елементів середовища моделюється коливаннями типу загасаючого осцилятора: з властивими для сейсмоприймача постійними фізичними параметрами; в той час як сам датчик управляється енергією сигналу відбитої хвилі, несе в собі нерозшифровану інформацію про фізичні параметри кожного елемента геологічного середовища, яка на сьогодні не аналізується;
- по-п'яте, диференціальне і інтегро-диференціальне рівняння розв'язуються з допомогою відомих кінцево-різницевої схем і метод дає неоднозначний розв'язок;
- по-шосте, вибраний функціонал регуляризації модельних параметрів хвильового поля при підгонці до експериментальних параметрів поля не збільшує розуміння фізики поставленого завдання.

Практика аналізу даних сейсморозвідки при побудові стратиграфії неоднорідностей у геологічному середовищі все частіше задає питання, пов'язані з визначенням фізичних параметрів елементів середовища з метою пошуку вуглеводневих покладів. Визначення фізичних параметрів геологічного середовища істотно знижує витрати на геологорозвідувальні роботи, пов'язані з бурінням глибоких свердловин на нафту і газ, оскільки дозволяє більш точно визначити місце, конструкцію і технологію буріння пошуково-розвідувальних свердловин, а головне, здійснювати успішніший пошук вуглеводнів.

Проблема перед геофізичною наукою стоїть наступна: визначення фізичних параметрів елементів геологічного середовища. Наприклад, обернена динамічна задача сейсморозвідки (ОДЗС) залишається до кінця невіршеною і є на сьогодні некоректно вирішуваною задачею.

Розв'язання ОДЗС полягає у вирішенні ряду ключових методологічних завдань:

- по-перше, визначення реальної геометрії неоднорідного суцільного середовища;
- по-друге, пов'язання геометричних параметрів досліджуваного середовища із загальним фізичним параметром цього середовища – енергетичною анізотропією;
- по-третє, вибору (розробки при необхідності) методу аналізу хвильового поля, що дозволяє визначити з параметрів хвильового поля значення фізичних параметрів середовища;
- по-четверте, вибору (розробки при необхідності) методу розгортання загального геофізичного параметра – енергії в інший фізичний параметр досліджуваного середовища (густину, пружні модулі, температуру, тиск, заряд та ін.).

У даній статті розглядаються способи вирішення першого і другого завдання: розробка і дослідження математичного об'єкту – рівняння загальної геометрії фізичного середовища (необхідна умова) і пов'язання загального фізичного параметра пружного середовища з геометричними параметрами цього середовища (достатня умова).

**§ 1. Необхідні співвідношення
узагальної геометрії**

Розглянемо основні методологічні принципи узагальної геометрії на основі статті [Карпенко, Стародуб, 2006]. Ідея загальної геометрії випливає із загальної концепції енергоінформаційного аналізу руху матеріальних систем, в яку входить принцип про існування єдності подібності та відмінності макро- і мікрорухів цих систем, на основі якого розглядається модель загальної геометрії. Принцип існування єдності подібності та відмінності рухів макро- і мікроматеріальних систем можна представити в алгебраїчному вигляді подібності мікро- і макрозмін

$$\frac{d}{d\varphi} D = \int D d\varphi, \quad (1)$$

де D – багатопараметрична функція змістовної суті руху (енергія); φ – параметр формальної суті руху (фаза, простір, час і т. ін.).

Залежність у формулі (1) можна представити у вигляді рис. 1.

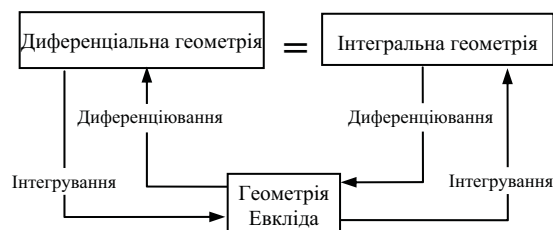


Рис. 1. Структура концепції загальної геометрії

Тобто поряд з диференціальною геометрією руху і геометрією руху Евкліда повинна використовуватися інтегральна геометрія руху. Схема на рис. 1 відображає зв'язок трьох геометрій мікро-, мезо- і макрорівнів руху матеріальних систем. Слід зазначити, що рух макросистем описується подвійним інтегруванням співвідношень диференціальної геометрії, а мікросистем – подвійним диференціюванням інтегральних співвідношень. Ідея про інтегральне представлення руху приводить до метрик видів: м·с, Дж·с, Дж·м та ін., з яких виникають метрики понять: частоти – с⁻¹ і хвильового числа – м⁻¹.

Описане ґрунтується на наступних концептуальних уявленнях:

Ідея диференціальної геометрії – безмежно мале наближення двох точок у просторі.

Ідея інтегральної геометрії – скінчено-мале рознесення двох точок у просторі по довільній лінії.

Ідея геометрії Евкліда – дві точки, рознесені у просторі, з'єднуються лише однією прямою лінією.

Ідея узагальної геометрії – дві точки рознесені і наближені у просторі на мінімальну відстань.

Зв'язок між диференціальною і геометрією Евкліда розглядає теорія скінчено-різницевої схем [Самарський, 1977], зокрема, ці задачі розв'язуються методом скінчених елементів.

Використовуючи вказану ідею, запишемо праву і ліву частини формули (1) скінченими елементами наступним чином.

В основу зв'язку диференціальної геометрії руху [Владимиров, 1971] з геометрією Евкліда покладено співвідношення виду

$$\frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{dx}{dt} \quad \text{або} \quad x = x_0 + \frac{dx}{dt}(t - t_0), \quad (2)$$

а в основу зв'язку геометрії Евкліда з інтегральною геометрією руху – співвідношення

$$\frac{1}{2}(x + x_0)(t - t_0) = \int x dt$$

або

$$x = -x_0 + \frac{2}{(t - t_0)} \int x dt, \quad (3)$$

де $(t - t_0)$, $(x - x_0)$, $(x + x_0)$ – часові, диференціальні та інтегральні співвідношення лінеаризації, визначені геометрією Евкліда у Декартовій системі координат. Кожне з рівнянь (3) являє собою рівняння руху гіперболічного типу. Спільне розв'язання цих рівнянь досліджуємо класичним методом на основі системи рівнянь виду

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{dx}{dt}(t - t_0) \\ x = -x_0 + \frac{2}{(t - t_0)} \int x dt \end{cases} \quad (4)$$

за заданих крайових умов: 1) x_0, x_1, t_0, t_1 ; 2)

x_0, t_0 .

Розглянемо розв'язання системи рівнянь (4) для двох випадків крайових умов.

Випадок 1): x_0, x_1, t_0, t_1 .

$$2\omega_0 \cdot \int x(t) dt + \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x_1 = 0 -$$

виключення x_0 , збільшення x (5)

$$2\omega_0 \cdot \int x(t) dt - \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x_1 = 0 -$$

виключення x_0 , зменшення x (5.1)

$$2\omega_0 \cdot \int x(t) dt + \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x_0 = 0 -$$

виключення x_1 , збільшення x (6)

$$2\omega_0 \cdot \int x(t) dt - \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x_0 = 0 -$$

виключення x_1 , зменшення x (6.1)

Випадок 2): x_0, t_0 .

$$2\omega(t) \cdot \int x(t) dt + \frac{1}{\omega(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x_0 = 0 -$$

виключення x , збільшення x ; (7)

$$2\omega(t) \cdot \int x(t) dt - \frac{1}{\omega(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x_0 = 0 -$$

виключення x_1 , зменшення x ; (7.1)

$$2\omega(t) \cdot \int x(t) dt + \frac{1}{\omega(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = 0 -$$

виключення x_0 , збільшення x ; (8)

$$2\omega(t) \cdot \int x(t) dt - \frac{1}{\omega(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = 0 -$$

виключення x_0 зменшення x , (8.1)

де $\omega_0 = 1/(t_1 - t_0)$, $\omega(t) = 1/(t - t_0)$ – постійний і змінний частотні параметри процесу.

Розглянемо випадок 1): x_0, x_1, t_0, t_1 .

Розв'язання рівняння (5) – відносно x_1 .

Запишемо рівняння (5) у вигляді

$$2\omega_0^2 \cdot \int x(t) dt + \dot{x}(t) = C_1, \quad (9)$$

де $C_1 = 2x_1\omega_0$, $\omega_0^2 = 1/(t_1 - t_0)^2$, для рівняння (6) $C_0 = 2x_0 \cdot \omega_0$.

Позначимо: $\{x = \dot{y}, \dot{x} = \ddot{y}, \int x dt = y\}$, і опустимо запис аргументу при $x(t)$, тоді розв'язком рівняння виду

$$\ddot{y} + 2\omega_0^2 \cdot y = C_1, \quad (10)$$

буде функція

$$y(t) = C_1 / 2\omega_0^2 + A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi, \quad (11)$$

де $\varphi = \omega \cdot t$, $\omega = \sqrt{2}\omega_0$.

Оскільки $x = \dot{y}$, то

$$x(t) = -A_1\omega \sin \varphi + A_2\omega \cos \varphi, \quad (12)$$

де постійні A_1, A_2 визначаються з системи рівнянь, складеної для початкових і граничних умов

$$\begin{cases} x_0 = -A_1\omega \sin \varphi_0 + A_2\omega \cos \varphi_0 \\ x_1 = -A_1\omega \sin \varphi_1 + A_2\omega \cos \varphi_1 \end{cases}, \quad (13)$$

звідки маємо

$$A_1 = -\frac{x_0 \cos \varphi_1 - x_1 \cos \varphi_0}{\sin \varphi_1 \cdot \omega \cdot (\cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cdot \text{ctg} \varphi_1)},$$

$$A_2 = \frac{x_0 \sin \varphi_1 - x_1 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_1 \cdot \omega \cdot (\cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cdot \text{ctg} \varphi_1)},$$

де $\varphi_0 = \omega \cdot t_0$, $\varphi_1 = \omega \cdot t_1$.

Маємо еліптичний функціональний зв'язок

між елементами сітки, вочевидь, для аналізу еліптичного вигляду переміщень.

Приклад 1.

На рис. 2 наведені графіки функцій: заданого виду $A(t) = A(\text{var}) \cdot \sin[\omega(\text{var}) \cdot t]$, де var – випадкове число, і $x(t)$ за рівнянням (12).

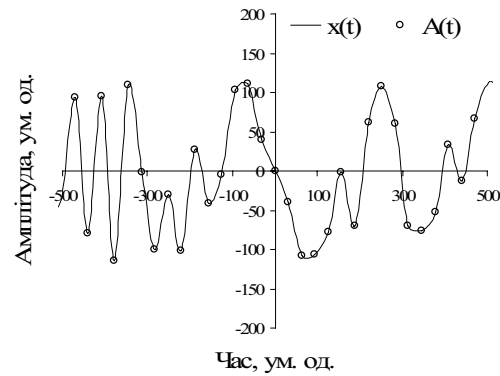


Рис. 2. Оцінка на адекватність моделі (формула (12)) заданих, яка є точною на кінцях інтервалів

Розв'язання рівняння (6) – відносно x_0 .

Запишемо рівняння (6) у вигляді

$$2\omega_0^2 \cdot \int x(t) dt - \dot{x}(t) = C_0, \quad (14)$$

де $C_0 = 2x_0 \cdot \omega_0$, $\omega_0^2 = 1/(t_1 - t_0)^2$, для рівняння (5.1) $C_1 = 2x_1 \cdot \omega_0$.

Введемо позначення і опустимо запис аргументу при $x(t)$: $\{x = \dot{y}, \dot{x} = \ddot{y}, \int x dt = y\}$, тоді розв'язком рівняння вигляду

$$\ddot{y} - 2\omega_0^2 \cdot y = C_0, \quad (15)$$

буде функція

$$y(t) = C_0 / 2\omega_0^2 + B_1 \text{ch} \varphi + B_2 \text{sh} \varphi, \quad (16)$$

де $\varphi = \omega \cdot t$, $\omega = \sqrt{2}\omega_0$.

Оскільки $x = \dot{y}$, то

$$x(t) = B_1\omega \text{sh} \varphi + B_2\omega \text{ch} \varphi, \quad (17)$$

де постійні B_1 і B_2 визначаються з системи рівнянь, складеної для початкових і граничних умов

$$\begin{cases} x_0 = B_1\omega \text{sh} \varphi_0 + B_2\omega \text{ch} \varphi_0 \\ x_1 = B_1\omega \text{sh} \varphi_1 + B_2\omega \text{ch} \varphi_1 \end{cases}, \quad (18)$$

звідки маємо

$$B_1 = -\frac{x_0 \text{ch} \varphi_1 - x_1 \text{ch} \varphi_0}{\text{sh} \varphi_1 \cdot \omega \cdot (\text{ch} \varphi_0 - \text{sh} \varphi_0 \cdot \text{cth} \varphi_1)},$$

$$B_2 = \frac{x_0 \text{sh} \varphi_1 - x_1 \text{sh} \varphi_0}{\text{sh} \varphi_1 \cdot \omega \cdot (\text{ch} \varphi_0 - \text{sh} \varphi_0 \cdot \text{cth} \varphi_1)},$$

де $\varphi_0 = \omega \cdot t_0$, $\omega = \sqrt{2}\omega_0$, $\varphi_1 = \omega_0 \cdot t_1$.

Маємо гіперболічний функціональний зв'язок між елементами сітки для аналізу еліптичного вигляду переміщень.

Аналіз розв'язків системи рівнянь (4) відносно x_0 і x_1 показує, що загальна геометрія є або еліптичною, або гіперболічною геометрією: 1) залежно від вибору відліку; 2) залежно від знаку похідної, тобто похідна додатня – загальна геометрія еліптична, похідна від'ємна – загальна геометрія гіперболічна.

Залежно від $\omega_0^2 = 1/(t_1 - t_0)^2 \rightarrow 0$, тобто $(t_1 - t_0) \rightarrow \infty$, рівняння (5) і (6) приводять до єдиного розв'язку геометрії Евкліда виду $\dot{y}(t) = x(t) = C_2$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. В інтегральній геометрії маємо – $y(t) = C_1 + C_2 t$, в диференціальній геометрії – $\ddot{y}(t) = 0$.

Розглянемо випадок 2): x_0, t_0 .

Розв'язання рівнянь (7) відносно x_0 .

Використовуючи позначення для розв'язку рівняння (9) і опустивши запис аргументу для $y(t)$, рівняння (15) запишемо у вигляді

$$\ddot{y} - 2\omega_0^2(t) \cdot y = C_0(t), \quad (19)$$

де $C_0(t) = -2x_0 \cdot \omega_0(t)$, $\omega_0^2(t) = 1/(t - t_0)^2$.

Загальним розв'язком (19) буде функція

$$y(t) = B_1(t)ch\varphi(t) + B_2(t)sh\varphi(t), \quad (20)$$

де $\varphi(t) = \omega_0(t) \cdot t$ (далі φ).

Коефіцієнти $B_1(t)$ і $B_2(t)$ визначаємо методом варіації постійних з системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 = \dot{B}_1(t)\dot{\varphi}ch\varphi + \dot{B}_2(t)\dot{\varphi}sh\varphi \\ C_0(t) = \dot{B}_1(t)\dot{\varphi}^2 sh\varphi + \dot{B}_2(t)\dot{\varphi}^2 ch\varphi \end{cases} \quad (21)$$

Отримуємо коефіцієнти:

$$\square B_1(t) = -C_0(t) \cdot sh\varphi \cdot \dot{\varphi}^{-2};$$

$$\square B_2(t) = C_0(t) \cdot ch\varphi \cdot \dot{\varphi}^{-2};$$

$$B_1(t) = -\int C_0(t) \cdot sh\varphi \cdot \dot{\varphi}^{-2} dt;$$

$$B_2(t) = \int C_0(t) \cdot ch\varphi \cdot \dot{\varphi}^{-2} dt, \quad (21)$$

де $\dot{\varphi}(t) = -\omega_0(t) + t \cdot d\omega_0(t) / dt$.

Оскільки $x = \dot{y}$, то з рівняння (20) знаходимо

$$\begin{aligned} x(t) &= \dot{B}_1(t) \cdot \dot{\varphi} \cdot ch\varphi + B_1(t) \cdot \dot{\varphi} \cdot sh\varphi + \\ &+ \dot{B}_2(t) \cdot \dot{\varphi} \cdot sh\varphi + B_2(t) \cdot \dot{\varphi} \cdot ch\varphi = \\ &= \dot{\varphi} \cdot [B_1(t) \cdot sh\varphi + B_2(t) \cdot ch\varphi]. \end{aligned} \quad (22)$$

Для рівняння (7) гіперболічні функції замінюються на тригонометричні.

Розв'язок рівнянь (8) (див. [Камке, 1971] – 2.75, 2.162)

$$2\omega(t) \cdot \int x(t)dt + \frac{1}{\omega(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = 0, \quad (23)$$

або у вигляді

$$\ddot{y}(t) - 2 \cdot \omega(t) \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot \omega(t)^2 \cdot y(t) = 0, \quad (24)$$

де $y(t) = \int x dt$, $\omega(t) = 1/(t - t_0)$.

1. Якщо $\omega(t) = +\omega_0 = const$ – дійсні числа, тобто має місце (аналіз руху від значення x_0 на його збільшення із збільшенням часу) постійний крок часової сітки, то рівняння (24) є рівнянням наростаючих вільних коливань, яке допускає розв'язок, за початкових умов $x(0) = x_0$ і $\dot{x}(0) = V_0$ залежно від параметра

$\lambda / 2 = \pm \omega_0$ у виді

$$y(t) = e^{\omega_0 t} [C_1 \cos(\pm \omega_0 t) + C_2 \sin(\pm \omega_0 t)]. \quad (25.1)$$

1.1 Якщо $\omega(t) = -\omega_0 = const$, тобто має місце (аналіз руху від значення на його зменшення із збільшенням часу) постійний крок тимчасової сітки, то рівняння (24) є рівнянням загасаючих вільних коливань, яке допускає розв'язок за початкових умов $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = V_0$ залежно від параметра $\lambda / 2 = \pm \omega_0$, у вигляді [Карпенко, 2000б]

$$y(t) = e^{-\omega_0 t} [C_1 \cos(\pm \omega_0 t) + C_2 \sin(\pm \omega_0 t)]. \quad (25.2)$$

2. Якщо $\omega(t) = +var$ – збільшення значення x від x_0 із збільшенням часу, тобто має місце змінний крок тимчасової сітки, то рівняння (24) має розв'язок у вигляді ([Карпенко, Стародуб, 2006] див. 2.162)

$$y(t) = \int x dt = C_1 \Delta t^2 + C_2 \Delta t, \quad (26)$$

де $\Delta t = t - t_0$.

У роботі [Камке, 1971] (див. 2.75) в аналогічному вигляді $y(t) = \int x dt = C_1 \Delta t^2 + C_2 \Delta t$, т.п., маємо параболічний вигляд переміщення.

Якщо x і t – координата і час, то за заданих початкових умов: $x(0) = x_0$, функція (26) представляється у вигляді:

$$\int x(t)dt = \frac{V_0}{2} \Delta t^2 + x_0 \Delta t - \text{для інтегральної геометрії (м/с; Дж/с і т.п.)}, \quad (27.1)$$

$$x(t) = V_0 \cdot \Delta t + x_0 - \text{для геометрії Евкліда (м; Дж і т.п.)}, \quad (27.2)$$

$$\dot{x}(t) = V_0 - \text{для диференціальної геометрії (м/с; Дж/с і т.п.)} \quad (27.3)$$

2.1 Якщо $\omega(t) = -var$ – зменшення значення x від x_0 із збільшенням часу, тобто має місце змінний крок тимчасової сітки, то рівняння (24) має розв'язок у вигляді ([Карпенко,

Стародуб, 2006] див. 2.162)

$$y(t) = \int x dt = C_1 \Delta t^{\frac{1}{2}(-1+j\sqrt{7})} + C_2 \Delta t^{\frac{1}{2}(-1-j\sqrt{7})} \quad (28)$$

або ([Камке, 1971] див. 2.75) у вигляді

$$y(t) = \Delta t^{\frac{1}{2}} \cdot \left[C_1 \cdot \text{Cos} \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \ln \Delta t \right) + C_2 \cdot \text{Sin} \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \ln \Delta t \right) \right].$$

Маємо еліптичний і гіперболічний вигляд переміщення.

Висновки – § 1.

1. Функції (11), (16), (20), (25), (26), (28) утворюють рівняння узагальненої геометрії для різних параметрів сітки, на якій розглядається зміна в часі величини $x(t)$:

(11) – еліптичне..... D_{Ω} ;

(16) і (20) – гіперболічне..... D_c ;

(25) – гіперболічне і еліптичне;

(26) – параболічне..... D_{φ} ;

(27) – поступальне..... D_- ;

(28) - еліптичне і гіперболічне;

Не вистачає стохастичного закону переміщення

..... D_{\sim} .

2. Запропонована концепція узагальненої геометрії дозволяє моделювати сигнал $x(t)$ скінченими різницями, зв'язуючи при цьому представлені вище функціональні залежності координат сигналу на макро- і мікрорівнях. При цьому кінематичний аналіз дозволяє вирішувати завдання ідентифікації математичного сигналу з його фізичним змістом.

Приклад 2.

Вважатимемо, що після дії відомого імпульсного збурення $h(t)$ на вході динамічної системи заданий реальний сигнал – $x(t)$, що реєструється приладом на її виході. Сигнал за умов $\{x = \dot{y}, \dot{x} = \ddot{y}, \int x dt = y\}$ задовольняє диференціальному рівнянню виду

$$\ddot{y}(t) + f(t) \cdot \dot{y}(t) + g(t) \cdot y(t) = h(t), \quad (П1)$$

де невідомі, внутрішньо зв'язані певним чином функції $f(t), g(t)$ – визначаються фізичними параметрами динамічної системи, що здійснює загасаючі коливання. Функції $f(t), g(t)$ підлягають визначенню.

Розглядаючи, в ідеальному варіанті при $\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) = 0$, інформаційну модель ідентифікації кінематичного (теоретичного – $\tilde{y}(t)$) представлення (у вигляді рівняння узагальненої геометрії – як додаткового інструменту для аналізу) з динамічним (реальним) сигналом $y(t)$, заданим у вигляді

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 2 \cdot \omega(t) \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot \omega(t)^2 \cdot \tilde{y}(t) =, \quad (П2) \\ = \ddot{y}(t) + f(t) \cdot \dot{y}(t) + g(t) \cdot y(t) = h(t) \end{aligned}$$

де права частина рівняння є моделлю збурення,

ліва – моделлю екстраполяції з вибором кроку по часу, розв'язується рівняння вигляду

$$\begin{aligned} [\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)] + [2 \cdot \omega(t) - f(t)] \cdot \dot{y}(t) + \\ + [2 \cdot \omega(t)^2 - g(t)] \cdot y(t) = 0 \end{aligned} \quad (П3)$$

або, оскільки досягається $\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) \rightarrow 0$, виду

$$\dot{y}(t) = - \left\{ \frac{2 \cdot \omega(t)^2 - g(t)}{2 \cdot \omega(t) - f(t)} \right\} \cdot y(t) = -F(t) \cdot y(t), \quad (П3.1)$$

Розв'язком рівняння (П3.1) є функції $x(t)$

$$x(t) = -F(t) \cdot \int x(t) dt, \quad (П3.2)$$

для $y(t)$

$$y(t) = - \int F(t) * y(t) dt, \quad (П3.2)$$

де $F(t)$ – частотна перехідна функція динамічної системи, що визначає частотний діапазон коливаль, $x(t)$ – вихідний сигнал.

Враховуючи (П3.1), (П3.2), здійснюється нормування функції $F(t) \rightarrow 1$.

Для $\Delta t \rightarrow \infty$, тобто для нульових частот, функція має границю $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = g/f$.

Для $\Delta t \rightarrow 0$, тобто для нескінченно-великих частот, функція має границю $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \rightarrow \tilde{y}$,

$$\text{для якої } \tilde{y} = \sqrt{y_0 y_1} \cdot \exp(\pm j \sqrt{y_1 / y_0 - 1}),$$

де y_0, y_1 – початкове і кінцеве значення граничних умов.

У представленні виду

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -F(t) \quad (П4)$$

нормування можна досліджувати за амплітудно-фазовим портретом траєкторії.

В енергетичному вигляді (П4) має наступний вигляд (якщо параметр y – координата, t – час)

$$\frac{\dot{y}^2(t)}{y^2(t)} = F^2(t) \Rightarrow \frac{K}{U} = \psi_3, \quad (П5)$$

де K, U, ψ_3 – кінетична (енергія, розподілена в часі), потенціальна (енергія, розподілена в просторі) енергії і функція (фаза) енергетичного метаморфізму третього роду [Карпенко, 2000б] відповідно.

Розглядаючи спостережуваний сигнал у спрощеному вигляді (теоретичному контексті) $x(t) = x_0 \exp(-t) \cdot \text{sint}$, отримаємо співвідношення, які приймемо за аксіому

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{x(t)}{\int x(t) dt} = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = -F(t). \quad (П6)$$

З нього випливає функціональний зв'язок у вигляді

$$x^2(t) = \dot{x}(t) \cdot \int x(t) dt. \quad (П7)$$

У роботах [Карпенко, 2000а, 2000б; Дудля та ін., 2005] представлені теоретичні і експери-

ментальні результати досліджень міженергетичних співвідношень у суцільних середовищах, у яких для абсолютно-пружних властивостей (фізична точка середовища передає енергію без втрат: $\psi^2 = 1$) має місце таке міженергетичне співвідношення між повною, кінетичною і потенційною енергіями

$$E^2 = K \cdot U \cdot \psi^2.$$

Рівняння (П7) є важливим додатковим співвідношенням загальної геометрії (додатковим співвідношенням для (4)). Рівняння (П7), будучи додатковим, виконує роль достатності того, що необхідні співвідношення загальної геометрії (4) відображують загальні міженергетичні співвідношення – **закони: збереження, переносу, зміни і упакування енергії.**

§ 2. Достатні співвідношення узагальненої геометрії

Достатність співвідношень для побудови рівняння узагальненої геометрії розглядається з точки зору повної ідентифікації геометричних (кінематичних) з фізичними (динамічними) параметрами руху матеріальних систем.

Для забезпечення цього у співвідношеннях загальної геометрії необхідно виконати операцію узагальнення, аналогічну для узагальнення всіх законів міженергетичних співвідношень у єдине рівняння, яке викладене в роботі [Карпенко, 2000a].

З цією метою перейдемо до енергетичних параметрів у співвідношеннях (4). Означимо їх. Функція енергетичної фази – $\varphi \equiv t$, $x \equiv E$ – повна енергія системи.

Тоді необхідні співвідношення загальної геометрії матимуть вигляд:

основне рівняння диференціальної геометрії –

$$\frac{dE}{d\varphi} = \frac{E - E_0}{\varphi - \varphi_0}, \quad (29.1)$$

основне рівняння інтегральної геометрії

$$\int Ed\varphi = \frac{1}{2}(E + E_0)(\varphi - \varphi_0). \quad (29.2)$$

Відповідно до рівняння (1) з [Карпенко, 2000a] (як рівняння, що узагальнює всі міженергетичні співвідношення – закони) для абсолютно пружного в енергетичному відношенні процесу $\psi^2 = 1$ (кожна точка пружного простору пропускає енергію без її поглинання) складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \int Ed\varphi + \frac{dE}{d\varphi} = \xi \\ \int Ed\varphi \cdot \frac{dE}{d\varphi} = \psi^2 \cdot \xi^2 \end{cases}, \quad (30)$$

де

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(E + E_0)(\varphi - \varphi_0) + \frac{E - E_0}{\varphi - \varphi_0} \\ \psi^2 \cdot \xi^2 &= \frac{1}{2}(E^2 - E_0^2) \end{aligned} \right\} -$$

корені рівняння (1) з [Карпенко, 2000a]:

$$\dot{V} - \xi \cdot \dot{\Delta} + \psi^2 \cdot \xi^2 = 0, \quad \text{а саме: } \dot{\Delta}_1 = \int Ed\varphi,$$

$$\dot{\Delta}_2 = \frac{dE}{d\varphi}, \quad \psi - \text{функція енергетичного мета-}$$

морфізму (першого роду – зміна енергії $\psi_1 = K - U = L$ – функція Лагранжа; другого роду – переносу енергії $\psi_2 = K \cdot U / E^2$ – функція від інтеграла Пойнтінга; третього роду – упакування енергії $\psi_3 = K / U$, де $E = K + U$ – повна, кінетична і потенційні енергії відповідно).

Систему рівнянь (30) можна представити одним рівнянням у квадратурах, яке аналогічне рівнянню (1) з [Карпенко, 2000a] у виді

$$\psi^2 \cdot \left[\frac{1}{2}(E + E_0)(\varphi - \varphi_0) + \frac{E - E_0}{\varphi - \varphi_0} \right]^2 = \frac{1}{2}(E^2 - E_0^2) \quad (31.1)$$

або

$$\psi^2 \left(\frac{1}{2} \cdot J \cdot \Delta\varphi^2 + D \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot D \cdot \Delta\varphi^2, \quad (31.2)$$

де $D = E - E_0 = dE$ – диференціальний рух, як зміна фізичного параметра, $J = E + E_0 = 2 \int dE$ – інтегральний рух, зміна фізичного параметра – $d\varphi = \Delta\varphi = (\varphi - \varphi_0)$.

Рівняння (31) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{D}{J} \right)^2 + d\varphi^2 \left(\frac{D}{J} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2\psi^2} \right) + \frac{d\varphi^4}{4} = 0, \quad (32)$$

воно виконується за двома визначеннями D/J . Звідси маємо наступні розв'язки:

прямий рух

$$\begin{aligned} \frac{D}{J} \Big|_1 &= \frac{1}{2} d\varphi^2 \left[- \left(1 - \frac{1}{2\psi^2} \right) + \frac{1}{\psi} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\psi^2} - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} d\varphi^2 \cdot C_+(\psi) = \frac{E - E_0}{E + E_0} = \frac{dE}{2 \cdot E}, \quad (33.1) \end{aligned}$$

обернений рух

$$\begin{aligned} \frac{D}{J} \Big|_2 &= \frac{1}{2} d\varphi^2 \left[- \left(1 - \frac{1}{2\psi^2} \right) - \frac{1}{\psi} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\psi^2} - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} d\varphi^2 \cdot C_-(\psi) = \frac{E - E_0}{E + E_0} = \frac{dE}{2 \cdot E}, \quad (33.2) \end{aligned}$$

середньо-геометричний рух

$$\frac{D}{J} \Big|_G = \sqrt{\frac{D}{J} \Big|_1 \cdot \frac{D}{J} \Big|_2} = \frac{1}{2} d\varphi^2 \cdot \sqrt{C_+(\psi) \cdot C_-(\psi)} =$$

$$= \frac{1}{2} d\varphi^2 \cdot C_G^2(\psi) = \frac{E - E_0}{E + E_0} = \frac{dE}{2 \cdot E}, \quad (33.3)$$

середньо-алгебраїчний рух

$$\left. \frac{D}{J} \right|_A = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{D}{J} \right|_1 + \left. \frac{D}{J} \right|_2 \right) = \frac{1}{2} d\varphi^2 C_A^2(\psi) = \frac{E - E_0}{E + E_0} = \frac{dE}{2E}, \quad (33.4)$$

де $C_G^2(\psi)$ – середньо-геометричне значення для всіх ψ ;

$$C_G^2(\psi) = \sqrt{C_-(\psi) \cdot C_+(\psi)} = \sqrt{\left[-\left(1 - \frac{1}{2\psi^2}\right) - \frac{1}{\psi} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\psi^2} - 1} \right] \times \left[-\left(1 - \frac{1}{2\psi^2}\right) + \frac{1}{\psi} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\psi^2} - 1} \right]} = \mp 1,$$

$$C_A^2(\psi) = \frac{1}{2} [C_+(\psi) + C_-(\psi)] = -\left(1 - \frac{1}{2\psi^2}\right) -$$

середньоарифметичне значення для всіх ψ .

З рівнянь (33.3) та (33.4), інтегруючи правий доданок у вигляді

$$C_G^2(\psi) \cdot \int d\varphi \cdot d\varphi = \int \frac{dE}{E} \Rightarrow$$

$$C_G^2(\psi) \cdot \int (\varphi - \varphi_0) \cdot d\varphi = \int \frac{dE}{E} \text{ для } \varphi_0 = 0,$$

визначаємо

$$E = E_0 \cdot \exp \left[\frac{1}{2} \varphi^2 C_G^2(\psi) \right], \quad (34.1)$$

$$E = E_0 \cdot \exp \left[\frac{1}{2} \varphi^2 C_A^2(\psi) \right]. \quad (34.2)$$

Для реальних процесів енергія загасає у часі (відповідно до принципу причинності [Стародуб, 1998]), тому вибираємо у (34) знак “-”, тобто

$$\frac{dE}{d\varphi} = -E_0 \cdot 2\varphi \cdot C^2(\psi) \cdot \exp[-\varphi^2 C^2(\psi)], \quad (35)$$

$$\int_0^\infty E d\varphi = \int_0^\infty E_0 \exp[-\varphi^2 C^2(\psi)] d\varphi = E_0 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{C(\psi)}. \quad (36)$$

Рівняння (34), (35), (36) є базовими в загальній геометрії мезо-, мікро- і макромасштабів відповідно, тому, що враховують всі закони між-енергетичних співвідношень і всі типи рухів: D_- , D_φ , D_c , D_Ω , D_- .

Для випадку $\varphi_0 \neq 0$, рівняння (34.1) і (34.2) мають однаковий вигляд

$$E = E_0 \cdot \exp \left[\pm C^2(\psi) \cdot \left(\frac{1}{2} \varphi^2 - \varphi_0 \cdot \varphi \right) \right], \quad (37)$$

Для реального фізичного простору $\varphi = \psi$ і

рівняння (37) не змінюється. Так, для $C_G^2(\psi)$

$$E = E_0 \cdot \exp \left[\pm \left(\frac{1}{2} \psi^2 - \psi_0 \cdot \psi \right) \right], \quad (38)$$

а для $C_A^2(\psi)$ відповідно

$$E = E_0 \cdot \sqrt{\psi} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \psi^2 + \psi_0 \cdot \psi + \frac{\psi_0}{2\psi} \right]. \quad (39)$$

Для прямого і оберненого напрямків руху

$$\int (\psi - \psi_0) \cdot C^2(\psi) \cdot d\psi = \int (\psi - \psi_0) \cdot \left[\pm \left(1 - \frac{1}{2\psi^2} \right) \right] \cdot d\psi = \int \frac{dE}{E}, \quad (40)$$

$$E = E_0 \cdot \exp \left[\pm \int C^2(\psi) \cdot (\psi - \psi_0) \cdot d\psi \right]. \quad (40.1)$$

Рівняння (40) має наступні інтеграли:

$$-\int \psi d\psi = -\frac{1}{2} \psi^2; \quad \int \frac{1}{2\psi} d\psi = \frac{1}{2} \ln \psi;$$

$$\int \psi_0 d\psi = \psi_0 \psi; \quad -\int \frac{\psi_0}{2\psi^2} d\psi = \frac{\psi_0}{2\psi};$$

$$\mp \int \frac{\psi_0 \sqrt{1-4\psi^2}}{2\psi^2} d\psi = \pm \frac{\psi_0}{2} \left[\frac{\sqrt{1-4\psi^2}}{\psi} + 2 \arcsin 2\psi \right]$$

$$\pm \int \frac{\sqrt{1-4\psi^2}}{2\psi} d\psi = \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-4\psi^2}}{\psi} - \ln \left(\frac{2 + 2\sqrt{1-4\psi^2}}{\psi} \right) \right].$$

Остаточо, рівняння (40.1) має вигляд

$$E = E_0 \cdot \exp \left\{ \pm \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \psi^2 + \psi_0 \psi + \frac{\psi_0}{2\psi} + \frac{1}{2} \ln \psi \pm \left[\sqrt{1-4\psi^2} - \ln \left(\frac{2 + 2\sqrt{1-4\psi^2}}{\psi} \right) \right] \right] \right\} \mp \frac{\psi_0}{2} \left[\frac{\sqrt{1-4\psi^2}}{\psi} - 2 \arcsin 2\psi \right] \quad (40.2)$$

Висновки – § 2.

Побудова рівняння загальної геометрії (34) за фізичними законами міженергетичних співвідношень (30) дозволяє враховувати стохастичні переміщення фізичної точки.

Приклад 3. Аналізуючи рівняння (32) з точки зору диференціальної геометрії, щодо співвідношень між середньою, Гауссовою і головними кривизнами поверхні [Владимиров, 1971], можна відзначити, що співвідношення $D/J = k$ характеризує поняття кривизни k поверхні у просторі, а для умови $\Delta\varphi = \varphi = \psi < \sqrt{2}/2$ у рівнянні (32) функції $\frac{1}{4} \psi^4 = k_1 \cdot k_2 = K$ і

$\frac{1}{2} \cdot (1 - 2\psi^2) = (k_1 + k_2) = 2H$ можуть бути ідентифіковані як середня та Гауссова кривизни відповідно, які зв'язані між собою відомим рівнянням виду

$$k^2 - 2H \cdot k + K = 0. \quad (41)$$

Рівняння (41) задовольняє дійсним та гіперкомплексним числам [Венков, 1981], якими описано 6500 структур кристалів, і зв'язує кривизни точки на поверхні. З таких точок на поверхні побудована Гауссова лінія [Карпенко, Стародуб, 2008], яка моделюється рівнянням, аналогічним рівнянню (38).

Для кулі радіуса R : $K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$, тоді

параметри ψ і R визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\psi^2) = \frac{2}{R} = 2H \\ \frac{1}{4} \psi^4 = \frac{1}{R^2} = K \end{cases} \quad (42)$$

і мають значення $R = 8$, $\psi = 0,5$.

Для $\psi = 0$ маємо $K = 0$, $R = 4$ – циліндр.

В загальному випадку

$$2H = \frac{(\psi - \psi_0)^2 \cdot (1 - 2\psi^2)}{2\psi^2} \quad \text{і} \quad K = \frac{1}{4}(\psi - \psi_0)^4. \quad (43)$$

Тоді для умови $\psi = \psi_0$ маємо $K = 0$, $H = 0$ – площину.

Приклад 4. Аналіз фізичного змісту рівняння (38) наведено в [Карпенко, Стародуб, 2007]. Так, для незагасаючого осцилятора має місце співвідношення $\psi^2 = \frac{KU}{E^2} = \frac{1}{4} \sin^2 2\omega t = \frac{1}{4}$ для $2\omega t = \pi/2 + \pi n$, де ω – частота коливань осцилятора, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Приклад 5. На рис. 3 наведені результати застосування рівняння (40.2) для відображення реального поля сейсотраси, що спостерігається під час зондування ГС сейсмічним імпульсом (СІ) для умови $\psi_0 = 0$. Відхилення $A(t)$ від $A^*(t)$ зумовлено умовою $\psi_0 \neq 0$, яку утворює енергетичний пружний стан шару ГС, що й визначається за даними відхиленнями.

Приклад 6. У сейсмозвідці параметр D/J є коефіцієнтом відбиття.

Висновки

1. Отримане рівняння узагальненої геометрії виду $x = x_0 \cdot \exp[\pm \Delta t^2 C^2(\psi)]$ в мезомасштабі об'єднує базові (кінематичні) співвідношення диференціальної, інтегральної та

геометрії Евкліда і є відомою функцією ймовірності.

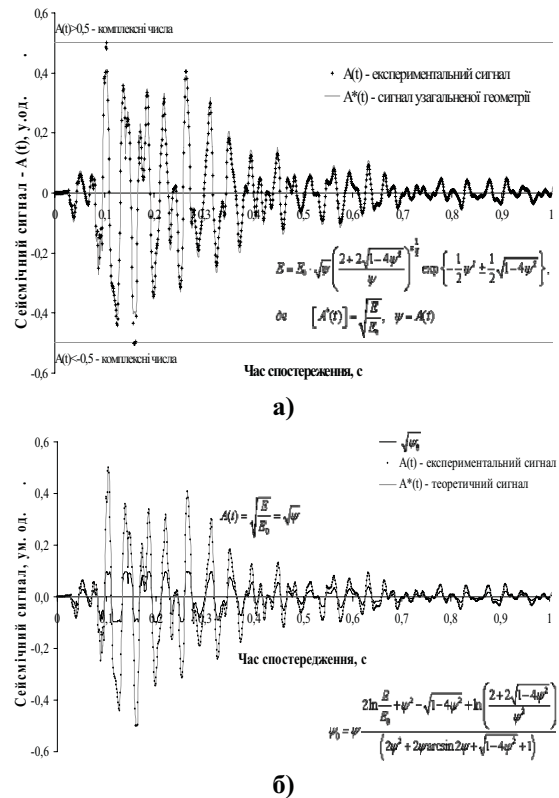


Рис. 3. Оцінка рівняння (40.2). E_0 – енергія, (Дж): а) $\psi_0 = 0$; б) $\psi_0 \neq 0$

2. Рівняння узагальненої геометрії (функція ймовірності) містить інформацію про узагальнені динамічні параметри (енергії) руху матеріальних систем.

3. Змістом узагальнених динамічних параметрів фізичної точки середовища є закони збереження, зміни, переносу і упакування енергії.

4. Рівняння узагальненої геометрії встановлює єдиність вигляду з точки зору будь-якого переміщення геометрії, алгебри, фізики на рівні міженергетичних співвідношень.

5. Умова $C_G^2(\psi) = C_A^2(\psi)$ виконується для $\psi = \pm 0,5$ та $\psi = \pm \infty$, в яких визначається однозначність D/J у рівнянні (32).

6. Практичне значення узагальненої геометрії у розв'язанні задач геофізики і геодинаміки: оскільки форма пружної хвилі, що реєструється у сейсмозвідці, є геометричним місцем точок (у двовимірному, тривимірному та чотирьохвимірному просторі), які залежать від енергії точки геологічного середовища, рівняння узагальненої геометрії моделює зв'язок геометрії хвилі з фізичними параметрами геологічного середовища, що відкриває нову можливість визначити фізичні параметри середовища за геометричними параметрами пружної хвилі.

Література

- Венков Б.А. Избранные труды. Исследование по теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
- Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
- Дудля М.А., Карпенко В.М., Гриняк О.А. Цзян Гошен. Автоматизація процесу буріння. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет. – 2005. – 207 с.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1971. – 576 с.
- Карпенко В.М. Фундаментальні закони енергетичного метаморфізму // Наук. вісник НГАУ. – 2000. – №5. – С. 74–75.
- Карпенко В.М. Фундаментальні закони енергетичного метаморфізму в суцільних середовищах з пружними властивостями // Матеріали 6-ої Міжнародної науково-практичної конференції “Нафта і газ України – 2000”. – Івано-Франківськ: Факел. – 2000. – Том 2. – С. 290.
- Карпенко В.М., Стародуб Ю.П. Концепція методу енергетичного аналізу руху елементарних об’єктів літосфери Землі. // Вісник ЛНУ ім. І. Франка. Серія геологічна. – 2006. – Вип. 20. – С. 105–23.
- Карпенко В.М., Стародуб Ю.П. Функція детермінованої ймовірності у дослідженнях будови Землі геофізичними методами // Геоінформатика. – 2007. – №4. – С. 31–39.
- Карпенко В.М. Стародуб Ю.П. Рівняння Гауссової лінії на поверхні. – Вісник Львів. ун-ту. Серія прикладна математика. Вип. 14. – 2008. – С. 105–25.
- Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
- Стародуб Ю.П. Прямая динамічна задача сейсміки для вивчення будови земної кори. – Львів: Світ, 1998. – 164 с.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБОБЩЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ
ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ**

В.Н. Карпенко, Ю.П. Стародуб

В статье исследован первичный математический объект обобщённой геометрии, названный уравнением Гауссовой линии. Уравнение объединяет объекты дифференциальной, интегральной и геометрии Евклида. Исследование проводится методами исчисления конечно-малых величин-элементов. Установленные свойства уравнения свидетельствуют о качественном изменении линии при рассмотрении различных начальных условий – шага дискретизации по времени и пространству. Установлено, что с учётом теории энергетического метаморфизма, объединяющей законы сохранения, изменения, переноса и упаковки энергии, уравнение линии моделирует стохастическое движение.

Ключевые слова: уравнения обобщенной геометрии; законы сохранения энергии; законы переноса энергии.

**MATHEMATICAL MODEL OF GENERALIZED GEOMETRY
OF PHYSICAL SPACE IN GEOPHYSICAL PROBLEMS**

V.N. Karpenko, G.P. Starodub

In the article, conclusion and research of the primary mathematical object of the generalized geometry, named – equation of the Gaussian line are considered. Equation unites the mathematical objects of differential, integral and Euclid geometries. Research of this equation by the numerical methods of small finite elements is examined. The equation’s properties reveal the quality change of the line at consideration of different initial conditions, time and space step of discretization. It is set that taking into account the theory of power metamorphism, the generalized law of energy conservation, change, transfer and energy pack, equation of the line model the stochastic motion.

Key words: equation of generalized geometry; law of energy conservation; law of energy transfer.