ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.020
УДК 621.391:519.22

І.М. Яворський[1,2], https://orcid.org/0000-0003-0243-6652
Р.М. Юзефович[1,3], https://orcid.org/0000-0001-5546-453X
О.В. Личак[1], https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

[1] Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів
[2] Бидгощська політехніка, Польща
[3] Національний університет "Львівська політехніка"
E-mail: ihor.yavorskyj@gmail.com, roman.yuzefovych@gmail.com,
olehlychak2003@yahoo.com

Перетворення Гільберта багатокомпонентних періодично нестаціонарних випадкових сигналів

Представлено академіком НАН України З.Т. Назарчуком

Проаналізовано властивості перетворення Гільберта періодично нестаціонарного випадкового сигналу, який представляється суперпозицією стохастично модульованих за амплітудою та фазою гармонік з кратними частотами. Отримано співвідношення, що визначають кореляційну та спектральну структуру квадратур кожної з компонентів, які виділяються за допомогою смугової фільтрації та перетворення Гільберта. Показано, що умовою періодичної нестаціонарності аналітичного сигналу є корельованість квадратур різних компонентів.

Ключові слова: *періодично нестаціонарні випадкові сигнали, перетворення Гільберта, аналітичний сигнал, квадратури.*

Перетворення Гільберта та концепція аналітичного сигналу широко використовуються при обробці сигналів у радіофізиці, технічній діагностиці, в тому числі й вібраційній діагностиці, та багатьох інших областях [1—4]. Вони успішно застосовуються для аналізу як детермінованих, так і стохастичних коливань і дають можливість визначати як миттєву амплітуду (обвідну), так і миттєву фазу й частоту. При вузько-смуговій модуляції повільно змінна обвідна та сигнал мають однаковий кут нахилу в точці дотику та ніколи не перетинаються. Повільно змінна частота є завжди додатною величиною. Ці властивості втрачаються, коли частотна смуга сигналу розширюється, і для широкосмугового сигналу миттєві величини вже не мають попередньої інтерпретації. Тому в літературі запропоновані методи декомпозиції широкосмугового сигналу на простіші компоненти. Один з таких методів [5]

Цитування: Яворський І.М., Юзефович Р.М., Личак О.В. Перетворення Гільберта багатокомпонентних періодично нестаціонарних випадкових сигналів. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2022. № 1. С. 20—33. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.020

полягає у виділенні з сигналу так званих мод, перетворення Гільберта яких вже має потрібні властивості. Побудова мод ґрунтується на поетапному виділенні найбільших локальних екстремумів та їх сплайн-апроксимації. Недолік методу — відсутність його теоретичного обґрунтування, що досить ускладнює інтерпретацію результатів обробки. Емпіричним є також підхід, який запропонований в [4] для декомпозиції сигналів вібрацій нелінійних динамічних систем. Він полягає у поетапній фільтрації сигналу миттєвої частоти, отриманого за допомогою перетворення Гільберта.

Теоретичний аналіз перетворення Гільберта широкосмугового сигналу можна провести, конкретизуючи його модель. У даній роботі такі дослідження проведено для сигналів, що описуються періодично нестаціонарними випадковими процесами (ПНВП). Методи спектрально-кореляційного аналізу цього класу випадкових процесів широко використовуються в різних областях науки і техніки, включаючи радіофізику, геофізику, акустику, теорію зв'язку, вібродіагностику тощо [6—13].

Гармонічне представлення ПНВП

$$\xi(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k(t)e^{ik\omega_0 t}, \tag{1}$$

де $\xi_k(t)$ — стаціонарно зв'язані випадкові процеси, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$; T — період нестаціонарності, дає можливість з єдиних позицій аналізувати різні типи стохастичної повторюваності, крайніми випадками котрих є детерміновані періодичні функції і стаціонарні випадкові процеси. Перші отримуються, коли $\xi_k(t)$ вироджуються в сталі величини, а другі — коли випадкові процеси $\xi_k(t)$ є некорельованими. Кожну амплітудно-фазо-модульовану гармоніку стохастичного ряду (1) можна розглядати як окремий монокомпонент сигналу $\xi(t)$.

Імовірнісні характеристики модульованих процесів $\xi_k(t)$ визначають кореляційну та спектральну структуру випадкового процесу $\xi(t)$. Математичні сподівання $E\xi_k(t)=m_k^{(\xi)}$ є коефіцієнтами Фур'є математичного сподівання процесу $m(t)=E\xi(t)$, яке описує детерміновану складову коливань:

$$m_\xi(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}m_k e^{ik\omega_0 t}=m_0+\sum_{k\in N}(m_k^c\cos k\omega_0 t+m_k^s\sin k\omega_0 t). \tag{2}$$

Тут $m_k=\dfrac{1}{2}(m_k^c-im_k^s)$, $\forall k\neq 0$. Взаємокореляційні функції процесів $\xi_k(t)$, тобто $R_{kl}(u)=$ $=E\overline{\mathring{\xi}_k(t)}\mathring{\xi}_l(t,u)$, $\mathring{\xi}_k(t)=\xi_k(t)-m_k$, знак "$\overline{}$" означає комплексне спряження, номери яких відрізняються на r, визначають r-й коефіцієнт Фур'є кореляційної функції сигналу $b_\xi(t,u)=t\,\mathring{\xi}(t)\mathring{\xi}(t+u)$, $\mathring{\xi}(t)=\xi(t)-m_\xi(t)$:

$$B_k^{(\xi)}(u)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}R_{l-r,\,l}^{(\xi)}(u)e^{il\omega_0 u}.$$

Тоді

$$b_\xi(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}B_k^{\xi}(u)e^{ik\omega_0 t}=B_0^{(\xi)}(u)+\sum_{k\in\mathrm{N}}[C_k^{(\xi)}(u)\cos k\omega_0 t+S_k^{(\xi)}(u)\sin k\omega_0 t],$$

$$B_k^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2}[C_k^{(\xi)}(u) - iS_k^{(\xi)}(u)]. \qquad (3)$$

Миттєва спектральна густина ПНВП

$$f_\xi(\omega, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_\xi(t, u) e^{-i\omega u} du$$

може бути представлена рядом Фур'є

$$f_\xi(\omega, t) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} f_r^{(\xi)}(\omega) e^{ir\omega_0 t},$$

де

$$f_r^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_r^{(\xi)}(u) e^{-i\omega u} du = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{l-r,l}^{(\xi)}(\omega - l\omega_0),$$

а також

$$f_{rl}^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{kl}^{(\xi)}(u) e^{-i\omega\tau} du\,.$$

Величини $B_k^{(\xi)}(u)$ і $f_k^{(\xi)}(\omega)$ називають кореляційними й спектральними компонентами [10].

У статті вперше з використанням перетворення Гільберта проведено теоретичний аналіз багатокомпонентного ПНВП (1) для випадку, коли спектральні густини потужності модуляцій $f_{ll}^{(\xi)}(\omega)$ сконцентровані в інтервалі $\left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$. Такі ПНВП називають вузькосмуговими. Новизна роботи полягає в отриманні взаємозалежностей між кореляційно-спектральними структурами багатокомпонентного ПНВП та його перетворення Гільберта, встановлення характерних властивостей аналітичного сигналу. Показано, що виділені за допомогою смугової фільтрації однокомпонентні сигнали є ПНВП, аналітичні сигнали яких є стаціонарними випадковими процесами. Встановлено, що умовою періодичної нестаціонарності аналітичного сигналу багатокомпонентного ПНВП є взаємокорельованість модуляцій різних компонент. Досліджено кореляційно-спектральні властивості квадратур окремих компонент, які отримуються за допомогою перетворення Гільберта.

Перейдемо до детальнішого представлення результатів. Будемо вважати, що $m_0 = 0$. Тоді існує перетворення Гільберта сигналу $\xi(t)$

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\xi(\tau) d\tau\,, \qquad (4)$$

де $h(\tau) = (\pi\tau)^{-1}$, при цьому

$$\xi(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\eta(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Математичні сподівання сигналу й перетворення Гільберта пов'язані співвідношенням

$$m_\eta(t) = E\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)m_\xi(\tau)d\tau.$$

Тоді

$$m_\eta(t) = \sum_{k\in N}(m_k^c \sin k\omega_0 t - m_k^s \cos k\omega_0 t). \tag{6}$$

Введемо також у розгляд авто- та взаємокореляційні функції та їх представлення рядами Фур'є:

$$b_\eta(t,u) = E\overset{\circ}{\eta}(t)\overset{\circ}{\eta}(t,u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k^{(\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t} = B_0^{(\eta)}(u) + \sum_{k\in N}[C_k^{(\eta)}(u)\cos k\omega_0 t + S_k^{(\eta)}(u)\sin k\omega_0 t],$$

$$B_k^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2}[C_k^{(\eta)}(u) - iS_k^{(\eta)}(u)] \ \ \forall k \neq 0, \tag{7}$$

$$b_{\xi\eta}(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t,u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k^{(\xi\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t} =$$

$$= B_0^{(\xi\eta)}(u) + \sum_{k\in N}[C_k^{(\xi\eta)}(u)\cos k\omega_0 t + S_k^{(\xi\eta)}(u)\sin k\omega_0 t],$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2}[C_k^{(\xi\eta)}(u) - iS_l^{(\xi\eta)}(u)] \ \ \forall k \neq 0, \tag{8}$$

Теорема 1. *ПНВП* $\xi(t)$ *і його перетворення Гільберта (4) є зв'язаними ПНВП, їхні нульові кореляційні компоненти* $B_0^{(\xi)}(u)$ *і* $B_0^{(\eta)}(u)$ *є однаковими, нульові взаємокореляційні компоненти* $B_0^{(\xi\eta)}(u)$ *і* $B_0^{(\eta\xi)}(u)$ *відрізняються тільки знаком та визначаються одностороннім синусним перетворенням нульового спектрального компонента сигналу:*

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = -B_0^{(\eta\xi)}(u) = 2\int_0^{\infty} f_0^{(\xi)} \sin\omega u d\omega. \tag{9}$$

Вищі авто- та взаємокореляційні компоненти мають вигляд:

$$B_k^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega - 2\int_0^{k\omega_0} f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega,$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = i\int_0^{\infty}[f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0)e^{-i\omega u} - f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}]d\omega.$$

Доведення. На основі перетворення (4) та (5) для авто-та взаємокореляційних функцій (7) і (8) знаходимо:

$$b_{\eta\xi}(t,u) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\xi}(t+u,\tau)}{\tau+u}d\tau, \tag{10}$$

$$b_{\xi}(t,u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\xi\eta}(t+u,\tau)}{\tau+u}d\tau, \tag{11}$$

$$b_{\xi\eta}(t,u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\eta}(t+u,\tau)}{\tau+u}d\tau, \tag{12}$$

$$b_{\eta}(t,u) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b_{\eta\xi}(t+u,\tau)}{\tau+u}d\tau. \tag{13}$$

Підставляючи у (10) ряд Фур'є (3), отримуємо

$$B_k^{(\eta\xi)}(u) = -\frac{e^{ik\omega_0 u}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_k^{(\xi)}(\tau)}{\tau+u}d\tau.$$

Взявши до уваги, що $B_k^{(\eta\xi)}(u) = B_k^{(\xi\eta)}(-u)e^{ik\omega_0 u}$, знаходимо

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)B_k^{(\xi)}(\tau)(\tau)d\tau\,. \tag{14}$$

На основі співвідношення (11)—(13) подібно маємо:

$$B_k^{(\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)B_k^{(\xi\eta)}(\tau)d\tau\,, \tag{15}$$

$$B_k^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)B_k^{(\eta\xi)}(\tau)d\tau\,, \tag{16}$$

$$B_k^{(\eta\xi)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(u-\tau)B_k^{(\eta)}(\tau)d\tau\,. \tag{17}$$

З виразів (14)—(17) випливає, що $B_k^{(\eta)}(u)$ і $B_k^{(\eta\xi)}(u)$, а також $B_k^{(\xi\eta)}(u)$ і $B_k^{(\xi)}(u)$ є гільбертовими парами.

У частотній області маємо:

$$f_k^{(\eta)}(\omega) = H(\omega)f_k^{(\eta\xi)}(\omega)\,, \tag{18}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2022. № 1

$$f_k^{(\eta\xi)}(\omega) = -H(\omega) f_k^{(\eta)}(\omega), \quad f_k^{(\xi)}(\omega) = -H(\omega) f_k^{(\xi\eta)}(\omega),$$

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = H(\omega) f_k^{(\xi)}(\omega), \tag{19}$$

де передавальна функція перетворення Гільберта $H(\omega)=-i$ для $\omega>0$ і $H(\omega)=i$ для $\omega<0$, а також

$$f_k^{(\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\eta)}(u) e^{-i\omega u} du, \qquad f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_k^{(\xi\eta)}(u) e^{-i\omega u} du.$$

З останніх співвідношень випливає:

$$\begin{aligned} f_k^{(\xi)}(-\omega) &= f_k^{(\eta)}(\omega + k\omega_0) = \overline{f}_{-k}^{(\eta)}(\omega), \\ f_k^{(\xi\eta)}(-\omega) &= f_k^{(\eta\xi)}(\omega + k\omega_0) = \overline{f}_{-k}^{(\xi\eta)}(\omega). \end{aligned} \tag{20}$$

Взявши до уваги (18) та (20) для кореляційних компонентів перетворення Гільберта, отримуємо:

$$B_k^{(\eta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega) H(\omega - k\omega_0) H(\omega) e^{i\omega u} d\omega. \tag{21}$$

Оскільки

$$-H(\omega)H(\omega - k\omega_0) = \begin{cases} 1, \omega \in (-\infty,\ 0), \\ -1,\ \omega \in (0,\ k\omega_0), \\ 1,\ \omega \in (k\omega_0, \infty), \end{cases}$$

то інтеграл (21) можна переписати у вигляді

$$B_k^{(\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega - 2\int_0^{k\omega_0} f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega. \tag{22}$$

На основі співвідношення (19) маємо:

$$B_k^{(\xi\eta)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega = i\int_0^{\infty} [f_k^{(\xi)}(\omega + k\omega_0) e^{-i\omega u} - f_k^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u}] d\omega. \tag{23}$$

Поклавши у формулах (20) та (21) $k=0$, отримуємо:

$$B_0^{(\eta)}(u) = B_0^{(\xi)}(u), \quad B_0^{(\xi\eta)}(u) = 2\int_0^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega) \sin\omega u d\omega.$$

Теорема доведена.

Враховуючи ряди (2) та (6) для математичного сподівання аналітичного сигналу $\zeta(t)=\xi(t)+i\eta(t)$ маємо:

$$m_\zeta(t)=m_\xi(t)+im_\eta(t)=2\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k^{(\xi)}e^{ik\omega_0 t}.$$

Як бачимо, математичне сподівання $m_\xi(t)$ містить тільки додатні частоти.

Кореляційна функція аналітичного сигналу

$$b_\zeta(t,u)=b_\xi(t,u)+b_\eta(t,u)+i[b_{\xi\eta}(t,u)-b_{\eta\xi}(t,u)] \tag{24}$$

представляється рядом Фур'є:

$$b_\zeta(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k^{(\zeta)}(u)e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$B_k^{(\zeta)}(u)=B_k^{(\xi)}(u)+B_k^{(\eta)}(u)+i[B_k^{(\xi\eta)}(u)-B_k^{(\eta\xi)}(u)]. \tag{25}$$

Теорема 2. *Аналітичний сигнал* $\zeta(t)=\xi(t)+i\eta(t)$ *є ПНВП, кореляційні компоненти якого визначаються виразом*

$$B_k^{(\zeta)}(u)=2\left[\int\limits_{R\setminus[0,k\omega_0]} f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega-\int\limits_{k\omega_0}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega)[e^{-i(\omega-k\omega_0)u}-e^{i\omega u}]d\omega\right], \tag{26}$$

де $R\setminus[0,k\omega_0]$ *є різницею множин* R *і* $[0,k\omega_0]$. *Нульовий кореляційний компонент є комплексно-значним, його дійсна та уявна частини є гільбертовими парами і він визначається формулою:*

$$B_0^{(\zeta)}(u)=4\int\limits_0^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega, \tag{27}$$

при цьому $\left|B_0^{(\zeta)}(u)\right|\leqslant 2B_0^{(\xi)}(0)$.

Доведення. Оскільки $B_0^{(\eta)}(u)=B_0^{(\xi)}(u)$ і $B_0^{(\eta\xi)}(u)=-B_0^{(\xi\eta)}(u)$, то $B_0^{(\zeta)}(u)=2[B_0^{(\xi)}(u)+ +iB_0^{(\xi\eta)}(u)]$.

З рівностей (14) та (15) випливає, що $B_0^{(\xi\eta)}(u)$ і $B_0^{(\xi)}(u)$ є гільбертовими парами:

$$B_0^{(\xi\eta)}(u)=H\{B_0^{(\xi)}(u)\}.$$

Взявши до уваги подання

$$B_0^{(\xi)}(u)=2\int\limits_0^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega)\cos\omega u du,$$

а також (9), приходимо до виразу (27), а звідси:

$$\left|B_0^{(\zeta)}(u)\right| \leqslant 4\int_0^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega)\,d\omega = 2B_0^{(\xi)}(0).$$

Рівність отримуємо тільки при $u=0$: $B_0^{(\zeta)}(0) = 2B_0^{(\xi)}(0)$.

Для суми кореляційних компонентів сигналу та його перетворення Гільберта знаходимо

$$B_k^{(\xi)}(u) + B_k^{(\eta)}(u) = 2\int_{R\setminus[0,\,k\omega_0]} f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega\ . \tag{28}$$

З формули (21) отримуємо:

$$f_k^{(\eta)}(\omega) = -H(\omega - k\omega_0)H(\omega)f_k^{(\xi)}(\omega).$$

Тоді

$$f_k^{(\eta\xi)}(\omega) = H(\omega)H(\omega)H(\omega - k\omega_0)f_k^{(\xi)}(\omega) = -H(\omega - k\omega_0)f_k^{(\xi)}(\omega)$$

і звідси

$$B_k^{(\eta\xi)}(u) = -i\left[\int_0^{\infty} f_k^{(\eta)}(\omega + k\omega_0)e^{-i\omega u}d\omega + \int_0^{k\omega_0} f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega - \int_{k\omega_0}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega\right]. \tag{29}$$

Підставляючи вирази (22), (28) та (29) у (25) приходимо до формули (26). Теорема доведена.

Наслідок 1. Якщо значення k -х спектральних компонентів зосереджені в інтервалі $[0, k\omega_0]$, тобто

$$f_k^{(\xi)}(\omega) = \begin{cases} f_k^{(\xi)}(\omega), & \omega \in [0,\ k\omega_0], \\ 0, & \omega \notin [0,\ k\omega_0], \end{cases} \tag{30}$$

то $B_k^{(\eta)}(u) = -B_k^{(\xi)}(u)$ та $B_k^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\eta\xi)}(u) = -iB_k^{(\xi)}(u)$.

Наслідок 2. Якщо спектральні компоненти ПНВП задовольняють умову (30), то аналітичний сигнал є стаціонарним випадковим процесом, кореляційна функція якого визначається формулою:

$$R_\zeta(u) = B_0^{(\zeta)}(u) = 4\int_0^{\infty} f_0^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega\ .$$

Конкретизуємо отримані вище результати, врахувавши гармонічне представлення (1). Поклавши $\xi_0(t) \equiv 0$ і обмеживши число гармонік, маємо:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{N}\left[\xi_k^c(t)\cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t)\sin k\omega_0 t\right],$$

при цьому $\xi_k(t)=\frac{1}{2}[\xi_k^c(t)-i\xi_k^s(t)]$. Будемо вважати, що значення спектральних густин модулюючих процесів сконцентровані в інтервалі $\left[-\frac{\omega_0}{2},\frac{\omega_0}{2}\right]$. Його перетворення Гільберта:

$$\eta(t)=\sum_{k=1}^{N}[\xi_k^c(t)\sin k\omega_0 t-\xi_k^s(t)\cos k\omega_0 t]=i\sum_{k=1}^{N}[\overline{\xi}_k(t)e^{-ik\omega_0 t}-\xi_k(t)e^{ik\omega_0 t}].$$

Авто- та взаємокреляційні функції сигналу та його перетворення Гільберта можуть бути представлені у вигляді

$$b_\xi(t,u)=2\operatorname{Re}\{S_1(t,u)+S_2(t,u)\}, \tag{31}$$

$$b_\eta(t,u)=2\operatorname{Re}\{S_1(t,u)-S_2(t,u)\}, \tag{32}$$

$$b_{\xi\eta}(t,u)=2\operatorname{Im}\{S_1(t,u)+S_2(t,u)\}, \tag{33}$$

$$b_{\eta\xi}(t,u)=2\operatorname{Im}\{S_2(t,u)-S_1(t,u)\}, \tag{34}$$

де

$$S_1(t,u)=\sum_{r=-N+1}^{N-1}e^{ir\omega_0 t}\sum_{l\in M_1}R_{l-r,l}^{(\xi)}(u)e^{il\omega_0 u}, \tag{35}$$

$$S_2(t,u)=\sum_{r=2}^{2N}e^{ir\omega_0 t}\sum_{l\in M_2}R_{\xi_{l-r}\xi_l}(u)e^{il\omega_0 u}, \tag{36}$$

а також $R_{\xi_l\xi_r}(u)=E\overset{\circ}{\xi}_l(t)\overset{\circ}{\xi}_r(t+u)$ і

$$M_1=\begin{cases}\{1,...,r+N\}, & r\leqslant 0,\\ \{r+1,...,N\}, & r>0,\end{cases}\qquad M_2=\begin{cases}\{1,...,r-1\}, & r=\overline{2,N+1},\\ \{r-N,...,N\}, & r=\overline{N+2,2N}.\end{cases}$$

Виходячи зі співвідношення (36) для кореляційних компонентів з номерами $r\geqslant N$ маємо:

$$B_r^{(\xi)}(u)=\frac{1}{4}\sum_{l\in M_2}[R_{r-l,l}^c(u)-R_{r-l,l}^s(u)-i[R_{r-l,l}^{cs}(u)+R_{r-l,l}^{sc}(u)]]e^{il\omega_0 u},$$

а звідси

$$f_r^{(\xi)}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{l\in M_2}[f_{r-l,l}^c(\omega-l\omega_0)-f_{r-l,l}^s(\omega-l\omega_0)-[f_{r-l,l}^{cs}(\omega-l\omega_0)+f_{r-l,l}^{sc}(\omega-l\omega_0)]]. \tag{37}$$

З формули (37) видно, що значення спектральних компонентів $\eta_r^\xi(\omega)$ для $r\geqslant N$ належать до інтервалу $[0,r\omega_0]$, тобто задовольняють умову (30).

Наслідок 3. Кореляційні компоненти вузькосмугового ПНВП та його перетворення Гільберта з номерами $r \geqslant N$ відрізняються тільки знаком $B_r^{(\eta)}(u) = -B_r^{(\xi)}(u)$, а їхні взаємокореляційні компоненти є симетричними непарними функціями і визначаються рівністю

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = B_r^{(\eta\xi)}(u) = -B_r^{(\xi)}(u).$$

Теорема 3. *Якщо кореляційні функції квадратур окремих компонент ПНВП задовольняють умови:*

$$R_{kl}^{c}(u) + R_{kl}^{s}(u) \neq 0 \text{ чи } R_{kl}^{cs}(u) - R_{kl}^{sc}(u) \neq 0,$$

для $k \neq l$, *то аналітичний сигнал* $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ *є ПНВП і його кореляційна функція визначається рядом*

$$b_\zeta(t,u) = \sum_{r=-N+1}^{N-1} B_r^{(\zeta)}(u) e^{ir\omega_0 t},$$

де

$$B_r^{(\xi)}(u) = \sum_{l \in M_1} [R_{l-r,\,l}^{c}(u) + R_{l-r,\,l}^{s}(u) - i[R_{l-r,\,l}^{cs}(u) - R_{l-r,\,l}^{sc}(u)]] e^{il\omega_0 u}, \tag{38}$$

а значення спектральних компонентів лежать поза межами $[0, r\omega_0]$.

Доведення. Взявши до уваги рівності $B_k^{(\eta)}(u) = -B_k^{(\xi)}(u)$ і $B_r^{(\xi\eta)}(u) = B_k^{(\eta\xi)}(u)$ для $r \geqslant N$, приходимо до висновку, що ряд Фур'є для кореляційної функції аналітичного сигналу містить тільки $N-1$ гармоніку. Вираз для кореляційних компонентів (33) отримуємо виходячи з (24) та (31)—(35) і співвідношень

$$b_\xi(t,u) + b_\eta(t,u) = 4\,\mathrm{Re}\{S_1(t,u)\}, \qquad b_{\xi\eta}(t,u) - b_{\eta\xi}(t,u) = 4\,\mathrm{Im}\{S_1(t,u)\}.$$

Відмітимо, що до виразу (38) також приходимо на основі ряду

$$\zeta(t) = 2\sum_{k=1}^{N} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}.$$

Врахувавши (33), для спектральних компонентів аналітичного сигналу, маємо

$$f_r^{(\zeta)}(\omega) = \sum_{l \in M_1} [f_{l-r,\,l}^{c}(\omega - l\omega_0) + f_{l-r,\,l}^{s}(\omega - l\omega_0) - i[f_{l-r,\,l}^{cs}(\omega - l\omega_0) - f_{l-r,\,l}^{sc}(\omega - l\omega_0)]].$$

Індекс сумування l приймає значення $l = \overline{1, N+r}$ для $r \leqslant 0$ і $l = \overline{r+1, N}$ для $r > 0$. Тобто нерівність $l \geqslant r$ виконується для всіх l. А це означає, що значення спектральних компонентів лежать поза інтервалом $[0, r\omega_0]$ $\forall r = \overline{-N+1, N-1}$. Теорему доведено.

З формули (38) видно, що дисперсія аналітичного сигналу для багатокомпонентного ПНВП змінюється з часом тільки тоді, коли квадратурні складові різних номерів є взаємокорельованими при $u = 0$.

Розглянемо тепер сигнал, отриманий у результаті смугової фільтрації (1) з передавальною функцією

$$H_k(\omega)=\begin{cases}1, \omega\in\left[\pm k\omega_0-\dfrac{\omega_0}{2}, \pm k\omega_0+\dfrac{\omega_0}{2}\right],\\ 0, \qquad \text{для інших } \omega,\end{cases}$$

Він має вигляд

$$\nu_k(t)=\xi_k^c(t)\cos k\omega_0 t+\xi_k^s(t)\sin k\omega_0 t, \tag{39}$$

а його математичне сподівання і кореляційна функція визначаються співвідношеннями

$$m_{\nu_k}(t)=m_k^c(t)\cos k\omega_0 t+m_k^s(t)\sin k\omega_0 t,$$

$$b_{\nu_k}(t,u)=B_0^{(\nu_k)}(u)+\sum_{r=\pm 2k}B_r^{(\nu_k)}(u)e^{ir\omega_0 t},$$

де

$$B_0^{(\nu_k)}(u)=\frac{1}{2}[R_k^c(u)+R_k^s(u)]\cos k\omega_0 u+\tilde{\tilde{R}}_k^{cs}(u)\sin k\omega_0 u,$$

$$B_{2k}^{(\nu_k)}(u)=\frac{1}{4}[R_k^c(u)-R_k^s(u)-2i\tilde{R}_k^c(u)]e^{ik\omega_0 u}, \tag{40}$$

при цьому $\tilde{R}_k^{cs}(u)$ і $\tilde{\tilde{R}}_k^{cs}(u)$ є парною і непарною частинами взаємокореляційної функції $R_k^{cs}(u)$. Як випливає з (40), значення $2k$ -го спектрального компонента належать до інтервалу $\left[k\omega_0-\dfrac{\omega_0}{2}, k\omega_0+\dfrac{\omega_0}{2}\right]$, тобто задовольняють умову (30). Отже, маємо наступні наслідки теореми 1 та теореми 2.

Наслідок 4. Кореляційні компоненти вузькосмугового однокомпонентного ПНВП (39) і його перетворення Гільберта

$$\eta_k(t)=\xi_k^c(t)\sin k\omega_0 t-\xi_k^s(t)\sin k\omega_0 t \tag{41}$$

відрізняються тільки знаком $B_{2k}^{(\eta_k)}(u)=-B_{2k}^{(\nu_k)}(u)$, а їх взаємокореляційні компоненти є симетричними $B_{2k}^{(\nu_k\eta_k)}(u)=B_{2k}^{(\eta_k\nu_k)}(u)$ і пов'язані з $2k$ -м кореляційним компонентом сигналу (40) рівністю $B_{2k}^{(\nu_k\eta_k)}(u)=-iB_{2k}^{(\nu_k)}(u)$.

Наслідок 5. Аналітичний сигнал $\zeta_k(t)=\nu_k(t)+i\eta_k(t)$ для кожної компоненти (39) є стаціонарним випадковим процесом, кореляційна функція якого є комплекснозначною

$$R_{\zeta_k}(u)=B_0^{(\nu_k)}(u)+iB_0^{(\nu_k\eta_k)}(u),$$

при цьому її дійсна і уявна частини є гільбертовою парою і визначаються формулою

$$R_{\zeta_k}(u) = 4\int_0^\infty f_0^{(\nu_k)}(\omega) e^{i\omega u}.$$

З виразів (40) та (41) для квадратурних компонент маємо:

$$\xi_k^c(t) = \nu_k(t)\cos k\omega_0 t + \eta_k(t)\sin k\omega_0 t, \tag{42}$$

$$\xi_k^s(t) = \nu_k(t)\sin k\omega_0 t - \eta_k(t)\cos k\omega_0 t. \tag{43}$$

Теорема 4. *Квадратурні компоненти (42) і (43) вузькосмугового ПНВП (39) є стаціонарно зв'язаними випадковими процесами, залежності їх авто- та взаємокореляційних функцій від нульового та $2k$ -х косинусного та синусного компонентів мають вигляд:*

$$R_k^{c,s}(u) = B_0^{(\nu_k)}(u)\cos k\omega_0 u + B_0^{(\nu_k\eta_k)}(u)\sin k\omega_0 u \pm C_{2k}^{(\nu_k)}(u)\cos k\omega_0 u \mp S_{2k}^{(\nu_k)}(u)\sin k\omega_0 u, \tag{44}$$

$$R_k^{cs}(u) = B_0^{(\nu_k)}(u)\sin k\omega_0 u - B_0^{(\nu_k\eta_k)}(u)\cos k\omega_0 u + S_{2k}^{(\nu_k)}(u)\cos k\omega_0 u + C_{2k}^{(\nu_k)}(u)\sin k\omega_0 u. \tag{45}$$

Доведення. Подамо квадратурні складові у вигляді

$$\xi_k^c(t) = \frac{1}{2}[\zeta_k(t)e^{-i\omega_0 t} + \bar{\zeta}_k(t)e^{i\omega_0 t}], \qquad \xi_k^s(t) = \frac{i}{2}[\zeta_k(t)e^{-i\omega_0 t} - \bar{\zeta}_k(t)e^{i\omega_0 t}].$$

$\zeta_k(t) = \xi_k(t) + i\eta_k(t)$.

Тоді

$$R_k^{c,s}(u) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{b_{\zeta_k}(t,u)e^{-i\omega_0 u} \pm b_{\zeta_k}(t,u)e^{-i\omega_0(2t+u)}\},$$

$$R_k^{cs}(u) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{b_{\zeta_k}(t,u)e^{-i\omega_0 u} \pm b_{\zeta_k}(t,u)e^{-i\omega_0(2t+u)}\},$$

де $b_{\zeta_k}(t,u) = E\bar{\mathring{\zeta}}_k(t)\mathring{\zeta}_k(t+u)$, $b_{\zeta_k\zeta_k}(t,u) = E\mathring{\zeta}_k(t)\mathring{\zeta}_k(t+u)$. Відмітимо, що знак "+" відповідає кореляційній функції $R_k^c(u)$, а знак "–" кореляційній функції R_k^s. Обчислюючи функції $b_{\zeta_k}(t,u)$ та $b_{\zeta_k\zeta_k}(t,u)$ на основі формул (39) і (41), приходимо до виразів (44) і (45). Теорема доведена.

Представлені вище результати являються теоретичною основою для використання перетворення Гільберта при дослідженні кореляційно-спектральної структури стохастичних коливань різного походження, адекватною моделлю яких є ПНВП. З низько-частотною вузькосмуговою модуляцією зустрічаємося, наприклад, при аналізі вібрацій добової ритміки багатьох геофізичних процесів [9, 10], при аналізі вібрацій обертових вузлів механізмів з пошкодженими елементами [11, 14]. У першому випадку розроблена методологія дозволяє детально дослідити структуру модуляцій гармонік добового ходу й побудувати прогностичні моделі. В другому випадку опрацьований підхід дає можливість сформувати найбільш чутливі індикатори для раннього виявлення дефектів, а на основі встановленої авто-та взаємокореляційної структури модуляцій провести їх локалізацію та визначити їх типи.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Hahn S.L. Hilbert transforms in signal processing. Boston: Artech House, 1996. 460 p.
2. Vakman D. Signals, Oscillations, and Waves: A Modern Approach. Boston: Artech House, 1998. 207 p.
3. King F.W. Hilbert Transforms: Volume 1 (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Series Number 124). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 896 p.
4. Feldman M. Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibration. New Delhi: Wiley, 2011. 320 p.
5. Huang N.E., Shent Z., Long S.R. at al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Soc. A*. 1998. **454**, Iss. 1971. P. 903–995. https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0193
6. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1987. 320 p.
7. Gardner W.A. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing. New York: IEEE Press, 1994. 504 p.
8. Hard H.L., Miamee A. Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice. New York: Wiley, 2007. 384 p.
9. Antoni J. Cyclostationarity by examples. *Mech. Syst. Signal Process*. 2009. **23**, № 4. P. 987–1036. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.10.010
10. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. Львів: ФМІ НАН України, 2013. 802 p.
11. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Kravets I. The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena. *Appl. Condition Monitoring*. 2015. **3**. P. 55–88. https://doi.org/10.1007/987-3-319-163330-7_4
12. Javorskyj I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R. Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems. *Mech. Syst. Signal Process*. 2017. **83**. P. 406-438. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.06.022
13. Napolitano A. Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Elsevier, Academic Press, 2020. 626 p.
14. Matsko I., Javorskyj I., Yuzefovych R., Zakrzewski Z. Forced oscillations of cracked beam under the stochastic cyclic loading. *Mech. Syst. Signal Process*. 2018. **104**. P. 242–263. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.08.021

Надійшло до редакції 11.10.2021

REFERENCES

1. Hahn, S. L. (1995). Hilbert transforms in signal processing, Boston: Artech House.
2. Vakman, D. (1998). Signals, Oscillations, and Waves: A Modern Approach, Boston: Artech House.
3. King, F. W. (2009). Hilbert Transforms: Volume 1 (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Series Number 124), Cambridge: Cambridge Univ. Press.
4. Feldman, M. (2011). Hilbert transform applications in mechanical vibration, New Delhi: Wiley.
5. Huang, N. E., Shent, Z., Long, S.R. at al. (1998). The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. Proc. R. Soc. A. No. 454 (1971), pp. 903-995. https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0193
6. Dragan, Ya., Yavorskyj, I. & Rozhkov, V. (1987). Methods of probabilistic analysis of oceanological rhytmics. Leningrad: Gidrometeoizdat (in Russian).
7. Gardner, W.A. (1994). Cyclostationarity in Communications and Signal Processing. New York: IEEE Press.
8. Hard, H. L. & Miamee, A. (2007). Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice. New York: Wiley.
9. Antoni, J. (2009). Cyclostationarity by examples. Mech. Syst. Signal Process., 23, pp. 987-1036. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.10.010
10. Javorskyj, I. (2013). Mathematical models and analysis of stochastic oscillations, Lviv: Karpenko Physico-Mechanical Institute (in Ukrainian).
11. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I. & Kravets, I. (2015). The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena. Applied Condition Monitoring, 3, pp. 55-88. https://doi.org/10.1007/987-3-319-163330-7_4

12. Javorskyj, I., Kravets, I., Matsko, I. & Yuzefovych, R. (2017). Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems. Mech. Syst. Signal Process., 83, pp. 406-438. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.06.022
13. Napolitano, A. (2020). Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations, Elsevier, Academic Press.
14. Matsko, I., Javorskyj, I., Yuzefovych, R. & Zakrzewski, Z. (2018). Forced oscillations of cracked beam under the stochastic cyclic loading. Mech. Syst. Signal Process., 104, pp. 242-263. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.08.021

Received 11.10.2021

I.M. Javorskyj[1, 2], https://orcid.org/0000-0003-0243-6652
R.M. Yuzefovych[1, 3], https://orcid.org/0000-0001-5546-453X
O.V. Lychak[1], https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

[1] Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv
[2] Bydgoszcz Polytechnic, Poland
[3] Lviv Polytechnic National University
E-mail: ihor.yavorskyj@gmail.com, roman.yuzefovych@gmail.com, olehlychak2003@yahoo.com

HILBERT TRANSFORM FOR MULTICOMPONENT PERIODICALLY NON-STATIONARY RANDOM SIGNALS

The properties of the Hilbert transform for periodically non-stationary random signal (PNRS), which are presented in the form of superposition of the amplitude and phase modulated harmonics with multiple frequencies are considered. It is shown that PNRS and its Hilbert transform are jointly PNRS and the expressions for the coefficients of Fourier series for their auto- and cross-covariation functions and spectral densities are obtained. The analytic signal properties are analyzed. It is shown that correlations of the quadratures for the different components of the narrow-band PNRS cause the periodical non-stationarity of the analytic signal. The auto- and cross-covariance functions of the quadratures for each periodically non-stationary monocomponent are established.

Keywords: *periodically non-stationary random signal, Hilbert transform, analytic signal, quadratures.*